УДК 539.3

В. І. Лавренюк, М. В. Лавренюк

ПОБУДОВА ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА НА ОСНОВІ ПОТЕНЦІАЛУ ЛЕННАРДА – ДЖОНСА

Побудовано фундаментальні розв'язки для отриманої Л. П. Хорошуном системи рівнянь у переміщеннях для середовищ, частинки яких взаємодіють за законом Леннарда – Джонса. Розв'язки отримано з використанням прямого та оберненого перетворень Фур'є узагальнених функцій. Причому одержані для тривимірного та двовимірного випадків розв'язки містять як доданки типу розв'язків Кельвіна, так і доданки, які безпосередньо враховують взаємодію частинок за законом Леннарда – Джонса.

У роботі [3] Л. П. Хорошуном запропоновано новий підхід до побудови континуальної моделі суцільного середовища, в основу якого покладено принцип «згладжування» рівнянь руху окремої частинки, яка взаємодіє з оточуючими частинками за законом Леннарда – Джонса.

У цій роботі для просторового та плоского випадків побудовано фундаментальні розв'язки системи рівнянь у переміщеннях для таких середовищ. Для цього використано інтегральне перетворення Фур'є у рамках теорії узагальнених функцій.

Рівняння рівноваги суцільного середовища, побудовані Л. П. Хорошуном [3] на основі потенціалу Леннарда – Джонса, мають вигляд

$$\mu u_{i,rr} + (\lambda + \mu) u_{i,ri} - \gamma u_{i,rrpp} - æ u_{i,rppi} + X_i = 0 . \qquad (1)$$

Фундаментальними розв'язками системи рівнянь (1), які позначимо через $G_i^{\ell}(x,\xi)$, є переміщення в точці x_i, зумовлені одиничною силою $\delta_{i\ell}\delta(x-\xi)$ у напрямку осі x_i, прикладеною у точці ξ в напрямку осі x_ℓ у нескінченному континуумі з характеристиками μ, λ, γ, $æ$.

Легко переконатися, що диференціальний оператор правої частини (1) є самоспряженим. Тому система рівнянь для отримання фундаментальних розв'язків матиме такий вигляд:

$$\mu G_{i,rr}^{\ell}(x,\xi) + (\lambda+\mu) G_{r,ri}^{\ell}(x,\xi) - \gamma G_{i,rrpp}^{\ell}(x,\xi) -$$
$$- æ G_{r,rppi}^{\ell}(x,\xi) + \delta_{i\ell}\delta(x-\xi) = \delta_{i\ell} . \qquad (2)$$

Тут і надалі індекси i, r, p, ℓ набувають значень 1, 2, 3 для тривимірного випадку та 1, 2 – для двовимірного випадку.

Для спрощення викладок розглянемо випадок, коли одинична сила прикладена у початку координат, і потрібні розв'язки одержимо паралельним перенесенням на вектор ξ.

Для випадку $\xi = 0$ виконаємо інтегральне перетворення Фур'є за формулами

$$F(G_i^{\ell}(x)) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \int G_i^{\ell}(x) e^{i\alpha_p x_p} \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 .$$

Враховуючи, що

$$F(G_{i,p}^{\ell}(x)) = - i \, \alpha_p F(G_i^{\ell}(x)) , \qquad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{i\alpha_p x_p} \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = 1 , \qquad (4)$$

одержимо в просторі зображень таку систему алгебричних рівнянь:

$$-\mu F(G_i^\ell)\alpha_r\alpha_r-(\lambda+\mu)F(G_r^\ell)\alpha_i\alpha_r-\gamma F(G_i^\ell)\alpha_r\alpha_r\alpha_p\alpha_p-$$

$$-æ F(G_r^\ell)\alpha_r\alpha_p\alpha_p-\alpha_i+\delta_{i\ell}=0. \tag{5}$$

Помноживши обидві частини (4) на α_i і згорнувши за індексом i, одержимо

$$\mu\alpha_r\alpha_r\alpha_i F(G_i^\ell)+(\lambda+\mu)\alpha_i\alpha_i\alpha_r F(G_r^\ell)+$$

$$+\gamma(\alpha_p\alpha_p)^2\alpha_i F(G_i^\ell)+æ(\alpha_p\alpha_p)^2\alpha_i F(G_i^\ell)=\alpha_\ell. \tag{6}$$

Звідси знаходимо

$$\alpha_r F(G_r^\ell)=\frac{\alpha_\ell}{(\lambda+\mu)\alpha_p\alpha_p+(\gamma+æ)(\alpha_p\alpha_p)^2}.$$

Підставляючи (6) у (4), остаточно запишемо

$$F(G_i^\ell)=$$

$$=\frac{\delta_{i\ell}}{\alpha_p\alpha_p(\mu+\gamma\alpha_p\alpha_p)}-\frac{\alpha_i\alpha_\ell(\lambda+\mu)}{(\alpha_p\alpha_p)^2(\mu+\gamma\alpha_p\alpha_p)(\lambda+2\mu+(\gamma+æ)\alpha_p\alpha_p)}-$$

$$-\frac{æ\alpha_i\alpha_\ell}{\alpha_p\alpha_p(\mu+\gamma\alpha_p\alpha_p)(\lambda+2\mu+(\gamma+æ)\alpha_p\alpha_p)}. \tag{7}$$

Перепишемо $F(G_i^\ell)$ у вигляді

$$F(G_i^\ell)=\frac{\delta_{i\ell}\alpha_p\alpha_p(\lambda+2\mu+(\gamma+æ)\alpha_p\alpha_p)-\alpha_i\alpha_\ell(\lambda+\mu)-æ\alpha_i\alpha_\ell\alpha_p\alpha_p}{(\alpha_p\alpha_p)^2(\mu+\gamma\alpha_p\alpha_p)(\lambda+2\mu+(\gamma+æ)\alpha_p\alpha_p)}. \tag{8}$$

Розкладаючи праву частину (8) на найпростіші дроби за методом невизначених коефіцієнтів, вираз для $F(G_i^\ell)$ подамо як

$$F(G_i^\ell)=$$

$$=\frac{\delta_{i\ell}}{\mu\alpha_p\alpha_p}-\frac{\lambda+\mu}{\mu(\lambda+2\mu)}\frac{\alpha_i\alpha_\ell}{(\alpha_p\alpha_p)^2}+\frac{\lambda\gamma(\lambda+4\mu)-\mu^2(æ-3\gamma)}{\mu^2(\lambda+2\mu)^2}\frac{\alpha_i\alpha_\ell}{\alpha_p\alpha_p}-$$

$$-\delta_{i\ell}\frac{\gamma}{\mu}\frac{1}{\mu+\gamma\alpha_p\alpha_p}-\frac{\gamma^2}{\mu^2}\frac{\alpha_i\alpha_\ell}{\mu+\gamma\alpha_p\alpha_p}+\frac{(\gamma+æ)^2}{(\lambda+2\mu)^2}\frac{\alpha_i\alpha_\ell}{\lambda+2\mu+(\gamma+æ)\alpha_p\alpha_p}.$$

При побудові оберненого перетворення Фур'є використаємо наступні співвідношення [2]:

$$F\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{4\pi}{\alpha_p\alpha_p}, \qquad \delta_{i\ell}F\left(\frac{1}{R}\right)-F\left(\frac{x_i x_\ell}{R^3}\right)=8\pi\frac{\alpha_i\alpha_\ell}{(\alpha_p\alpha_p)^2},$$

$$F\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_\ell}\frac{1}{R}\right)=-\frac{\alpha_i\alpha_\ell}{\alpha_p\alpha_p}, \qquad F\left(\frac{1}{R}e^{-\sqrt{\beta}R}\right)=\frac{4\pi\beta}{\alpha_p\alpha_p+\beta},$$

$$F\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_\ell}\frac{1}{R}e^{-\sqrt{\beta}R}\right)=-\frac{4\pi\beta\alpha_i\alpha_\ell}{\alpha_p\alpha_p+\beta},$$

де $R=(x_i x_i)^2$.

Після виконання обернених перетворень Фур'є визначаємо вираз для $G_i^\ell(x,\xi)$ і, задаючи паралельне перенесення на ξ, остаточно отримуємо

$$G_i^\ell(x,\xi)=\frac{1}{16\pi\mu}\frac{1}{R(x,\xi)}\left((3-4\nu)\delta_{i\ell}-\frac{(x_i-\xi_i)(x_\ell-\xi_\ell)}{R^2(x,\xi)}\right)-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\lambda\gamma(\lambda+4\mu)-\mu^2(\text{æ}-3\gamma)}{\mu^2(\lambda+2\mu)^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_\ell}\frac{1}{R(x,\xi)}-$$

$$-\delta_{i\ell}\frac{1}{4\pi\mu}\frac{1}{R(x,\xi)}e^{-\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}R(x,\xi)}+\frac{1}{4\pi}\frac{\gamma}{\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_\ell}\left(\frac{1}{R(x,\xi)}e^{-\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}R(x,\xi)}\right)-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\gamma+\text{æ}}{(\lambda+2\mu)^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_\ell}\left(\frac{1}{R(x,\xi)}e^{-\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\gamma+\text{æ}}}R(x,\xi)}\right), \qquad (9)$$

де $R(x,\xi)=\sqrt{(x_i-\xi_i)(x_i-\xi_i)}$.

Виконуючи диференціювання за правилом диференціювання однорідних узагальнених функцій [1], виділимо сингулярні складові:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_\ell}\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{\tilde{\partial}^2}{\partial x_i\partial x_\ell}\left(\frac{1}{R}\right)-\delta_{i\ell}\frac{4\pi}{3}\delta(x-\xi). \qquad (10)$$

Тут і надалі хвилькою позначаємо регулярну похідну. Легко переконатися, що

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_\ell}\left(\frac{1}{R}e^{-\sqrt{\beta}R}\right)=\frac{\tilde{\partial}^2}{\partial x_i\partial x_\ell}\left(\frac{1}{R}e^{-\sqrt{\beta}R}\right)-\delta_{i\ell}\frac{4\pi}{3}\delta(x-\xi). \qquad (11)$$

Підставляючи (10), (11) у (9) і позначаючи сингулярну складову $G_i^\ell(x,\xi)$ через $\bar{\bar{G}}_i^\ell(x,\xi)$, переконаємося, що $\bar{\bar{G}}_i^\ell(x,\xi)=0$. Отже, в (9) всі частинні похідні потрібно розуміти в класичному сенсі.

Розглянемо тепер плоский випадок, коли у рівняннях (1), (2) $i,\ell,p,r=1,2$. Як і для просторового випадку, покладемо $\xi=0$ і виконаємо інтегральне перетворення Фур'є

$$F(G_i^\ell)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G_i^\ell(x)\,e^{i\alpha_p\alpha_p}\,dx_1\,dx_2\,.$$

Зважаючи на те, що

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{i\alpha_p\alpha_p}\,dx_1\,dx_2=1, \qquad (12)$$

у просторі зображень одержимо систему алгебричних рівнянь. Враховуючи, що при $i,\ell,p,r=1,2$ співвідношення (12) співпадає з (4), отримаємо, що вираз для $F(G_i^\ell(x))$ для плоского випадку співпадає з (8). Для виконання оберненого перетворення Фур'є врахуємо, що

$$F\left(\ln\frac{1}{r}\right)=\frac{2\pi}{\alpha_p\alpha_p},\qquad r=\sqrt{x_ix_i},\qquad i=1,2,$$

$$F\left(\frac{x_1x_2^2}{r^4}\right)=i\pi\frac{\alpha_1(\alpha_1^2-\alpha_2^2)}{(\alpha_p\alpha_p)^2},\qquad F\left(K_0\left(\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}\,r\right)\right)=\frac{2\pi\gamma}{\mu+\gamma\alpha_p\alpha_p},$$

$$F\left(K_0\left(\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\gamma+\text{æ}}}\,r\right)\right)=\frac{2\pi(\gamma+\text{æ})}{\lambda+\mu+(\gamma+\text{æ})\alpha_p\alpha_p}. \qquad (13)$$

Тоді для випадку плоскої деформації, враховуючи паралельне перенесення на вектор ξ, одержимо

$$G_i^\ell(\xi) = \frac{(3-4\nu)\ln r\,\delta_{i\ell}}{8\pi(1-\nu)\mu} - \frac{1}{8\pi(1-\nu)\mu}\frac{(x_i-\xi_i)(x_\ell-\xi_\ell)}{r^2(x,\xi)} -$$

$$-\frac{1}{2\pi\mu}\delta_{i\ell}K_0\left(\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}\,r\right) - \frac{\lambda\gamma(\lambda+4\mu)-\mu^2(æ-3\gamma)}{2\pi\mu^2(\lambda+2\mu)^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_\ell}\left(\ln\frac{1}{r(x,\xi)}\right)+$$

$$+\frac{\gamma}{2\pi\mu}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_\ell}K_0(\sqrt{r}) - \frac{\gamma+æ}{2\pi(\lambda+2\mu)^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_\ell}K_0\left(\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\gamma+æ}}\,r(x,\xi)\right). \qquad (14)$$

Тут $K_0(\alpha r)$ − функція Макдональда.

Виконуючи диференціювання за правилами диференціювання однорідних узагальнених функцій і враховуючи, що в околі нуля $K_0(\alpha r)$ прямує до $\ln r(x,\xi)$, одержимо

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_\ell}\left(\frac{1}{r(x,\xi)}\right) = \frac{\tilde{\partial}^2}{\partial x_i\partial x_\ell}\left(\frac{1}{r(x,\xi)}\right) - \pi\delta_{i\ell}\delta(x,\xi). \qquad (15)$$

Підставляючи (14), (15) у (13), знаходимо сингулярну складову фундаментальних розв'язків $\overline{\overline{G}}{}_i^\ell(\xi)=0$. Отже, як і у просторовому випадку, диференціювання у (14) потрібно розуміти в класичному сенсі.

1. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. − М.: Мир, 1978. − 518 с.
2. *Справочник* по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицями / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. − М.: Наука, 1979. − 832 с.
3. *Хорошун Л. П.* Построение уравнений механики сплошной среды на основе потенциала Леннарда − Джонса // Прикл. механика. − 1995. − **31**, № 7. − С. 25−37.

ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ НА ОСНОВЕ ПОТЕНЦИАЛА ЛЕННАРДА – ДЖОНСА

Построены фундаментальные решения для полученной Л. П. Хорошуном системы уравнений в перемещениях для сред, частицы которых взаимодействуют по закону Леннарда − Джонса. Решения получено с использованием прямого и обратного преобразований Фурье обобщенных функций. Причем полученные для трехмерного и двухмерного случаев решения содержат как слагаемые типа решений Кельвина, так и слагаемые, непосредственно учитывающие взаимодействие частиц по закону Леннарда − Джонса.

CONSTRUCTION OF FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF CONTINUUM MECHANICS EQUATIONS ON THE BASE OF LENNARD – JOHNS POTENTIAL

The fundamental solutions of the derived by L. P. Khoroshun system of equations in displacements for media, which particles interact with each other according to the Lennard − Johns law, were constructed. The solutions were obtained using the direct and inverse Fourier transformations of the generalized functions, where solutions, obtained for 3D and 2D cases, include both components of Kelvin-type solutions and components that directly describe interactions of particles according to the Lennard −Johns law.

Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ

Одержано
09.10.02