

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗМІШАНИХ ЗАДАЧ ПРО ФРИКЦІЙНИЙ КОНТАКТ ЗАПОВНЮВАЧА З ПРОРІЗНИМ ОБОЛОНКОВИМ ЕЛЕМЕНТОМ

Здійснено постановку змішаної задачі фрикційної взаємодії прорізної циліндричної оболонки з пружним заповнювачем, що характеризується наявністю зон проковзування та відлипання між контактуючими тілами. На основі числових результатів досліджено вплив геометричних розмірів, кількості розрізів оболонки та трибологічних і фізичних властивостей взаємодіючих тіл на ширину зони відлипання, характер розподілу контактної напруженості, жорсткість і міцність системи. Наведено оцінку діапазону застосовності простішої розрахункової моделі, яка не враховує наявності зони відлипання.

Дослідження напружено-деформованого стану оболонкових прорізних пружних елементів [2, 3] зводиться до постановки та розв'язання контактних задач про фрикційну взаємодію прорізних оболонок з деформівним заповнювачем. На підставі проведеного аналізу числових розв'язків таких задач встановлено, що при певних геометричних і фізичних характеристиках взаємодіючих тіл на поверхні їх спряження виникає зона відлипання оболонки від заповнювача. З метою розширення діапазону застосовності розробленої методики розрахунку прорізних оболонкових пружних елементів [3] у цій роботі сформульовано та розв'язано змішану задачу, яка характеризується наявністю на поверхні контакту зон проковзування і відлипання.

Розглянемо пружний циліндр радіуса R і довжини 2ℓ , який заповнює прорізну циліндричну оболонку товщини h . На торці пружного заповнювача через абсолютно жорсткі гладкі поршні передається зовнішнє навантаження F . Характер контактної взаємодії заповнювача та прорізної оболонки визначається законом сухого тертя. Напружено-деформований

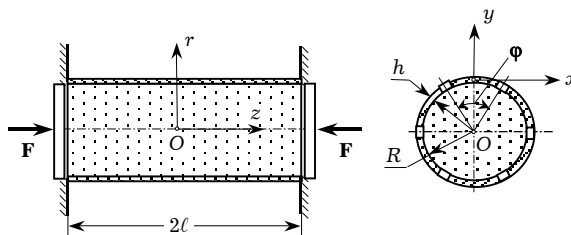


Рис. 1

стан прорізного пружного елемента досліджуємо в геометрично лінійній постановці, користуючись циліндричною системою координат $O r \theta z$ (рис. 1).

Приймаючи кількість розрізів оболонки достатньо великою, вважаємо, що заповнювач перебуває в умовах осесиметричної деформації. Вихідні співвідношення для заповнювача мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta = \sigma, \quad \tau_{r\zeta} = \frac{\tau r}{R}, \quad u_\zeta = u, \quad u_r = \frac{w r}{R}, \\ \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \frac{w}{R} = \frac{1}{E} [(1 - \nu)\sigma - \nu\sigma_\zeta], \quad \varepsilon_\zeta = \frac{1}{\ell} \frac{du}{d\zeta} = \frac{1}{E} [\sigma_\zeta - 2\nu\sigma], \\ \frac{d\sigma_\zeta}{d\zeta} + \frac{2\ell\tau}{R} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де σ_r , σ_ζ , σ_θ , $\tau_{r\zeta}$ – нормальні та дотичне напруження; σ , τ – нормальне та дотичне контактні напруження; u_ζ , u_r – осьове та радіальне переміщення; u , w – осьове та радіальне переміщення на поверхні контакту $r = R$;

$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}$ – деформації; $\zeta = z/\ell$ – безрозмірна осьова координата; E, ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу заповнювача.

Приймаємо, що прорізна оболонка складається з панелей, які зазнають плоского згину в радіальних площинах. Запишемо рівняння пружної лінії панелі, розглядаючи її як стержень з дугоподібною формою поперечного перерізу:

$$\frac{E_0 I_x}{\ell^4} \frac{d^4 w_0}{d\zeta^4} = -\sigma b, \quad \zeta \in [-1, 1], \quad (2)$$

де w_0 – прогин панелі; $b = 2R \sin(\varphi/2)$ – ширина панелі; $\varphi = 2\pi/N$, N – кількість розрізів; $E_0 I_x = E_0 h R^3 (\varphi + \sin \varphi - 8 \sin^2(\varphi/2)/\varphi)/2$ – жорсткість панелі на згин; E_0 – модуль Юнга матеріалу оболонки.

Фрикційну взаємодію прорізної оболонки і заповнювача при монотонному зовнішньому навантаженні системи моделюємо співвідношеннями одностороннього нормального контакту з урахуванням зони відлипання:

$$[w] = w_0 - w = 0, \quad \sigma < 0, \quad \zeta \in T', \quad T' = [-1, a] \cup [a, 1], \quad (3)$$

$$[w] > 0, \quad \sigma = 0, \quad \zeta \in T'', \quad T'' = (-a, a), \quad (4)$$

де $[w]$ – стрибок радіальних переміщень на контактній поверхні; T', T'' – області проковзування і відлипання відповідно; a – невідома безрозмірна координата точок їх поділу.

Закон тертя Кулона описує контактну взаємодію панелей і пружного заповнювача в зоні проковзування

$$\tau(\zeta) = f\sigma \operatorname{sgn} \zeta, \quad \zeta \in T', \quad (5)$$

де f – коефіцієнт тертя.

На торцях пружного заповнювача виконуються умови

$$\sigma_\zeta(\pm 1) = -p \equiv -\frac{F}{\pi R^2}. \quad (6)$$

Вважаємо, що панелі жорстко зацмлені на краях:

$$w_0(\pm 1) = 0, \quad \frac{dw_0(\pm 1)}{d\zeta} = 0. \quad (7)$$

Зі співвідношення (1) з урахуванням умови (6) знаходимо інтегральний вираз для радіальних переміщень заповнювача на поверхні контакту:

$$w(\zeta) = \frac{R}{E} \left\{ (1-\nu)\sigma(\zeta) - \nu \left[-p + \frac{\ell}{R} \int_{T'} \tau(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right] \right\}. \quad (8)$$

Загальний розв'язок задачі (2), (7) має вигляд

$$w_0(\zeta) = -\frac{\ell^4 b^4}{E_0 I_x} \int_{-1}^1 G(\zeta, \xi) \sigma(\xi) d\xi, \quad \zeta \in [-1, 1], \quad (9)$$

де

$$G(\zeta, \xi) = \frac{1}{24} - \frac{\xi^2}{8} + \left(\frac{\xi}{8} + \frac{\xi^3}{8} \right) \zeta - \left(\frac{\xi}{8} + \frac{\xi^2}{8} \right) \zeta^2 + \left(\frac{\xi}{8} - \frac{\xi^3}{24} \right) \zeta^3 + \frac{1}{12} (\xi - \zeta)^3 \operatorname{sgn}(\xi - \zeta),$$

$G(\zeta, \xi)$ – функція Гріна крайової задачі.

Прирівнюючи співвідношення (8) і (9) згідно з умовою (3) та враховуючи рівність (5), одержимо інтегральне рівняння відносно невідомого контактного напруження

$$\sigma_k(\zeta) + \int_{T'} \mathcal{K}(\xi, \zeta) \sigma_k(\xi) d\xi = -\frac{\nu}{1-\nu} p, \quad \zeta \in T', \quad (10)$$

де

$$\mathcal{K}(\xi, \zeta) = -\frac{\nu}{1-\nu} \ell f \operatorname{sgn} \zeta \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) + 4\mu^4 G(\zeta, \xi), \quad 4\mu^4 = \frac{1}{1-\nu} \frac{\ell^4 b}{R I_x} \frac{E}{E_0}.$$

Для визначення невідомих координат точок поділу зон проковзування та відлипання використаємо умову (4), яку запишемо у вигляді

$$\sigma(\pm a) = 0. \quad (11)$$

Розв'язок системи рівнянь (10), (11) одержано методом квадратур з використанням формули трапецій з рівномірною сіткою вузлів [1]. При числовій реалізації використано ітераційний алгоритм послідовних наближень масиву вузлових значень контактної напруженості і невідомих координат $\pm a$.

Розрахунки виконано для прорізного пружного елемента з такими параметрами: $h/R = 0.1$, $E/E_0 = 0.0001$, $\nu = 0.499$, $f = 0.3$. Кількість N розрізів оболонки та довжина ℓ системи варіюються.

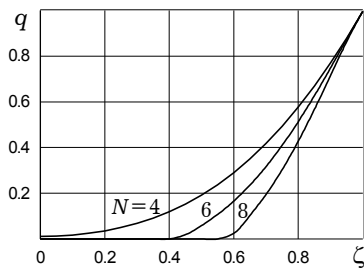


Рис. 2

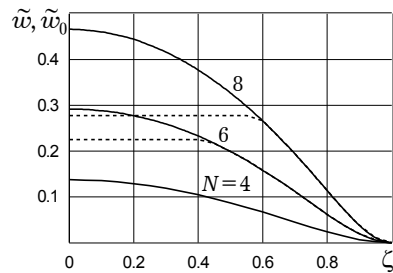


Рис. 3

На рис. 2 показано розподіл контактної напруженості $q = -\sigma/p$ по довжині системи для різної кількості розрізів оболонки ($N = 4, 6, 8$) при $\ell/R = 4.0$. Збільшення коефіцієнта тертя, кількості розрізів в оболонці та її довжини зумовлюють зменшення контактної напруженості до нуля в центральній частині пружного елемента та появу на поверхні спряження області відлипання. На розширення цієї області істотно впливає збільшення параметра μ , величина якого залежить від геометричних і фізичних характеристик контактуючих тіл.

На рис. 3 наведено розподіл безрозмірних радіальних переміщень бічної поверхні заповнювача $\tilde{w} = wE/(pR)$ (штриховими лініями) та панелей прорізної оболонки $\tilde{w}_0 = w_0E/(pR)$ (суцільними лініями). Невелика жорсткість панелей на згин у порівнянні з аналогічними за розмірами суцільними циліндричними оболонками зумовлює появу ефекту відлипання у прорізних пружних елементах. При збільшенні кількості розрізів оболонки внаслідок зменшення згинної жорсткості панелей область відлипання розширюється.

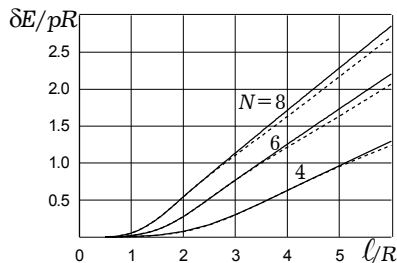


Рис. 4

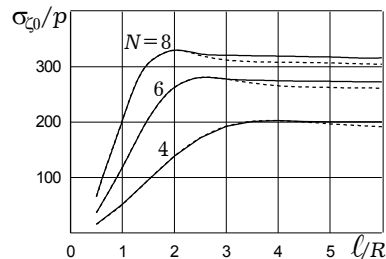


Рис. 5

На рис. 4, 5 наведено криві, які характеризують залежність безрозмірної осадки поршнів $\delta E/(pR)$, де $\delta = u(-1)$, і максимального напруження $\sigma_{\zeta \max}/p$ (у затисненні оболонки) від безрозмірної довжини оболонки ℓ/R . Штриховими лініями позначено «некоректні» результати, одержані згідно з постановкою задачі з роботи [3], у якій не враховано появи областей відлипання. Нехтування наявністю зон відлипання зумовлює заниження рівнів як максимальних напружень, так і переміщення поршнів. Однак відхилення складає 4–7%, тому в розглянутому діапазоні довжин для інженерного розрахунку нема потреби враховувати явище порушення контакту між прорізною оболонкою і заповнювачем.

Таким чином, наведені в цій роботі результати істотно розширюють область застосування раніше розглянутої простішої моделі [3].

1. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с.
2. Шона В. М., Величкович С. В., Шацький І. П., Попадюк І. І. Оболочечные упругие элементы: основы конструирования. – Львов, 1990. – 61 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т прикл. проблем механики и математики; № 21–88).
3. Шона В. М., Шацький І. П., Бедзір О. О. Фрикційна взаємодія прорізної циліндричної оболонки з пружним заповнювачем // Доп. АН України. – 1993. – № 8. – С. 70–73.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ФРИКЦИОННОГО КОНТАКТА ЗАПОЛНИТЕЛЯ С ПРОРЕЗНЫМ ОБОЛОЧЕЧНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

Сформулирована постановка смешанной задачи фрикционного взаимодействия прорезной цилиндрической оболочки с упругим заполнителем, которое характеризуется наличием зон проскальзывания и отлипания между контактирующими телами. На основании числовых результатов исследовано влияние геометрических размеров, количества разрезов оболочки, трибологических и физических свойств взаимодействующих тел на ширину зоны отлипания, характер распределения контактного напряжения, жесткость и прочность системы. Приведена оценка диапазона применимости более простой расчетной модели, которая не учитывает наличия зоны отлипания.

METHOD FOR SOLUTION OF MIXED PROBLEMS OF FRICTIONAL CONTACT OF FILLER WITH SLOTTED SHELL ELEMENT

*The statement for mixed problem of frictional interaction between a slotted cylindrical shell and elastic filler, which is characterized by the presence of slippage zones and separation of contacting bodies, is made. On the basis of numerical solutions the effect of mechanical, geometric and tribologic parameters of contacting pairs on the width of separation zone, nature of distribution of contact pressure, rigidity and strength of the system is investigated. The estimation of the range of applicability of a *simpler* computational model, which is constructed without the separation zone, is presented.*

Ин-т прикл. проблем механики і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
27.12.01