

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕХО-СИГНАЛІВ SH-ХВИЛЬ ВІД ТОНКОСТІННИХ ПРУЖНИХ ЖОРСТКО ПІДКРІПЛЕНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

За допомогою інтегрального перетворення Фур'є за часом, методу зрощування асимптотичних розкладів та методу нульового поля досліджено задачу розсіяння імпульсів SH-хвиль тонким пружним криволінійним включенням, одна сторона якого жорстко закріплена. Проаналізовано особливості ехо-сигналів від таких включень залежно від їх геометричних і механічних параметрів.

У роботах [1, 2] запропоновано алгоритм дослідження ехо-сигналів від тонкостінних пружних включень малої жорсткості, що ґрунтується на поєднанні методу інтегрального перетворення Фур'є за часом і методу нульового поля. Нижче за допомогою такого алгоритму проаналізовано особливості розсіяння імпульсів пружних SH-хвиль різної форми на тонкостінних пружних криволінійних жорстко підкріплених включеннях довільної жорсткості.

Нехай в необмеженому середовищі з модулем зсуву μ і з густиною ρ в умовах ідеального механічного контакту розміщене тонкостінне пружне включення з параметрами μ_0, ρ_0 . Припускаємо, що пружна система перебуває в умовах поздовжнього зсуву. У цьому випадку відмінна від нуля компонента вектора зміщень задовольняє рівняння

$$\begin{aligned} \mu \Delta u(\mathbf{x}, t) + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\mathbf{x}, t) &= 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus W_\varepsilon, \\ \mu_0 \Delta u^0(\mathbf{x}, t) + \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^0(\mathbf{x}, t) &= 0, & \mathbf{x} \in W_\varepsilon, \\ u(\mathbf{x}, t) &= u^i(\mathbf{x}, t) + u^s(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (1)$$

та умови механічного контакту між складовими композиту

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= u^0(\mathbf{x}, t), & \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial n^0} &= \gamma \frac{\partial u^0(\mathbf{x}, t)}{\partial n^0}, & \mathbf{x} \in \partial W_\varepsilon \setminus \partial W_1, \\ u(\mathbf{x}) &= u^0(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} &\in \partial W_1, \\ \partial W_1 &= \{\alpha_1 \in W_0, \alpha_2 = -h(\alpha_1)/2\}, & \gamma &= \mu_0/\mu, & 0 \leq \gamma < \infty, \end{aligned} \quad (2)$$

де $u^i(\mathbf{x}, t), u^s(\mathbf{x}, t)$ – зміщення в імпульсі, що набігає на неоднорідність, та у розсіяному нею імпульсі відповідно; $u^0(\mathbf{x}, t)$ – зміщення у включенні; $W_\varepsilon = \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 \in W_0, 2|\alpha_2| \leq \varepsilon g(\alpha_1) = h(\alpha_1)\}$ – область, яку займає включення; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ – ортогональна система координат, зв'язана з серединною лінією включення W_0 за допомогою рівності $\mathbf{x} = \mathbf{r}(\alpha_1) + \alpha_2 \mathbf{n}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – декартові координати; $h(\alpha_1)$ – товщина неоднорідності; $\mathbf{r}(\alpha_1)$ – радіус-вектор кривої W_0 ; $\mathbf{n}(\alpha_1)$ – нормаль до W_0 ; \mathbf{n}^0 – зовнішня нормаль до ∂W_ε ; ε – малий безрозмірний параметр, що характеризує відносну товщину включення; t – час.

Використовуючи перетворення Фур'є за безрозмірним часом $\tau = tc/a$ (a – характерний розмір W_0 ; c – швидкість поперечних хвиль у матриці),

для визначення Фур'є-густини $u^s(\mathbf{x}, \omega)$ (ω – параметр перетворення Фур'є) розв'язку задачі (1), (2) отримуємо відповідну стаціонарну задачу. За допомогою методу зрощування асимптотичних розкладів [6] умови контакту (2) зносяться на середину лінії включення і набувають вигляду [4, 5]

$$u(\alpha_1, +0, \omega) = \frac{h(\alpha_1)}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} u(\alpha_1, +0, \omega), \quad u(\alpha_1, -0, \omega) = 0, \\ \alpha_1 \in W_0, \quad 0 \leq \gamma < \infty. \quad (3)$$

Використовуючи підхід, запропонований в [1], для зміщень $u^s(\mathbf{x}, \omega)$ у зоні Фраунгофера отримуємо співвідношення

$$u^s(\mathbf{x}, \omega) \approx \frac{a}{\sqrt{r}} \exp(i\omega r) f(\theta, \omega), \quad r \rightarrow \infty, \\ x_1 = -a r \sin \theta, \quad x_2 = a r \cos \theta, \\ f(\theta, \omega) = \frac{i}{4a} \sqrt{\frac{2}{\pi\omega}} \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\epsilon_m} i^{-m} (A_{\sigma m} - \operatorname{Re} b_{\sigma m}^1) C_{\sigma m}(\theta), \\ A_{\sigma m} = \sum_{\sigma'=1}^2 \sum_{m'=0}^{\infty} (x_{\sigma' m'}^1 \operatorname{Re} a_{\sigma m, \sigma' m'}^1 + x_{\sigma' m'}^2 \operatorname{Re} a_{\sigma m, \sigma' m'}^2),$$

де r, θ – безрозмірні полярні координати, а коефіцієнти $x_{\sigma m}^{\ell}$ – розв'язки системи лінійних алгебричних рівнянь безмежного порядку

$$\sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} (a_{\sigma m, \sigma' m'}^1 x_{\sigma' m'}^1 + a_{\sigma m, \sigma' m'}^2 x_{\sigma' m'}^2) = b_{\sigma m}^1, \\ \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} (a_{\sigma m, \sigma' m'}^3 x_{\sigma' m'}^1 + a_{\sigma m, \sigma' m'}^4 x_{\sigma' m'}^2) = b_{\sigma m}^2, \quad \sigma = 1, 2, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \\ a_{\sigma m, \sigma' m'}^1 = \int_{W_0} g(\theta) C_{\sigma' m'}(\theta) \frac{\partial}{\partial n} F_{\sigma m} ds - \gamma_1 \int_{W_0} C_{\sigma' m'}(\theta) F_{\sigma m} ds + \\ + a \int_{W_1} C_{\sigma' m'}(\theta) \frac{\partial F_{\sigma m}}{\partial n} ds, \\ a_{\sigma m, \sigma' m'}^2 = - \int_{W_1} C_{\sigma' m'}(\theta) F_{\sigma m} ds, \quad a_{\sigma m, \sigma' m'}^3 = a \int_{W_1} C_{\sigma' m'}(\theta) \frac{\partial}{\partial n} \operatorname{Re} F_{\sigma m} ds, \\ a_{\sigma m, \sigma' m'}^4 = - \int_W C_{\sigma' m'}(\theta) \operatorname{Re} F_{\sigma m} ds, \quad b_{\sigma m}^1 = - \int_{W_0} \frac{\partial u^i}{\partial n} F_{\sigma m} ds + \int_{W_0} u^i \frac{\partial F_{\sigma m}}{\partial n} ds, \\ b_{\sigma m}^2 = \int_{W_0} u^i \frac{\partial}{\partial n} \operatorname{Re} F_{\sigma m} ds,$$

$\gamma_1 = \gamma / \epsilon$; вирази для $C_{\sigma m}(\theta)$, $F_{\sigma m}$ та означення кривих W, W_1 наведено в роботі [1]. При виведенні цих співвідношень шукані функції на W_0 , враховуючи умови (3), подамо співвідношеннями

$$\frac{u^1(\theta) + u^i(\theta)}{g(\theta)} = \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} x_{\sigma m}^1 C_{\sigma m}(\theta), \\ \frac{\partial u^2(\theta)}{\partial n} = \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} x_{\sigma m}^2 C_{\sigma m}(\theta),$$

$$u^1 = u^s(\alpha_1, +0), \quad u^2 = u^s(\alpha_1, -0), \quad \theta, \alpha_1 \in W_0.$$

Обчислення ехо-сигналів проводимо методом Ромберга [3] за формулою

$$u_0(\theta, \tau_0) = \frac{\sqrt{r}}{a} u^s(r, \theta, \tau) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\omega_0} f(\theta, \omega) \exp(-i\omega\tau_0) d\omega,$$

$$\tau_0 = \tau - r, \quad r \gg 1,$$

значення ω_0 визначаємо з умови досягнення необхідної точності обчислення оберненого перетворення Фур'є.

При аналізі дифрагованих включенням сигналів приймали, що його серединна лінія задається у вигляді $(x_1/a)^2 + (x_2/b)^2 = 1$, $x_2 \geq 0$, $|x_1| \leq a$, а імпульс, що набігає на неоднорідність, має форму

$$u^i(\mathbf{x}, t) = a\varphi[\tau - (x_1 \sin \theta_i - x_2 \cos \theta_i) / a],$$

$$u^i(\mathbf{x}, \omega) = a\varphi(\omega) \exp[i\omega(x_1 \sin \theta_i - x_2 \cos \theta_i) / a],$$

де $\varphi(\tau)$ – модуляція імпульсу в часі, $\varphi(\tau) = 0$ при $\tau < 0$; $u^i(\mathbf{x}, \omega)$ та $\varphi(\omega)$ – Фур'є-густини величин $u^i(\mathbf{x}, \tau)$ та $\varphi(\tau)$ відповідно; θ_i – кут падіння хвилі. Приймалося, що $\varphi(\tau) = \sin(\omega_*\tau)$, $\tau < \tau_*$, $\varphi(\tau) = 0$, $\tau > \tau_*$ (квазімонохроматичний імпульс) та $\varphi(\tau) = p\tau^{n_*} \exp(-\alpha_*\tau)$, $\tau > 0$ (імпульс у формі слабкої ударної хвилі).

На рис. 1–3 зображено частотні залежності амплітуд розсіяння $u_0(\theta, \tau_0)$ сигналів, відбитих від лінійного жорстко підкріпленого включення. Припускалося, що імпульси набігають на пружне включення та на жорстке підкріплення відповідно при $\theta_i = 0$ та $\theta_i = \pi$. Криві 1 відповідають значенню $\gamma_1 = 0$ (випадок тонкого жорсткого включення, однією стороною відшарованого від матриці), криві 2 – $\gamma_1 = 4$, криві 3 – значенню $\gamma_1 = \infty$ (випадок тонкого жорсткого включення у пружній матриці).

Рис. 1 ілюструє випадок, коли включення є плоским ($\varepsilon_1 = b/a = 0$), $\theta_i = \theta = 0$, а на включення набігає імпульс у формі слабкої ударної хвилі ($p = 20$, $n_* = 2$, $\alpha_* = 10$, рис. 1а), або квазімонохроматичний імпульс ($\omega_* = 6$, $\tau_* = 1.04$, рис. 1б).

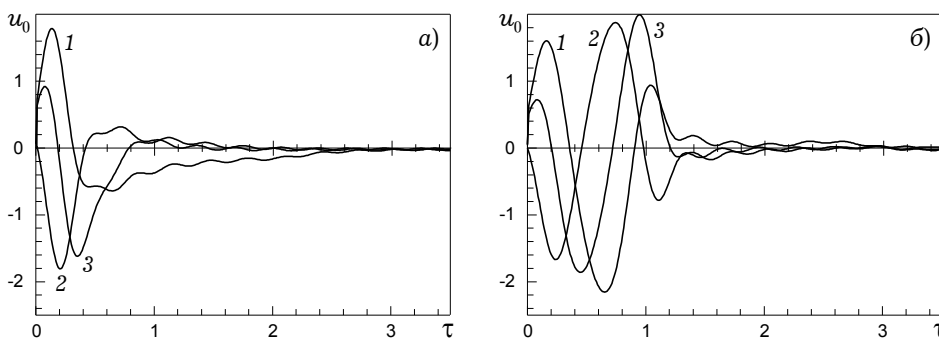


Рис. 1

Видно, що у випадку жорстко підкріпленої неоднорідності (на відміну від випадку ідеального контакту матриці та включення [2]) фаза ехо-сигналу міняється при незмінній максимальній амплітуді для різних модуляцій

набігаючого імпульсу. Причому основний вклад у хвильовий пакет відгуку вносить дзеркально відбитий сигнал. Такі ж висновки можна зробити тоді, коли $\varepsilon_1 = 1$, $\theta_1 = \theta = 0$, а на дефект падає квазімонохроматичний імпульс ($\omega_* = 6$, $\tau_* = 1.04$) (рис. 2). Порівнюючи результати, подані на рис. 1б та рис. 2, можна зробити висновок про зменшення амплітуд ехо-сигналів при збільшенні кривини серединної лінії неоднорідності.

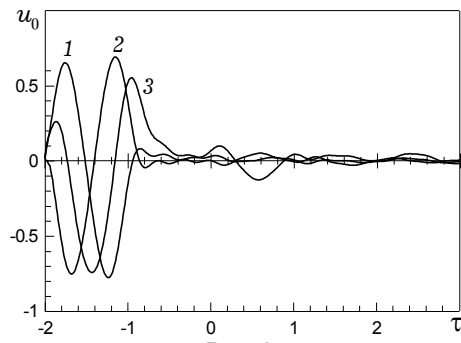


Рис. 2

Іншу картину спостерігаємо, коли імпульс $u^i(\mathbf{x}, \tau)$ набігає зі сторони жорсткого підкріплення ($\theta_1 = \theta = \pi$). На рис. 3 зображено сигнал, розсіяний лінійним включенням ($\varepsilon_1 = 0$, рис. 3а) та включенням у вигляді півкола ($\varepsilon_1 = 1$, рис. 3б). На дефект набігає вищеописаний квазімонохроматичний імпульс. Видно, що перевідбиті сигнали при крайніх значеннях $\gamma_1 = 0$ та $\gamma_1 = \infty$, а, отже, і при довільних значеннях γ_1 , співпадають. Таким чином, у випадку $\theta_1 = \theta = \pi$ механічні властивості неоднорідності не впливають на структуру хвильового пакету відгуку.

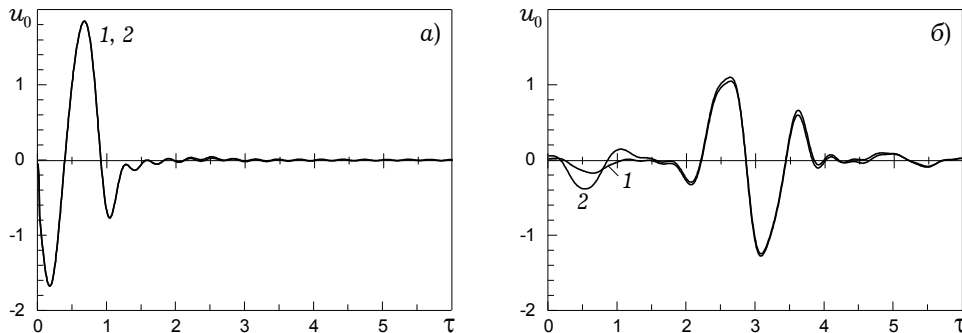


Рис. 3

Робота виконана за часткової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (Проект № 01.07.00133).

1. Кунець Я. І., Матус В. В., Пороховський В. В. Метод нульового поля в задачі розсіяння на тонкостінному пружному криволінійному включенні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 2. – С. 163–170.
2. Кунець Я. І., Матус В. В., Пороховський В. В. Розсіяння імпульсів пружних SH-хвиль на тонкостінному пружному криволінійному включенні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 4. – С. 150–154.
3. Нугул У. К., Метсавээр Я. А., Векслер Н. Д., Кутсер М. Э. Эхо-сигналы от упругих объектов. – Таллинн: Ин-т кибернетики АН ЭССР, 1974. – Т. 2. – 345 с.
4. Amari H., He S. Effective impedance boundary conditions for an inhomogeneous thin layer on a curved metallic surface // IEEE Trans. Antenn. Propagat. – 1998. – **46**. – P. 710–715.
5. Emets V. F., Kunets Ya. I. Effective boundary conditions for a thin curved layer with tips // Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory (DIPED-1999): Proc. 4th Int. Seminar/Workshop, L'viv, Sept. 20–23, 1999. – Lviv, 1999. – P. 152–157.
6. Maz'a V. G., Nazarov S. A., Plamenevsky B. A. Asymptotische theorie elliptischer randwertaufgaben in singlar gestorten gebieten. – Berlin: Acad. Verl., 1991. – Vol. 1. – 352 p.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЭХО-СИГНАЛОВ SH-ВОЛН ОТ ТОНКОСТЕННЫХ
УПРУГИХ ЖЕСТКО ПОДКРЕПЛЕННЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ**

С помощью интегрального преобразования Фурье по времени, метода согласования асимптотических разложений и метода нулевого поля исследовано задачу рассеяния импульсов SH-волн тонким упругим криволинейным включением, одна сторона которого жестко закреплена. Проанализированы особенности эхо-сигналов от таких включений в зависимости от их геометрических и механических параметров.

**INVESTIGATION OF ECHO-SIGNALS OF SH-WAVES FROM THIN-WALLED
ELASTIC RIGIDLY SUPPORTED INCLUSIONS**

A procedure is proposed to study the diffraction of pulses of elastic SH-waves by thin-walled elastic curvilinear inclusions with rigidly supported wall. The procedure is based on utilization of Fourier integral time transform, the method of matched asymptotic expansion and modified method of null-field.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
25.12.03