

МЕТОД R -ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВОЛНОВОДОВ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ СИНГУЛЯРНОСТЯМИ

Рассмотрена задача определения электромагнитного поля в волноводе с геометрическими сингулярностями. При решении использован метод R -функций в сочетании с методом Рунца и новые модифицированные структуры решения.

С середины прошлого века ведутся исследования по изучению волноводов с поперечным сечением сложной формы. После появления волноводов H - и P -образной формы стали очевидными существенные отличия их от волноводов с сечением прямоугольной и круглой формы. Дальнейшие исследования волноводов со сложным поперечным сечением связаны с появлением Γ -, T - и крестообразных волноводов, а также волноводов с частичным заполнением диэлектриком [2]. Кроме того, в последнее время появились работы, посвященные исследованию электромагнитных полей в волноводах, содержащих геометрические сингулярности. Примерами таких волноводов являются волноводы с клинообразными, в том числе вырожденными и T -образными включениями [8–10].

Целью работы является исследование электромагнитного поля в волноводе с геометрическими сингулярностями на основе метода R -функций (RFM). Отметим, что RFM применялся при анализе волновых процессов для волноводов со сложным поперечным сечением [1, 3, 4]. Задача исследования электромагнитного поля в волноводе с геометрическими сингулярностями с помощью RFM рассматривается впервые. Будем считать волновод продольно-однородным и ограниченным идеально проводящей поверхностью. В таком волноводе могут независимо распространяться электрические и магнитные волны. Анализ распространения волн требует решения задачи на собственные значения. Математической моделью является краевая задача для однородного уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{в области} \quad \Omega \quad (1)$$

с однородным краевым условием Дирихле для E -волн

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2)$$

и однородным краевым условием Неймана для H -волн

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа; k – собственные числа; u – искомая функция; $\partial\Omega$ – граница области Ω , в которой отыскивается решение.

Существенной особенностью RFM является построение нормализованных уравнений границ локусов и структур решений (GSS – *General Structure of Solution*). В общем виде GSS может быть представлена как пучок функций, точно удовлетворяющий граничным условиям

$$u = B(\Phi, \omega, \omega_i). \quad (4)$$

Здесь B – оператор, зависящий от формы границы $\partial\Omega$ области Ω , ее участков $\partial\Omega_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, и от типа граничных условий; Φ – неопределенная функциональная компонента; ω, ω_i – функции, учитывающие геометрическую информацию задачи. К структуре предъявляется требование полноты. Структура (4) называется полной по норме $\|\cdot\|_A$, если

$\|u_0 - B(\Phi_\varepsilon)\|_A < \varepsilon$, где u_0 – классическое решение задачи. Обычно неопределенную компоненту Φ представляют в виде аппроксимационно универсального полинома $\Phi \approx P_N$ – степенного, тригонометрического, Чебышева, составленного из финитных сплайнов или атомарных функций, где N – размерность аппроксимационного пространства.

Полнота GSS может быть нарушена, если рассматриваемая область содержит узкие разрезы, трещины, включения и другие геометрические сингулярности. В работе [7] был предложен метод корректировки классических структур RFM , который обеспечивал их полноту и был проиллюстрирован на примере задачи изгиба тонкой прямоугольной пластины с разрезом. В частности, суть метода сводится к следующему.

Рассмотрим некоторую область $\Sigma = (\sigma \geq 0)$ (рис. 1), содержащую геометрическую сингулярность в виде локуса $\Omega_1 = (\omega_1 = 0)$. Нормализованное уравнение $\omega_1 = 0$ может быть представлено в виде $\omega_1 = \sqrt{\ell^2 \vee_\alpha \bar{\psi}} = 0$, где $L = (\ell = 0)$, $L \supset \Omega_1$ – поверхность (линия в $2D$), при переходе через которую нормализованная функция ℓ меняет знак, а $\Psi = (\psi \geq 0)$ – область, выделяющая Ω_1 из L . Уравнение границы области с геометрической сингулярностью имеет вид $\omega \equiv \sigma \wedge_\alpha \omega_1 = 0$.

Символы \vee_α , \wedge_α являются R -функциями (R -операциями):

R -дизъюнкция

$$x \vee_\alpha y = \frac{1}{1+\alpha} \left(x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy} \right),$$

R -конъюнкция

$$x \wedge_\alpha y = \frac{1}{1+\alpha} \left(x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy} \right),$$

где $\alpha = \alpha(x, y)$, $-1 < \alpha \leq 1$. На практике полагают $\alpha = 0$ или $\alpha(x, y) = (1 + x^2 + y^2)^{-1}$ [6].

Рассмотрим оператор $D_1[\ell, u]|_{\ell=0} = \nabla \ell \cdot \nabla u$, определенный в области Ω . Его можно рассматривать как продолжение оператора дифференцирования по нормали ν к L внутрь области Ω :

$$D_1[\ell, u]|_{\ell=0} = \frac{\partial u}{\partial \nu}.$$

Заметим, что при подходе к разрезу с разных сторон функция $D_1[\ell, \omega_1]$ принимает на $\omega_1 = 0$ значения

$$D_1[\ell, \omega_1]|_{\omega_1=0} = \begin{cases} -1, & \ell = -0, \\ 1, & \ell = +0. \end{cases}$$

Используя функцию $D_1[\ell, \omega_1]$, построим «функции скачка» q_1 и q_2 , которые при подходе к разрезу по нормали с одной его стороны стремятся к нулю, а при подходе с другой – к единице:

$$q_i = \frac{1}{2} \left(1 - (-1)^i D_1[\ell, \omega_1] \right) \Big|_{\omega_1=0} = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 + (-1)^i), & \ell = -0, \\ \frac{1}{2} (1 - (-1)^i), & \ell = +0. \end{cases}$$

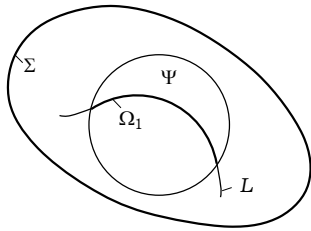


Рис. 1

С учетом сделанных замечаний классическая структура решения для задач с однородным краевым условием Дирихле $u = \omega\Phi$ (структура решения Л. В. Канторовича) примет вид $u = \omega[q_1\Phi_1 + q_2\Phi_2]$.

Задачи (1), (2) и (1), (3) можно решить методом Ритца, минимизируя соответственно функционал [5]

$$I(u) = k^2 = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega}{\int_{\Omega} u^2 d\Omega} \quad (5)$$

на классе функций из энергетического пространства

$$u = \omega[q_1\Phi_1 + q_2\Phi_2]$$

для задачи (1), (2) и на классе функций

$$u = q_1\Phi_1 + q_2\Phi_2$$

для задачи (1), (3), так как условие Неймана является естественным.

Здесь $\omega = 0$ – нормализованное уравнение границы локуса, построенное с помощью R -функций. Неопределенные компоненты GSS Φ_1, Φ_2 можно представить в виде

$$\Phi_1 = \sum_{i=1}^n C_i \psi_i, \quad \Phi_2 = \sum_{j=1}^m K_j \phi_j,$$

где ψ_i, ϕ_j – полные системы функций, C_i, K_j – неизвестные коэффициенты, которые находились по методу Ритца из условия минимума функционала (5).

Вычислительный эксперимент выполнялся с использованием программирующей системы *POLYE*, созданной в отделе прикладной математики и вычислительных методов ИПМаш НАН Украины.

Для оценки достоверности результатов было получено решение задач (1), (2) и (1), (3) для прямоугольной области. Сравнительный анализ показал, что погрешность приближенного решения составила не более 1%.

Рассмотрим решение задач (1), (2) и (1), (3) для областей, поперечные сечения которых изображены на рис. 2а, б.

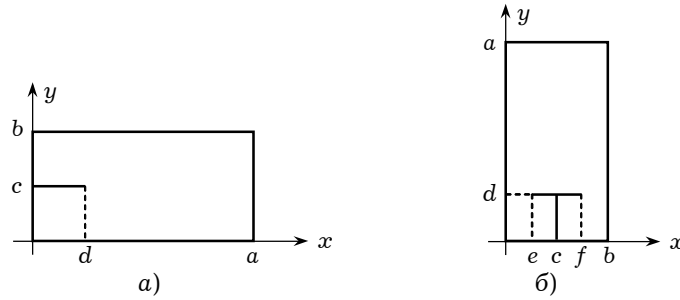


Рис. 2

Нормализованное уравнение границы области, изображенной на рис. 2а, может быть записано с использованием R -функций в виде

$$\omega_v \equiv \omega_1 \wedge_{\alpha} \omega_2 \wedge_{\alpha} \omega_5 = 0.$$

Здесь

$$\omega_1 = \frac{(a-x)x}{a} = 0, \quad \omega_2 = \frac{(b-y)y}{b} = 0, \quad \omega_3 = y - c = 0, \quad \omega_4 = \frac{(d-x)x}{d} = 0$$

– опорные области с буквенными параметрами,

$$\omega_5 \equiv \sqrt{\omega_3^2 \vee_{\alpha} \omega_4} = 0 \text{ – уравнение включения.}$$

Нормализованное уравнение границы области, изображенной на рис. 2б, имеет вид

$$\omega_t \equiv \omega_1 \wedge_{\alpha} \omega_2 \wedge_{\alpha} \omega_5 \wedge_{\alpha} \omega_8 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{(b-x)x}{b} = 0, & \omega_2 &= \frac{(a-y)y}{a} = 0, & \omega_3 &= x - c = 0, \\ \omega_4 &= \frac{(d-y)y}{d} = 0, & \omega_5 &\equiv \sqrt{\omega_3^2 \vee_{\alpha} \overline{\omega_4}} = 0, & \omega_6 &= y - d = 0, \\ \omega_7 &= \frac{(x-e)(f-x)}{f-e} = 0, & \omega_8 &\equiv \sqrt{\omega_6^2 \vee_{\alpha} \overline{\omega_7}} = 0. \end{aligned}$$

На рис. 3а, б в аксонометрии представлены линии уровня функций соответственно ω_v и ω_t .

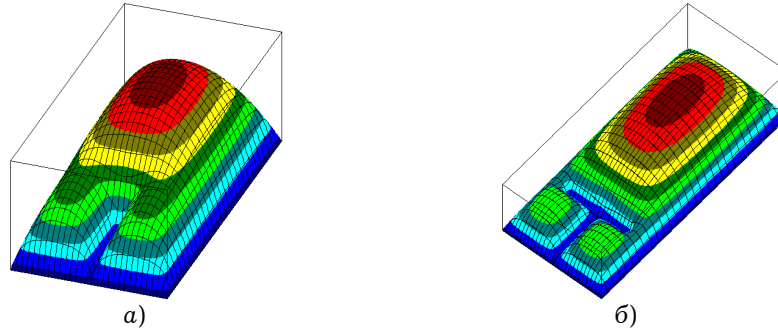


Рис. 3

Анализ результатов решения задач (1), (2) и (1), (3) (рис. 4, 5) показывает, что магнитные силовые линии представляют собой замкнутые петли, а электрические силовые линии подходят по нормали к стенкам волновода. Индексы волн показывают число вариаций поля между стенками волновода в направлениях x и y .

E_{11}		
	$k_{RFM} = 3.711, \quad k_{SIF} = 3.677$	$k_{RFM} = 8.165, \quad k_{SIF} = 8.1293$
E_{21}		
	$k_{RFM} = 5.019, \quad k_{SIF} = 4.9279$	$k_{RFM} = 10.975, \quad k_{SIF} = 10.8659$
E_{12}		
	$k_{RFM} = 6.512, \quad k_{SIF} = 6.4151$	$k_{RFM} = 14.489, \quad k_{SIF} = 14.3161$

Рис. 4

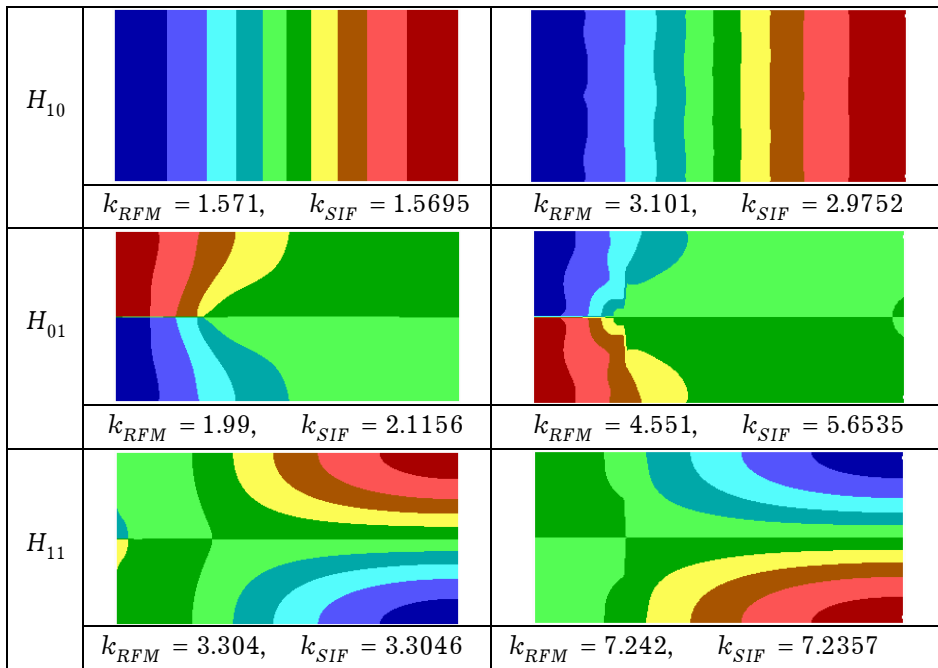


Рис. 5

На рис. 4, 5 приведены изображения картин распределения соответственно магнитного (H_x, H_y) и электрического полей (E_x, E_y), а под ними приводятся значения критических частот k_{RFM} , полученных в этой работе с помощью *RFM*, и k_{SIF} , взятые из [10]. Анализ результатов показывает, что на основном типе волн для электрического поля — E_{11} в волноводе с вырожденным клинообразным включением значение критической частоты составляет $k_{RFM} = 3.711$, в то время, как для прямоугольного волновода без включения $k_{RFM} = 6.512$.

Таким образом, в волноводе с вырожденным клинообразным включением происходит увеличение значений критических частот. Это, в свою очередь, приводит к тому, что критическая длина волны для таких волноводов меньше, чем для прямоугольного волновода.

Численные расчеты проводились для значений параметров $a = 2$, $b = 1$, $c = 0.25$, $d = 0.5$; при интегрировании использовалась 20-точечная формула Гаусса; использовались две координатные последовательности (полиномы Чебышева), число координатных функций от 80 до 120 (от 40 до 60 для каждой последовательности); среднее время решение каждого варианта задачи составило 1 минуту.

Кроме того, также были проведены вычисления для областей, поперечные сечения которых представлены на рис. 6. Для этих областей картины распределения магнитного и электрического поля и значения критических частот приведены на рис. 7 и 8.

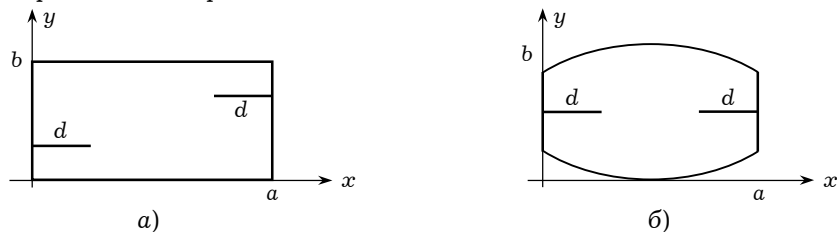


Рис. 6

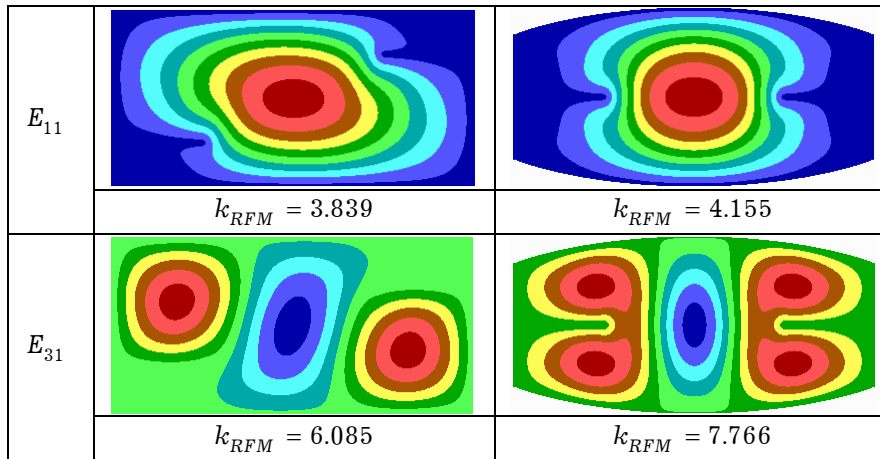


Рис. 7

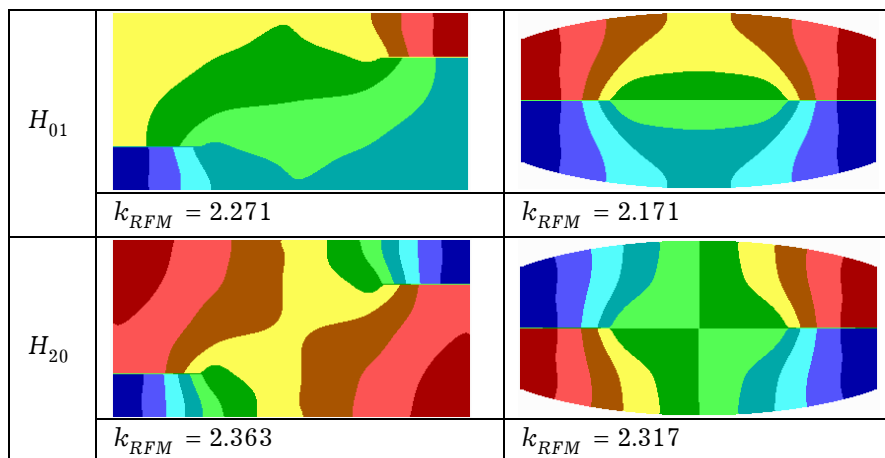


Рис. 8

Таким образом, в работе проведен анализ распространения электромагнитных волн в волноводах с геометрическими сингулярностями. С помощью метода R -функций решены краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца. При решении задач использовалась модифицированная структура решения, учитывающая присутствие в области различных геометрических сингулярностей. Приведено сравнение полученных результатов с результатами *Surface Integral Equation Method* [10]. Особо следует подчеркнуть, что, варьируя значения буквенных параметров a , b , c , d в выражениях для уравнений границ областей, построенных с помощью метода R -функций в виде единых аналитических выражений, становится возможным проведение вычислительного эксперимента при многовариантном расчете полей.

Волноводы с поперечным сечением сложной формы, а также содержащие геометрические сингулярности дают большие возможности по управлению такими параметрами, как критическая частота, критическая длина волны и другие. Многие из них до настоящего времени являются нереализованными.

1. Веретельник В. В., Кравченко В. Ф., Рвачев В. Л. Применение R -функций к расчету желобкового волновода // Измер. техника. – 1993. – № 2. – С. 59–61.
2. Волноводы с поперечным сечением сложной формы / Под ред. В. М. Седых. – Харьков: Вища шк. Изд-во Харьк. ун-та, 1979. – 128 с.
3. Кравченко В. Ф., Манько Г. П., Рвачев В. Л., Шейко Т. И. Расчет методом R -функций электродинамических характеристик волноводов сложной формы // Измер. техника. – 1993. – № 1. – С. 26–29.
4. Кравченко В. Ф., Нефедов Е. И. Магнитные волны в волноводах с односвязным поперечным сечением сложной формы // Докл. АН СССР. – 1981. – **256**, № 5. – С. 1097–1100.
5. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
6. Рвачев В. Л. Теория R -функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
7. Рвачев В. Л., Михаль Е. О. Полнота структурных решений в краевых задачах для областей специального вида // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 4. – С. 107–118.
8. Juntunen J. S., Tsiboukis T. D. On the FEM treatment of wedge singularities in waveguide problems // IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques. – 2000. – **48**, No. 6. – P. 1030–1037.
9. Kosmanis T. I., Kantartzis N. V., Tsiboukis T. D. A hybrid FDTD-wavelet-Galerkin-technique for the numerical analysis of field singularities inside waveguides // IEEE Trans. Magnetics. – 2000. – **36**, No. 4. – P. 902–906.
10. Swaminathan M., Arvas E., Sarkar T. K., Djordjevic A. R. Computation of cutoff wavenumbers of TE and TM modes in waveguides of arbitrary cross sections using a Surface Integral Formulation // IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques. – 1990. – **38**, No. 2. – P. 154–159.

МЕТОД R -ФУНКЦИЙ У ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ ХВИЛЕВОДІВ З ГЕОМЕТРИЧНИМИ СИНГУЛЯРНОСТЯМИ

Розглянуто задачу про визначення електромагнітного поля у хвилеводі з геометричними сингулярностями. Для розв'язання використано метод R -функцій разом з методом Рітца та нові модифіковані структури розв'язку.

R -FUNCTIONS METHOD IN PROBLEM OF INVESTIGATION OF WAVEGUIDES WITH GEOMETRIC SINGULARITIES

In the paper the problem of electromagnetic field determination in a waveguide with geometric singularities is considered. The R -functions method together with the Ritz one and new structures of solution are used to solve the problem.

Ин-т проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Получено
08.05.03