УДК 517.9

А. К. Прикарпатський[1,2], О. Є. Гентош[1]

ПРО ДЕЯКИЙ КЛАС ГРАДІЄНТНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ, АСОЦІЙОВАНИХ З ПОЛІНОМІАЛЬНИМ ДИСКРЕТНИМ РОЗПОДІЛОМ ІМОВІРНОСТЕЙ

Доведено еквівалентність деякої градієнтної динамічної системи, яка описує стохастичний процес у просторі ймовірностей з поліноміальним дискретним розподілом, і пуассонового потоку типу Лакса на многовиді Ґрассмана.

1. Вступ. Розглянемо функцію поліноміального дискретного розподілу ймовірностей величин $(n) \in \mathbb{Z}_+^N$:

$$p_{(n)}(\vartheta) := \frac{n\,!}{n_1\,!\,n_2\,!\dots n_N\,!}\,\vartheta_1^{n_1}\vartheta_2^{n_2}\dots\vartheta_N^{n_N} \tag{1}$$

з умовою

$$\sum_{i=1}^{N}\vartheta_i = 1\,, \tag{2}$$

де вектор $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N) \in \mathbb{R}_+^N$. Розподіл (1), очевидно, є нормованим, тобто $\sum\limits_{(n)\in\mathbb{Z}_+^N} p_{(n)}(\vartheta) = 1$ для всіх $\vartheta \in \mathbb{R}_+^N$, що задовольняють умову (2).

Задамо тепер на просторі $\mathbb{R}_+^N$ імовірностей елементарних подій деякий стохастичний процес $\vartheta : t \in \mathbb{R} \to \vartheta(t) \in \mathbb{R}_+^N$, який можна описати за допомогою градієнтної динамічної системи на метричному просторі $\mathbb{R}_+^{N-1}$ з метрикою $ds^2 = d^2\Psi$:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\operatorname{grad}_\Psi \Psi(\vartheta), \tag{3}$$

породженою деякою функцією $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}_+^{N-1};\mathbb{R})$. Очевидно, що

$$\frac{d\Psi(\vartheta)}{dt} = -\left\langle \operatorname{grad}_\Psi \Psi(\vartheta), \operatorname{grad}_\Psi \Psi(\vartheta) \right\rangle_\Psi \le 0$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$, і, як наслідок, існують границі $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \Psi(\vartheta(t)) = \Psi(\vartheta_\pm)$ у деяких стаціонарних точках $\vartheta_\pm = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \vartheta(t) \in \mathbb{R}_+^N$. Ці точки реалізують для функцій дискретного розподілу ймовірностей (1) деякі граничні розподіли $p_{(n)}(\vartheta_\pm)$, $(n) \in \mathbb{Z}_+^N$, з фіксованими математичними сподіваннями

$$E_\pm[n_i] = c_i^\pm, \qquad c_i^\pm \in \mathbb{R}_+, \qquad i = \overline{1,N}\,.$$

2. Метод симплектичної редукції. Нехай задано ермітову матрицю

$$P := \left\{\, x_i x_j^* :\ x_i x_i^* = |x_i|^2 = \vartheta_i,\ i,j = \overline{1,N} \,\right\}, \tag{4}$$

яка є проектором у просторі $\mathbb{C}^N$, тобто $P^+ = P$ (символ «+» позначає звичайне спряження у просторі комплексних матриць) і $P^2 = P$. Позначимо через M_ϑ простір усіх таких матриць і розглянемо його як підмноговид компактного комплексного многовиду Ґрассмана [1, 8]

$$G(\mathbb{C}^N) := \bigcup_{m=0}^{N} G_m(\mathbb{C}^N),$$

де $G_m(\mathbb{C}^N)$, $m = \overline{1, N}$, – множина ермітових матриць рангу m, тобто

$$G_m(\mathbb{C}^N) = \left\{ P \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^N) : P^+ = P,\ P^2 = P,\ \mathrm{Sp}\, P = m \right\}.$$

Оскільки на просторі $G(\mathbb{C}^N)$ звичайним способом діє унітарна група Лі $U(N)$:

$$P \in G(\mathbb{C}^N) : \xrightarrow{\ \hat{g}\ } gPg^+ \in G(\mathbb{C}^N), \tag{5}$$

де $g \in U(N)$, $gg^+ = 1$, то можна розглянути відповідне дуальне відображення вкладення

$$\ell : G(\mathbb{C}^N) \to u^*(N) \tag{6}$$

у спряжений простір $u^*(N)$ до алгебри Лі $u(N)$ групи Лі $U(N)$, поклавши

$$\ell(P) := iP, \qquad i^2 = -1,$$

для будь-якого $P \in G(\mathbb{C}^N)$. Очевидно, що для всіх точок $P \in G(\mathbb{C}^N)$ має місце співвідношення

$$\ell^+(P) + \ell(P) = 0,$$

а тому $\ell(P) \in u^*(N)$.

На спряженому просторі алгебри Лі $u(N)$ існує канонічна дужка Лі – Пуассона [2, 3, 7], яка для будь-яких гладких функціоналів $\gamma,\ \mu \in D(u^*(N))$ має вигляд

$$\{\gamma, \mu\}_{\mathrm{Lie}} := (\ell,\ [\nabla\gamma, \nabla\mu]), \tag{7}$$

де $[\cdot,\cdot]$ – звичайний комутатор матриць; $(\cdot,\cdot)$ – Sp-згортка просторів $u(N)$ та $u^*(N)$; ∇ – оператор градієнта. Дія $\hat{g} : G(\mathbb{C}^N) \to G(\mathbb{C}^N)$, вибрана у вигляді (5), забезпечує комутативність діаграми

$$\begin{array}{ccc} G(\mathbb{C}^N) & \xrightarrow{\ \ell\ } & u^*(N) \\ \hat{g}\downarrow & & \downarrow \mathrm{ad}^*_{g^{-1}} \\ G(\mathbb{C}^N) & \xrightarrow{\ \ell\ } & u^*(N), \end{array} \tag{8}$$

де $\mathrm{ad}^*_{g^{-1}} : u^*(N) \to u^*(N)$, $g^{-1}g = 1$, $g \in u(N)$, – коприєднана дія алгебри Лі $u(N)$ на її спряженому просторі, а тому на многовиді Ґрассмана $G(\mathbb{C}^N)$ можна ввести дужку Пуассона як редукцію Дірака [2, 7] канонічної дужки Лі – Пуассона (7) при відображенні (6) з урахуванням співвідношення проекторності

$$\ell^2(P) + i\ell(P) = 0 \tag{9}$$

для всіх точок $P \in G(\mathbb{C}^N)$.

Таким чином, справджується

Лема 1. *Редукована симплектична структура* $\Omega \in \Lambda^{(2)}(G(\mathbb{C}^N))$ *на многовиді Ґрассмана* $G(\mathbb{C}^N)$ *згідно з вкладенням* (6) *з умовою* (9) *задається виразом*

$$\Omega(P) = \mathrm{Sp}\,(PdP \wedge dPP), \tag{10}$$

де $\wedge$ *– оператор зовнішнього диференціювання в алгебрі Ґрассмана диференціальних форм на* $G(\mathbb{C}^N)$, *для кожного елемента* $P \in G(\mathbb{C}^N)$.

Детальне д о в е д е н н я леми міститься у роботі [1].

З комутативності діаграми (8) отримуємо, що дія групи Лі $U(N)$ на симплектичному многовиді $G(\mathbb{C}^N)$ є гамільтоновою, тобто відображення вкладення (6) є відповідним відображенням моменту [3] для еквіваріантної групової дії (5).

Залежність кожної матриці (4) від дійсного N-вимірного вектора $\vartheta \in \mathbb{R}_+^N$ задає деяке відображення

$$\vartheta \in \mathbb{R}_+^N \xrightarrow{\Theta} P(\vartheta) \in G(\mathbb{C}^N) \tag{11}$$

за умови (2). Явний вигляд відображення (11) дає можливість отримати симплектичну структуру $\bar{\Omega} \in \Lambda^{(2)}(\mathbb{R}_+^N)$ із симплектичної структури (10) за правилом

$$\bar{\Omega} = \Theta^* \Omega, \tag{12}$$

де $\Theta^* : T^*(G(\mathbb{C}^N)) \to T^*(\mathbb{R}_+^N)$ – відповідне до (11) кодотичне відображення.

3. Гамільтонові потоки та асоційовані градієнтні векторні поля. Побудуємо за допомогою деякої гладкої функції $\bar{\gamma} \in C^\infty(\mathbb{R}_+^N)$ гамільтоновий потік $X_{\bar{\gamma}}$ на $\mathbb{R}_+^N$:

$$i_{X_{\bar{\gamma}}} \bar{\Omega} = -\, d\bar{\gamma},$$

де $i_{X_{\bar{\gamma}}}$ – оператор внутрішнього диференціювання за векторним полем $X_{\bar{\gamma}}$ в алгебрі Ґрассмана диференціальних форм на $\mathbb{R}_+^N$.

Будемо вважати, що функція $\bar{\gamma} \in C^\infty(\mathbb{R}_+^N)$ є редукцією деякого гладкого функціонала $\gamma \in D(G(\mathbb{C}^N))$ на многовиді Ґрассмана при відображенні (11). Тоді векторному полю $X_{\bar{\gamma}}$ на $\mathbb{R}_+^N$ відповідає векторне поле X_γ на $G(\mathbb{C}^N)$:

$$i_{X_\gamma} \Omega = -\, d\gamma .$$

Використовуючи явний вигляд (13) симплектичної структури Ω з урахуванням умови дотичності до многовиду Ґрассмана $G(\mathbb{C}^N)$:

$$X_\gamma(P) = P X_\gamma(P) + X_\gamma(P) P,$$

знаходимо, що гамільтонове векторне поле X_γ на $G(\mathbb{C}^N)$, породжене функцією $\gamma \in D(G(\mathbb{C}^N))$, набуває вигляду [4]

$$X_\gamma(P) := [\nabla\gamma, P] = \big[[X_\gamma(P), P], P\big] \tag{13}$$

для кожного $P \in G(\mathbb{C}^N)$.

Розглянемо на многовиді Ґрассмана $G(\mathbb{C}^N)$ деяке градієнтне векторне поле вигляду (13), задане гладким функціоналом $\Phi \in D(G(\mathbb{C}^N))$ [5, 6]:

$$X_\gamma = \nabla\Phi(P),$$

варіацію якого можна вибрати, наприклад, у вигляді

$$\delta\Phi(P) = \mathrm{Sp}\,(\varphi(\vartheta)\,\delta P(\vartheta)),$$

де $\varphi(\vartheta) = \left\| -\frac{1}{2}\delta_{ij}\ln\vartheta_i : i,j = \overline{1,N} \right\|$ – діагональна матриця. Для відповідної функції $\bar{\Phi} = \Phi\big|_{\mathbb{R}_+^N} \in C^\infty(\mathbb{R}_+^N)$ отримуємо

$$\bar{\Phi}(\vartheta) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_{\vartheta_0=1}^{\vartheta_i}\ln\vartheta\, d\vartheta = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\vartheta_i\ln\left(\frac{\vartheta_i}{e}\right).$$

Таким чином, матриця-проектор $P = P(\vartheta) \in G(\mathbb{R}^N)$ задовольняє рівняння типу Лакса

$$\frac{dP}{dt} = \left[[\varphi(\vartheta), P], P\right], \tag{14}$$

у якому еволюція діагональних елементів

$$\frac{d\vartheta_i}{dt} = -\vartheta_i\left(\ln\vartheta_i - \sum_{j=1}^{N}\vartheta_j\ln\vartheta_j\right), \qquad i = \overline{1,N},$$

повністю визначає еволюцію решти елементів. Крім того, згідно з рівнянням (14) величину $\operatorname{Sp}P(t) = \sum_{i=1}^{N}\vartheta_i(t) = \mathrm{const}$ необхідно нормувати на одиницю для всіх $t \in \mathbb{R}$.

За допомогою функції $\Psi = -\bar{\Phi}$ введемо на просторі $\mathbb{R}_+^{N-1} \ni$ $\ni (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{N-1})$ ріманову метрику

$$ds^2(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{N-1}) = d^2\Psi\Big|_{\sum_{i=1}^{N}\vartheta_i = 1} = \sum_{i,j=1}^{N-1} g_{ij}\, d\vartheta_i\, d\vartheta_j, \tag{15}$$

де

$$g_{ij} = g_{ij}(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{N-1}) = \frac{\partial^2\Psi}{\partial\vartheta_i\partial\vartheta_j}\Bigg|_{\sum_{i=1}^{N}\vartheta_i = 1}, \qquad i,j = \overline{1, N-1},$$

і побудуємо градієнтне векторне поле (3) на $\mathbb{R}_+^{N-1}$:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -g^{-1}\nabla\Psi, \tag{16}$$

де $\mathbf{g}^{-1} = \| g^{ij} \|$ – матриця з елементами

$$g^{ij} = \begin{cases} (1-\vartheta_i)\vartheta_i, & i = j, \\ -\vartheta_i\vartheta_j & \text{в інших випадках}, \end{cases}$$

є оберненою до симетричної матриці $\mathbf{g} = \| g_{ij} \|$, $i,j = \overline{1, N-1}$. Це векторне поле співпадає з пуассоновим векторним полем (14) на многовиді Ґрассмана $G(\mathbb{R}^N)$. Таким чином, доведено

Твердження 2. *Градієнтне векторне поле* (16) *на метричному просторі* $(\mathbb{R}_+^{N-1}, \mathbf{g})$ *з рімановою метрикою* (15) *еквівалентне пуассоновій динамічній системі типу Лакса* (14).

Оскільки векторне поле (16) має зображення Лакса (14), то виникає питання про його інтегровність, тобто про існування додаткових інваріантів на $\mathbb{R}_+^{N-1}$, інволютивних [7] відносно пуассонової структури, асоційованої з (7). Безпосередні обчислення доводять

Твердження 3. *Функції* $\gamma_j = \dfrac{\ln\vartheta_{2j} - \ln\vartheta_N}{\ln\vartheta_{2j-1} - \ln\vartheta_N}$, $j = \overline{1,[N/2]}$, *є функціонально незалежними та інволютивними відносно пуассонової структури, асоційованої з* (7), *інваріантами градієнтного векторного поля* (16).

1. *Блекмор Д. Л., Гентош О. Є., Прикарпатський Я. А.* Геометрична структура інтегровних за Лаксом потоків на многовидах Ґрассмана // Крайові задачі для диференц. рівнянь. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – Вип. 2. – С. 41–48.
2. *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986. – 527 р.
3. *Abraham R., Marsden J.* Foundations of mechanics. – London: The Benjamin Publ. Co., 1978. – 806 p.
4. *Bloch A. M.* Lax type flows on Grassmann manifolds // Contemp. Math. – 1987. – **68**. – P. 39–50.
5. *Bloch A. M.* Steepest descent, linear programming and Hamiltonian flows // Contemp. Math. – 1990. – **114**. – P. 77–88.
6. *Brockett R. W.* Dynamical systems that sort lists, diagonalize matrices and solve linear programming problems // Linear Algebra and Appl. – 1991. – **146**. – P. 79–91.
7. *Prykarpatsky A. K., Mykytiuk I. V.* Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds: classical and quantum aspects. – Dordrecht: Kluver Acad. Publ., 1998. – 553 p.
8. *Prykarpatsky A. K., Zagrodzinski J. A., Blackmore D. L.* Lax type flows on Grassmann manifolds and dual momentum mappings // Repts Math. Phys. – 1997. – **40**, No. 3. – P. 539–549.

О НЕКОТОРОМ КЛАССЕ ГРАДИЕНТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ ДИСКРЕТНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Доказана эквивалентность некоторой градиентной динамической системы, описывающей стохастический процесс в пространстве вероятностей с полиномиальным дискретным распределением, и пуассонового потока типа Лакса на многообразии Грассмана.

ON SOME CLASS OF GRADIENT DYNAMIC SYSTEMS ASSOCIATED WITH POLYNOMIAL DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTION

Some gradient dynamic system, describing a stochastic process in the probability space of polynomial discrete distribution, is proved to be equivalent to the Lax-type Poisson flow on Grassmann manifold.

[1]Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2]Акад. гірництва та металургії, Краків, Польща

Одержано 05.09.02