

**ПОЛЗУЧЕСТЬ ПОВРЕЖДАЕМЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК  
СЛОЖНОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ**

*Исследуются задачи ползучести повреждаемых пологих оболочек сложной формы в плане. Приведена вариационная постановка задачи на основе вариационного принципа в форме Лагранжа. Для деформаций ползучести использованы определяющие соотношения, учитывающие различные свойства материала при растяжении, сжатии и сдвиге. Метод решения нелинейной задачи ползучести основан на применении теории R-функций, метода Рунге и метода Рунге – Кутты – Мерсона. Представлены результаты расчетов ползучести оболочки сложной геометрической формы.*

При ползучести, вплоть до момента разрушения, в материале происходит рост и накопление повреждений – микротрещин, в результате чего первоначально изотропный материал приобретает деформационную анизотропию свойств. Микротрещины чаще всего возникают на тех гранях кристаллов, которые более или менее перпендикулярны к направлению действия наибольшего положительного главного напряжения [3, 5–7]. В случае одноосного растяжения наблюдается образование и развитие микротрещин, ориентированных перпендикулярно растягивающему усилию, а при одноосном сжатии происходит закрытие микротрещин, нормальных к направлению сжатия, и развитие микротрещин – в направлении сжимающего усилия. В связи с этим повреждения в телах могут быть активными (открытые микротрещины) и пассивными (закрытые микротрещины) [6]. Закрытые микротрещины не влияют на деформацию ползучести. Очевидно, что состояние микротрещины меняется, если меняется знак нормальных к ее плоскости напряжений, т. е. зависит от вида нагружения.

Процессы ползучести и повреждаемости протекают одновременно и оказывают взаимное влияние друг на друга. Выбор системы дефектов в виде плоских микротрещин, ориентированных в зависимости от направления максимального главного напряжения, позволяет описывать характерную особенность повреждаемых материалов – неодинаковую сопротивляемость растяжению, сжатию и сдвигу в условиях ползучести. Разносопротивляемость при ползучести присуща большинству легких сплавов, композиционным материалам, полимерам и т. д.

Предлагаемая статья посвящена расчетам на ползучесть пологих повреждаемых оболочек сложной формы. В постановке задачи используются определяющие соотношения инкрементального типа [4], учитывающие различные свойства материала при растяжении, сжатии и сдвиге, деформационную анизотропию свойств, а также различное развитие повреждаемости при растяжении, сжатии и сдвиге. В качестве метода решения нелинейной задачи ползучести применяется вариационно-структурный метод в комбинации с методом Рунге – Кутты – Мерсона.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат  $Ox_1x_2z$  тонкую изотропную пологую оболочку толщиной  $h$  произвольной формы  $\Omega$  в плане. Ось  $Oz$  перпендикулярна плану оболочки. Температура постоянная. Оболочка нагружена поперечной нагрузкой  $q_z = q_z(x_1, x_2)$ .

Тензор скоростей полных деформаций складывается из тензоров скоростей упругих деформаций и скоростей деформаций ползучести:  $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{p}_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ . Точка над символом обозначает производную по времени.

В общем случае задача ползучести для произвольного тела объемом  $V$  в момент времени  $t \neq 0$  может быть сведена к задаче минимизации функционала относительно кинематически возможных скоростей перемещений [3]:

$$I(\dot{u}_i) = \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{p}_{ij})(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{p}_{kl}) dV - \int_{S_2} \dot{P}_i \dot{u}_i dS, \quad (1)$$

где  $\dot{u}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , – скорости перемещений;  $\dot{\epsilon}_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , – тензор скоростей полных деформаций;  $C_{ijkl}$ ,  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ , – тензор упругих постоянных;  $\dot{P}_i$  – скорости поверхностных нагрузок, действующих на поверхности  $S_2$ ; скорости деформаций ползучести  $\dot{p}_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , заданы и не варьируются.

С учетом гипотез Кирхгофа – Лява функционал (1) для тонкой полой оболочки имеет вид

$$\begin{aligned} I(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{w}) = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \{ A_1 [\dot{u}_{1,1}^2 + \dot{u}_{2,2}^2 + \dot{w}^2 (k_1^2 + k_2^2) + 2\dot{w}(k_1 \dot{u}_{1,1} + k_2 \dot{u}_{2,2})] + \\ & + 2A_2 [\dot{u}_{1,1} \dot{u}_{2,2} + \dot{w}(k_1 \dot{u}_{2,2} + k_2 \dot{u}_{1,1}) + k_1 k_2 \dot{w}^2] + A_3 (\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1}) - \\ & - 2B_1 [\dot{u}_{1,1} \dot{w}_{,11} + \dot{u}_{2,2} \dot{w}_{,22} + \dot{w}(k_1 \dot{w}_{,11} + k_2 \dot{w}_{,22})] - \\ & - 2B_2 [\dot{u}_{1,1} \dot{w}_{,22} + \dot{u}_{2,2} \dot{w}_{,11} + \dot{w}(k_1 \dot{w}_{,22} + k_2 \dot{w}_{,11})] - 2B_3 \dot{w}_{,12} (\dot{u}_{1,2} + \\ & + \dot{u}_{2,1}) + D_1 (\dot{w}_{,11}^2 + \dot{w}_{,22}^2) + 2D_2 \dot{w}_{,11} \dot{w}_{,22} + D_3 \dot{w}_{,12}^2 \} dx_1 dx_2 - \\ & - \iint_{\Omega} [\dot{N}_{11}^c \dot{u}_{1,1} + \dot{N}_{22}^c \dot{u}_{2,2} + \dot{N}_{12}^c (\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1}) - \dot{M}_{11}^c \dot{w}_{,11} - \dot{M}_{22}^c \dot{w}_{,22} - \\ & - 2\dot{M}_{12}^c \dot{w}_{,12}] dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} (\dot{q}^c + \dot{q}_z) \dot{w} dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\dot{u}_1(x_1, x_2, t)$ ,  $\dot{u}_2(x_1, x_2, t)$ ,  $\dot{w}(x_1, x_2, t)$  – скорости перемещений точек координатной поверхности оболочки вдоль осей  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Oz$  соответственно;  $k_1$ ,  $k_2$  – главные кривизны координатной поверхности оболочки; нижние индексы после запятой означают дифференцирование по соответствующей координате;

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} dz, & A_2 &= \nu A_1, & A_3 &= \int_{(h)} G dz, \\ B_1 &= \int_{(h)} \frac{Ez}{1-\nu^2} dz, & B_2 &= \nu B_1, & B_3 &= 2 \int_{(h)} Gz dz, \\ D_1 &= \int_{(h)} \frac{Ez^2}{1-\nu^2} dz, & D_2 &= \nu D_1, & D_3 &= 4 \int_{(h)} Gz^2 dz, \\ \dot{N}_{11}^c &= \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{p}_{11} + \nu \dot{p}_{22}) dz, & \dot{N}_{22}^c &= \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{p}_{22} + \nu \dot{p}_{11}) dz, \\ \dot{N}_{12}^c &= 2 \int_{(h)} G \dot{p}_{12} dz, & \dot{M}_{11}^c &= \int_{(h)} \frac{Ez}{1-\nu^2} (\dot{p}_{11} + \nu \dot{p}_{22}) dz, \\ \dot{M}_{22}^c &= \int_{(h)} \frac{Ez}{1-\nu^2} (\dot{p}_{22} + \nu \dot{p}_{11}) dz, & \dot{M}_{12}^c &= 2 \int_{(h)} G \dot{p}_{12} z dz, \\ \dot{q}^c &= \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} [k_1 (\dot{p}_{11} + \nu \dot{p}_{22}) + k_2 (\dot{p}_{22} + \nu \dot{p}_{11})] dz, \end{aligned} \quad (3)$$

$E, G, \nu$  – модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала оболочки.

Для скоростей перемещений должны быть заданы кинематические граничные условия, которые являются главными для функционала (2). Рассмотрим некоторые из них:

– жесткая заделка

$$\dot{w} = 0, \quad \dot{w}_{,n} = 0, \quad \dot{u}_n = 0, \quad \dot{u}_\tau = 0; \quad (4)$$

– шарнир, неподвижный в тангенциальном направлении,

$$\dot{w} = 0, \quad \dot{u}_\tau = 0; \quad (5)$$

– неподвижный шарнир

$$\dot{w} = 0, \quad \dot{u}_n = 0, \quad \dot{u}_\tau = 0. \quad (6)$$

Здесь  $\dot{u}_n = \dot{u}_1 n_1 + \dot{u}_2 n_2$ ,  $\dot{u}_\tau = \dot{u}_2 n_1 - \dot{u}_1 n_2$ ,  $\dot{w}_{,n} = \dot{w}_{,1} n_1 + \dot{w}_{,2} n_2$ ;  $n_1, n_2$  – направляющие косинусы внешней нормали  $\mathbf{n}$  к контуру  $\partial\Omega$ .

Для деформаций ползучести возьмем определяющие соотношения инкрементального типа, предложенные в работе [4]:

$$\dot{p}_{k\ell} = \sigma_e^m \Psi^{-\beta} \left( \frac{\Psi_*}{\Psi_* - \Psi} \right)^q \left( \frac{C\sigma_{k\ell} + AI_1 \delta_{k\ell}}{\sigma_2} + B e_k e_\ell \right), \quad k, \ell = 1, 2. \quad (7)$$

Здесь  $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$  – единичный вектор, характеризующий ориентацию параллельных микротрещин;  $\delta_{k\ell}$  – символ Кронекера;  $\Psi$  – скалярный параметр повреждаемости;  $A, B, C, m, \beta, q$  – постоянные материала;  $\sigma_e$  – эквивалентное напряжение:

$$\sigma_e = \sigma_2 + B\sigma_{k\ell} e_k e_\ell, \quad (8)$$

где  $\sigma_2^2 = AI_1^2 + CI_2$ ,  $I_1 = \sigma_{k\ell} \delta_{k\ell}$ ,  $I_2 = \sigma_{k\ell} \sigma_{k\ell}$ .

В качестве параметра повреждаемости выберем удельную энергию диссипации

$$\Psi = \int_0^t \sigma_{k\ell} \dot{p}_{k\ell} dt. \quad (9)$$

Предельное значение параметра повреждаемости  $\Psi_*$  соответствует времени скрытого разрушения  $t = t_*$  и находится из экспериментальных данных.

Подставив (7) в (9), получим следующее уравнение для  $\Psi$ :

$$\dot{\Psi} = \sigma_e^{m+1} \Psi^{-\beta} \left( \frac{\Psi_*}{\Psi_* - \Psi} \right)^q. \quad (10)$$

Для нахождения постоянных материала необходимо иметь данные базовых экспериментов для одноосного растяжения, одноосного сжатия и чистого кручения образцов материала. Пусть для растяжения, сжатия и кручения установлены зависимости

$$\begin{aligned} \dot{p}_{11} &= K_+ \sigma_{11}^m \Psi^{-\beta} \left( \frac{\Psi_*}{\Psi_* - \Psi} \right)^q, & \Psi &= \sigma_{11} p_{11}, \\ \dot{p}_{11} &= -K_- |\sigma_{11}|^m \Psi^{-\beta} \left( \frac{\Psi_*}{\Psi_* - \Psi} \right)^q, & \Psi &= \sigma_{11} p_{11}, \\ 2\dot{p}_{12} &= K_0 \sigma_{12}^m \Psi^{-\beta} \left( \frac{\Psi_*}{\Psi_* - \Psi} \right)^q, & \Psi &= 2\sigma_{12} p_{12}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $K_+, K_-, K_0, m, \beta, q$  – константы материала.

Предположим, что микротрещины перпендикулярны к направлению действия наибольшего главного напряжения. Тогда из уравнений (7), (9) для растяжения, сжатия и сдвига будем иметь

$$\begin{aligned}\dot{p}_{11} &= (\sqrt{A+C} + B)^{m+1} \sigma_{11}^m \Psi^{-\beta} \left( \frac{\Psi_*}{\Psi_* - \Psi} \right)^q, & \Psi &= \sigma_{11} p_{11}, \\ \dot{p}_{11} &= -(\sqrt{A+C})^{m+1} |\sigma_{11}|^m \Psi^{-\beta} \left( \frac{\Psi_*}{\Psi_* - \Psi} \right)^q, & \Psi &= \sigma_{11} p_{11}, \\ 2\dot{p}_{12} &= (\sqrt{2C} + B)^{m+1} \sigma_{12}^m \Psi^{-\beta} \left( \frac{\Psi_*}{\Psi_* - \Psi} \right)^q, & \Psi &= 2\sigma_{12} p_{12}.\end{aligned}\quad (12)$$

Попарно сравнивая правые части уравнений (11) и (12), получим уравнения

$$\begin{aligned}(\sqrt{A+C} + B)^{m+1} &= K_+, & (\sqrt{A+C})^{m+1} &= K_-, \\ (\sqrt{2C} + B)^{m+1} &= K_0,\end{aligned}\quad (13)$$

откуда найдем параметры материала:

$$\begin{aligned}B &= K_+^{1/(m+1)} - K_-^{1/(m+1)}, & C &= \frac{1}{2}(K_0^{1/(m+1)} - B)^2, \\ A &= K_-^{2/(m+1)} - C.\end{aligned}\quad (14)$$

Уравнения (7) в совокупности с уравнением повреждаемости (10) описывают ползучесть материала с независимыми характеристиками на растяжение, сжатие и кручение, деформационную анизотропию свойств, а также различное развитие повреждаемости при растяжении, сжатии и кручении.

Если в результате базовых экспериментов установлено, что

$$K_- = K_+, \quad K_0 = 3^{(m+1)/2} K_+, \quad (15)$$

то из (14) будем иметь

$$C = \frac{3}{2} K_+^{2/(m+1)}, \quad B = 0, \quad A = -\frac{1}{3} C.$$

В этом случае эквивалентное напряжение будет зависеть от интенсивности напряжений:  $\sigma_e = \sqrt{\frac{2}{3} C} \sigma_i$ , а определяющие соотношения примут вид

$$\dot{p}_{k\ell} = \sigma_e^m \Psi^{-\beta} \left( \frac{\Psi_*}{\Psi_* - \Psi} \right)^q \sqrt{\frac{3}{2} C} \frac{s_{k\ell}}{\sigma_i}, \quad k, \ell = 1, 2, \quad (16)$$

где  $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2}$ ;  $s_{k\ell} = \sigma_{k\ell} - \frac{1}{3} \delta_{k\ell}(\sigma_{nn})$ ,  $n = 1, 2$ .

Соотношения (16) соответствуют традиционному изотропному материалу, «нечувствительному» к виду нагружения.

**2. Метод решения.** Процесс решения задачи ползучести включает два основных этапа. На первом этапе решаем задачу мгновенного деформирования и определяем начальные условия для искомых функций в момент времени  $t = 0$ . При этом полагаем, что в начальный момент времени присутствуют только упругие деформации. Для решения упругой задачи можно использовать функционал в форме (2), заменив скорости входящих в него функций самими функциями и отбросив добавки, связанные с ползучестью.

На втором этапе решаем задачу ползучести. Запишем задачу Коши по времени для основных неизвестных в произвольной точке оболочки:

$$\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt} &= \dot{u}_1, & \frac{du_2}{dt} &= \dot{u}_2, & \frac{dw}{dt} &= w, & \frac{d\varepsilon_{11}}{dt} &= \dot{u}_{1,1} + k_1 \dot{w} - z \dot{w}_{,11}, \\
\frac{d\varepsilon_{22}}{dt} &= \dot{u}_{2,2} + k_2 \dot{w} - z \dot{w}_{,22}, & \frac{d\gamma_{12}}{dt} &= \dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1} - 2z \dot{w}_{,12}, \\
\frac{dp_{11}}{dt} &= \dot{p}_{11}, & \frac{dp_{22}}{dt} &= \dot{p}_{22}, & \frac{dp_{12}}{dt} &= \dot{p}_{12}, \\
\frac{d\sigma_{11}}{dt} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\dot{u}_{1,1} + \nu \dot{u}_{2,2} + \dot{w}(k_1 + \nu k_2) - z(\dot{w}_{,11} + \nu \dot{w}_{,22}) - (\dot{p}_{11} + \nu \dot{p}_{22})], \\
\frac{d\sigma_{22}}{dt} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\dot{u}_{2,2} + \nu \dot{u}_{1,1} + \dot{w}(k_2 + \nu k_1) - z(\dot{w}_{,22} + \nu \dot{w}_{,11}) - (\dot{p}_{22} + \nu \dot{p}_{11})], \\
\frac{d\sigma_{12}}{dt} &= G(\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1} - 2z \dot{w}_{,12} - 2\dot{p}_{12}), & \frac{d\Psi}{dt} &= \sigma_e^{m+1} \Psi^{-\beta} \left( \frac{\Psi_*}{\Psi_* - \Psi} \right)^q. \quad (17)
\end{aligned}$$

Систему (17) можно записать в виде

$$\frac{dG_k}{dt} = F_k(t, G_\ell), \quad k = 1, 2, \dots, 13,$$

где  $\mathbf{G} = \{u_i, w, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, p_{ij}, \Psi\}$ ,  $i, j = 1, 2$ , – вектор искомых функций.

Интегрирование задачи Коши будем выполнять с помощью метода Рунге – Кутты – Мерсона с автоматическим выбором шага по времени [1]. При этом шаг по времени  $\Delta t$  выбираем, исходя из условия неперевышения максимальной погрешностью метода некоторой заданной величины ( $\delta \leq \delta_0$ ).

Значения искомых функций в момент времени  $t = t_0 + \Delta t$  вычисляем по формуле

$$G_k(t_0 + \Delta t) = G_k(t_0) + \frac{1}{2} (r_1^{(k)} + 4r_4^{(k)} + r_5^{(k)}), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned}
r_1^{(k)} &= \frac{\Delta t}{3} F_k(t_0, G_j(t_0)), & r_2^{(k)} &= \frac{\Delta t}{3} F_k\left(t_0 + \frac{\Delta t}{3}, G_j(t_0) + r_1^{(j)}\right), \\
r_3^{(k)} &= \frac{\Delta t}{3} F_k\left(t_0 + \frac{\Delta t}{3}, G_j(t_0) + \frac{1}{2}(r_1^{(j)} + r_2^{(j)})\right), \\
r_4^{(k)} &= \frac{\Delta t}{3} F_k\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}, G_j(t_0) + \frac{3}{8}(r_1^{(j)} + 3r_3^{(j)})\right), \\
r_5^{(k)} &= \frac{\Delta t}{3} F_k\left(t_0 + \Delta t, G_j(t_0) + \frac{3}{2}(r_1^{(j)} - 3r_3^{(j)} + 4r_4^{(j)})\right). \quad (19)
\end{aligned}$$

Погрешности вычисления искомых функций на каждом шаге рассчитываем по формуле  $\delta_k = r_1^{(k)} - \frac{9}{2} r_3^{(k)} + 4r_4^{(k)} - \frac{1}{2} r_5^{(k)}$ . Начальный шаг по времени  $\Delta t_n$  устанавливаем предварительно, а затем выбор шага  $\Delta t$  осуществляем по следующему правилу: если  $\delta > \delta_0$ , то шаг уменьшается в два раза и вычисления повторяются; если  $\delta < \delta_0/32$ , то шаг увеличивается в два раза. Этот метод для вычисления правых частей уравнений (19) требует пятикратного решения линеаризованных краевых задач на каждом шаге.

Решение краевых задач, возникающих на каждом этапе, будем осуществлять вариационно-структурным методом (методом  $R$ -функций), который позволяет представить приближенное решение краевой задачи в виде формулы – структуры решения, точно удовлетворяющей заданным граничным условиям [2]:

$$\mathbf{u} = B(\Phi_i, \omega).$$

Здесь  $\mathbf{u}$  – вектор неизвестных (в нашем случае  $\mathbf{u} = (\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{w})$ );  $\Phi_i$  – неопределенные компоненты, которые при численной реализации представляются в виде

$$\Phi_i(x) \approx \Phi_{iN}(x) = \sum_{k=1}^N C_k^{(i)} \varphi_k(x), \quad x = (x_1, x_2),$$

где  $C_k^{(i)}$  – неопределенные коэффициенты;  $\{\varphi_k\}$  – некоторая полная система функций [2]; функция  $\omega(x)$  строится с помощью теории  $R$ -функций и удовлетворяет условиям [2]

$$\begin{aligned} \omega(x) &= 0, & |\omega_{,n}| &= 1, & x &\in \partial\Omega, \\ \omega(x) &> 0, & x &\in \Omega. \end{aligned} \quad (20)$$

Второе из условий (20) является условием нормализованности функции  $\omega(x)$  до первого порядка.

Можно показать, что структуры решения для условий (4)–(6) будут следующими:

– жесткая заделка

$$\dot{w} = \omega^2 \Phi_1, \quad \dot{u}_1 = \omega \Phi_2, \quad \dot{u}_2 = \omega \Phi_3; \quad (21)$$

– шарнир, неподвижный в тангенциальном направлении,

$$\dot{w} = \omega \Phi_1, \quad \dot{u}_1 = \omega_{,1} \Phi_2 + \omega \Phi_3, \quad \dot{u}_2 = \omega_{,2} \Phi_2 + \omega \Phi_4; \quad (22)$$

– неподвижный шарнир

$$\dot{w} = \omega \Phi_1, \quad \dot{u}_1 = \omega \Phi_2, \quad \dot{u}_2 = \omega \Phi_3. \quad (23)$$

**3. Численные результаты.** В качестве примера рассмотрим ползучесть полой сферической панели с эллиптическими вырезами посередине каждой из сторон (рис. 1). Оболочка находится под действием равномерно распределенной нагрузки  $|q_z| = 16$  МПа. Основные размеры:  $a = 0.04$  м, толщина оболочки  $h = 0.008$  м. Главные кривизны  $k_1 = k_2 = 10.0 \text{ м}^{-1}$ . Материал панели – алюминиевый сплав АК4-1Т. Температура  $T = 473$  К. Условия закрепления – неподвижный в тангенциальном направлении шарнир (см. условия (5)). Упругие константы:  $E = 60$  ГПа,  $\nu = 0.35$ . Постоянные материала при ползучести [4]:  $K_+ = 5.5 \cdot 10^{-23} \text{ МПа}^{-m} \text{ ч}^{-1}$ ,  $K_- = 2.25 \cdot 10^{-23} \text{ МПа}^{-m} \text{ ч}^{-1}$ ,  $K_0 = 11.36 \cdot 10^{-21} \text{ МПа}^{-m} \text{ ч}^{-1}$ ,  $\beta = 0$ ,  $m = 8$ ,  $q = 3$ . Критическое значение параметра повреждаемости зависит от вида напряженного состояния [4]:

$$\psi_* = \sigma_i^2 (a_* - b_* I_1), \quad (24)$$

где  $a_* = 4 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}$ ,  $b_* = 4 \cdot 10^{-7} \text{ МПа}^{-2}$ .

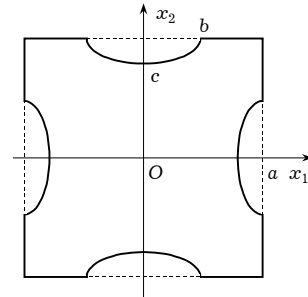


Рис. 1

Нормализованное до первого порядка уравнение границы области  $\Omega$  имеет вид

$$\omega(x) = [(F_1 \wedge_0 F_2) \wedge_0 (F_3' \wedge_0 F_4')] \wedge_0 (F_5' \wedge_0 F_6') = 0. \quad (25)$$

Здесь

$$F_\ell' = F_\ell [F_\ell^2 + (\text{grad } F_\ell)^2]^{-1/2}, \quad \ell = 3, 4, 5, 6, \quad (26)$$

$$F_1 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_2^2), \quad F_2 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_1^2), \quad F_3 = \frac{x_1^2}{b_1^2} + \frac{(x_2 - a)^2}{b_2^2} - 1,$$

$$F_4 = \frac{x_1^2}{b_1^2} + \frac{(x_2 + a)^2}{b_2^2} - 1, \quad F_5 = \frac{x_2^2}{b_1^2} + \frac{(x_1 - a)^2}{b_2^2} - 1,$$

$$F_6 = \frac{x_2^2}{b_1^2} + \frac{(x_1 + a)^2}{b_2^2} - 1,$$

$$b_1 = b = 0.02 \text{ м}, \quad b_2 = a - c = 0.01 \text{ м}.$$

Символ  $\wedge_0$  обозначает операцию  $R$ -конъюнкции [2]:

$$f_1 \wedge_0 f_2 = f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2}.$$

По формуле (26) осуществляется нормализация уравнения эллипса.

Для решения задачи использовалась структура решения (22). В качестве  $\{\varphi_k\}$  были выбраны степенные полиномы. Интегрирование по области  $\Omega$  и по толщине оболочки проводилось с помощью квадратур Гаусса. При решении учитывалась симметрия задачи. В ходе численного эксперимента установлено, что стабилизация приближенного решения достигается при следующих значениях степеней полиномов:  $N = 12$  – для  $\Phi_1, \Phi_2$ ;  $N = 7$  – для  $\Phi_3, \Phi_4$  и общем числе узлов интегрирования по четверти области, равном 288. Количество узлов интегрирования по толщине равнялось 10. Заданная погрешность метода Рунге – Кутты – Мерсона  $\delta_0 = 0.01$ .

Неопределенные коэффициенты структуры решения  $C_k^{(i)}$  находили методом Ритца.

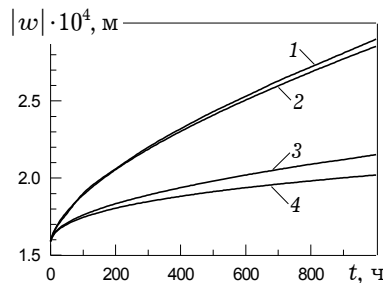


Рис. 2

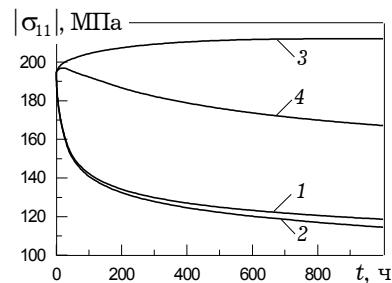


Рис. 3

Расчеты проводились с учетом и без учета разнотолщинности. На рис. 2–4 показано изменение во времени прогибов, нормальных напряжений и параметра повреждаемости на внутренней поверхности в центре оболочки. Кривые 1, 2 соответствуют данным, полученным на основе определяющих соотношений (16) с характеристиками на растяжение для поперечных нагрузок  $q_z = -16$  МПа и

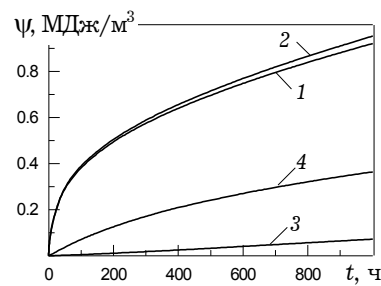


Рис. 4

$q_z = 16$  МПа; кривые 3, 4 получены на основе учитывающих разносопротивляемость соотношений (7) для  $q_z = -16$  МПа и  $q_z = 16$  МПа соответственно. В обоих случаях критическое значение параметра повреждаемости определяли по формуле (24).

Анализ результатов показывает, что расчет по традиционным соотношениям приводит к существенному завышению значений прогибов и параметра повреждаемости. Из приведенных графиков также следует, что при учете разносопротивляемости существенное влияние на результат, в особенности для параметра повреждаемости, оказывает направление внешней приложенной нагрузки.

Комплекс компьютерных программ, реализующий предложенный метод расчета, выполнен на языке C++ и обладает возможностями для автоматизации расчетов и проведения численного эксперимента при расчетах ползучести тонкостенных элементов конструкций сложной геометрической формы.

1. Золочевський О. О., Склепус С. М. Повзучість пошкоджуваних пластин складної форми // *Машинознавство*. – 2000. – № 9(39). – С. 3–7.
2. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
3. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
4. Betten J., Sklepuc S., Zolochovsky A. A creep damage model for initially isotropic materials with different properties in tension and compression // *Eng. Fract. Mech.* – 1998. – 59, No. 5. – P. 623–641.
5. Johnson A. E., Henderson J., Mathur V. D. Combined stress creep fracture of a commercial cooper at 250 deg centirgade // *Engineer.* – 1956. – No. 8. – P. 261–265.
6. Krajcinovich D. *Damage mechanics*. – Amsterdam: Elsevier, 1996. – 761 p.
7. McLean D. A note on the metallography of cracking during creep // *J. Metals.* – 1957. – 85. – P. 468–472.

#### ПОВЗУЧІСТЬ ПОШКОДЖУВАНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК СКЛАДНОЇ ФОРМИ В ПЛАНІ

*Досліджується повзучість пошкоджуваних пологих оболонок складної форми в плані. Наведено варіаційну постановку задачі на основі варіаційного принципу в формі Лагранжа. Для деформацій повзучості використано визначальні співвідношення, які описують різні властивості матеріалу при розтязі, стиску та зсуві. Метод розв'язування нелінійної задачі повзучості базується на застосуванні теорії R-функцій, методу Рітца та методу Рунге – Кутта – Мерсона. Наведено результати розрахунку повзучості оболонки складної геометричної форми.*

#### CREEP OF DAMAGED SHALLOW SHELLS WITH COMPLEX FORM OF PLAN

*A creep problem for damaged shallow shells with complex form of plan is investigated. The statement of creep problem, based on the Lagrange variational principle, is given. The constitutive equations, which describe different material properties in tension, compression and torsion, are used for creep strain. The R-function theory, Ritz method and the Runge – Kutta – Merson method have been used for procedure of solution. The numerical results for creep behavior of a shell with complex form are presented.*

<sup>1</sup>Норв. ун-т науки и технол., Трондхейм, Норвегия,

<sup>2</sup>Ин-т проблем машиностроения  
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Получено  
18.04.02