

ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЛОВО-АНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З ПРИМЕЖОВИМ ШАРОМ

Показано ефективність розв'язування одновимірних крайових задач з примезовим шаром запропонованим числово-аналітичним методом. Для конкретних задач наведено числові результати та їх аналіз.

Деякі важливі для практики задачі пов'язані з побудовою розв'язків крайових задач, для яких властива наявність так званого примезового шару [4, 6]. До таких задач належать, наприклад, задачі адвекції-дифузії, тепломасоперенесення у пористих середовищах тощо. Розв'язуючи ці задачі за допомогою відомих числових методів (скінченних різниць, скінченних елементів), які для інших задач працюють добре, одержують чисельний розв'язок із сильними осциляціями, що не відображає реальну фізичну поведінку. З огляду на це розробка ефективних алгоритмів розв'язування зазначеного класу задач є важливою.

У процесі розв'язування задач типу адвекції-дифузії з великим числом Пекле в [1–3] розглядали різні стратегії побудови обчислювальних схем, щоб одержати фізично коректний чисельний розв'язок, який добре апроксимує точний. Зокрема, для стабілізації чисельного розв'язку вводять штучний дисипативний коефіцієнт, попередньо будують стабілізаційні рівняння [2] (при цьому важливим є питання щодо вибору параметра регуляризації розв'язку).

У роботі [3] проаналізовано деякі наближені розв'язки одновимірної стаціонарної задачі міграції домішки. Її розв'язок має яскраво виражений примезовий шар в околі значних градієнтів. Застосування стандартних схем методу скінченних елементів у цьому випадку не дало змоги одержати задовільний результат (чисельному розв'язку властиві сильні осциляції, неприйнятна точність). Для стабілізації чисельного розв'язку використовували стабілізаційні схеми Дугласа – Вонга та метод локалізованих найменших квадратів [3].

Продемонструємо ефективність застосування запропонованого в роботі [5] числово-аналітичного методу розв'язування лінійних крайових задач до задач з примезовим шаром. Апробацію цього методу здійснювали у процесі дослідження модельних задач усталеної одновимірної дифузії-конвекції, сформульованих у [4]. Виконано порівняння одержаних результатів із розв'язками, знайденими методами Гальоркіна (спостерігається осцилюючий характер розв'язку), Петрова – Гальоркіна (добре апроксимує точний), а також з відомими для деяких задач точними розв'язками. На підставі такого аналізу констатуємо, що у тих випадках, коли інші методи працювали погано, за допомогою числово-аналітичного методу, запропонованого в [5], одержували задовільний результат.

1. Розглянемо сформульовану в [3] одновимірну задачу міграції домішки. Математична модель цієї задачі є такою:

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \omega \frac{d\varphi}{dx} = 3\omega x^2, \quad (1)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 0. \quad (2)$$

Точний розв'язок задачі (1), (2) подається формулою

$$\varphi(x) = x^3 + \frac{3x^2}{\omega} + \frac{6x}{\omega^2} - \left(1 + \frac{3}{\omega} + \frac{6}{\omega^2}\right) \frac{e^{\omega x} - 1}{e^{\omega} - 1}. \quad (3)$$

Згідно зі схемою числово-аналітичного методу [5] переформулюємо крайову задачу (1), (2) у задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з відповідними крайовими умовами:

$$\frac{dz}{dx} = A(x)z, \quad (4)$$

$$z_1(0) = 0, \quad z_3(0) = 1, \quad z_1(1) = 0. \quad (5)$$

Тут $z = (z_1, z_2, z_3)$ – шуканий вектор; $z_1 = \varphi$, $z_2 = d\varphi/dx$; z_3 – допоміжна функція (при зведенні неоднорідної системи диференціальних рівнянь до однорідної). Матриця $A(x)$ розміру 3×3 має такі відмінні від нуля елементи:

$$a_{12} = 1, \quad a_{22} = \omega, \quad a_{23} = -3\omega x^2.$$

Застосовуючи запропонований числово-аналітичний метод, наближений розв'язок крайової задачі (4), (5) записуємо в аналітичній формі

$$z_i(x) = \sum_{j=1}^3 d_j g_{ij}(x), \quad i = 1, 2, 3, \quad (6)$$

де $g_{ij}(x)$ – елементи матрицанту. Його обчислення виконуємо наближено з потрібною точністю за обчислювальною процедурою, наведеною у [5].

Враховуючи властивість нормованості матрицанту, з умов (5) визначаємо невідомі сталі d_j в рівності (6):

$$d_1 = d_3 = 0, \quad d_2 = -\frac{g_{13}(1)}{g_{12}(1)}. \quad (7)$$

На підставі (6), (7) шуканий розв'язок визначаємо за формулою

$$\varphi(x) = z_1(x) = -\frac{g_{13}(1)}{g_{12}(1)} g_{12}(x) + g_{13}(x). \quad (8)$$

У табл. 1 наведено одержані числові результати для аналітичного (3) і числово-аналітичного (8) розв'язків при $\omega = 10$ і $\omega = 20$. Як бачимо з даних табл. 1, знайдений розв'язок (8) є стабільним і практично співпадає з точним розв'язком (3).

При чисельній реалізації розв'язку важливим є питання щодо стійкості обчислень. З огляду на це досліджено асимптотичну поведінку побудованого розв'язку (8) зі збільшенням параметра ω . Для числово-аналітичного методу вирішення проблеми стійкості пов'язане з раціональним наближеним обчисленням матрицанту. Для розглянутих задач використовували обчислювальну схему, описану в [5], де матрицант зображали у вигляді мультиплікативного інтеграла. Ця схема забезпечувала надійність розв'язку. Розв'язуючи задачу (1), (2) числово-аналітичним методом, отримуємо стабільний розв'язок, позбавлений тих недоліків, які були властиві чисельним розв'язкам, знайденим за розглянутими в [3] обчислювальними схемами.

Таблиця 1

$x \backslash \varphi$	Формула (3)		Формула (8)	
	$\omega = 10$	$\omega = 20$	$\omega = 10$	$\omega = 20$
0.0	0	0	0	0
0.1	0.00989	0.00399	0.00989	0.00400
0.2	0.03160	0.01699	0.03160	0.01700
0.3	0.07082	0.04499	0.07082	0.04499
0.4	0.13269	0.09399	0.13269	0.09399
0.5	0.22089	0.16994	0.22089	0.16994
0.6	0.33515	0.27860	0.33514	0.27860
0.7	0.46434	0.42411	0.46434	0.42411
0.8	0.56799	0.59866	0.56798	0.59865
0.9	0.52572	0.70633	0.52569	0.70630
1.0	0	0	0	0

2. Як приклад ефективного застосування числово-аналітичного методу до крайових задач з примежовим шаром розглянемо задачу тепломасоперенесення в пористих середовищах у рамках зробленої в [1] постановки.

Математична модель задачі про міграцію вологи, домішки та тепла в пористому середовищі, обмеженому двома коаксіальними циліндрами, за умови, що на границях середовища $r = r_1$ та $r = r_2$ задано значення п'єзометричного напору h_1 і h_2 , концентрації домішки c_1 і c_2 , а також температури T_1 і T_2 , у цьому разі описується диференціальними рівняннями

$$\varepsilon \frac{d^2 c}{dx^2} + \frac{1}{x + r_k} \frac{dc}{dx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (9)$$

$$\varepsilon_1 \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{1}{x + r_k} \frac{dT}{dx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (10)$$

за умов

$$c(0) = c_1, \quad c(1) = c_2, \quad (11)$$

$$T(0) = T_1, \quad T(1) = T_2. \quad (12)$$

Тут c – масова концентрація домішки; T – температура; $\varepsilon = 1/(1 + \text{Pe}_s)$, $\varepsilon_1 = 1/(1 + \text{Pe})$; $\text{Pe}_s = kh_0/D$, $\text{Pe} = k\rho c_p h_0/\lambda$ – дифузійне та температурне числа Пекле; $x = (r - r_1)/(r_2 - r_1)$ – безрозмірна координата; $r_k = r_1/(r_2 - r_1)$; $h_0 = (h_2 - h_1)/\ln(r_2/r_1) = \text{const}$; k – коефіцієнт фільтрації; D – коефіцієнт молекулярної дифузії; λ – коефіцієнт теплопровідності насиченого рідиною середовища; c_p – питома теплоємність розчину; ρ – густина розчину.

У роботі [1] ця задача розв'язана за допомогою методу експоненціальної підгонки, який належить до методів різницевого типу. Його ефективність істотно залежить від методики обчислення матричних експонент у різницевій схемі.

Як альтернативну використаємо методику розв'язування лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами [5] і побудуємо розв'язок задач (9), (11) та (10), (12). Розглянемо спочатку задачу (9), (11). Попередньо рівняння (9) зводимо до системи рівнянь

$$\frac{dz}{dx} = A(x)z, \quad (13)$$

де $z = (z_1, z_2) = \left(c, \frac{dc}{dx} \right)$ – шукана вектор-функція. Матриця $A(x)$ розміру 2×2 має такі ненульові елементи: $a_{12} = 1$, $a_{22} = -1/\varepsilon(x + r_k)$.

Використовуючи введені в (13) позначення, крайові умови (11) записуємо у вигляді

$$z_1(0) = c_1, \quad z_1(1) = c_2. \quad (14)$$

Розв'язок крайової задачі (13), (14) за числово-аналітичним методом подаємо у формі

$$z_i(x) = d_1 g_{i1}(x) + d_2 g_{i2}(x), \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

Задовольняючи умови (14), визначаємо невідомі сталі d_1 і d_2 , які містить формула (15):

$$d_1 = c_1, \quad d_2 = (c_2 - c_1 g_{11}(1))/g_{12}(1). \quad (16)$$

На підставі рівностей (15) з урахуванням (16) для функції c одержуємо таку розрахункову формулу:

$$c(x) = z_1(x) = c_1 g_{11}(x) + \frac{c_2 - c_1 g_{11}(1)}{g_{12}(1)} g_{12}(x). \quad (17)$$

З огляду на однотиповість задач (9), (11) і (10), (12) розв'язок останньої запишемо аналогічно до (17) у вигляді

$$T(x) = T_1 g_{11}(x) + \frac{T_2 - T_1 g_{11}(1)}{g_{12}(1)} g_{12}(x). \quad (18)$$

Елементи матрицанту $g_{ij}(x)$ у (18) обчислюємо через елементи матриці $A(x)$. Вона має такі ненульові елементи: $a_{12} = 1$, $a_{22} = -\frac{1}{\varepsilon_1(x + r_k)}$.

З метою порівняння точності одержуваних результатів за встановленими розрахунковими формулами (17) і (18) обчислення величин c і T виконували за таких вхідних даних [1]: $r_1 = 0.5$, $r_2 = 20$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $T_1 = 80$, $T_2 = 20$, $\varepsilon = 0.08$, $\varepsilon_1 = 0.1$.

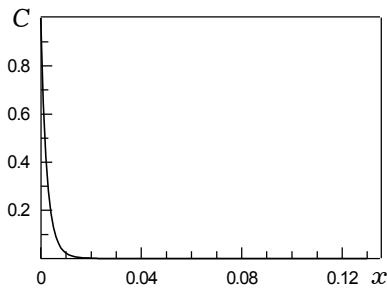


Рис. 1

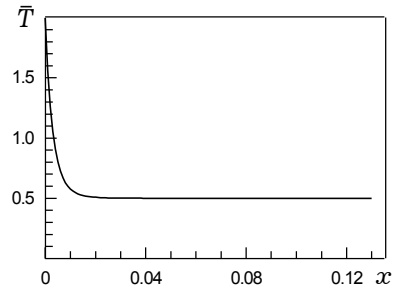


Рис. 2

Характерні результати обчислень величин c і T числово-аналітичним методом за формулами (17), (18) ілюструють рис. 1, 2, при цьому $\bar{T}(x) = T(x)/40$. Порівняння з результатами застосування методу експоненціальної підгонки та методу сіток другого порядку апроксимації, наведеними в роботі [1], дає підставу зробити висновок про конкурентоздатність пропонованого методу (розв'язок краще відображає фізичну поведінку). Алгоритму властиві простота та універсальність, він позбавлений труднощів, притаманних традиційним числовим методам при розв'язуванні розглянутого типу крайових задач.

1. Блажиевська О. В., Мандзак Т. І. Про ефективність методу експоненційної підгонки при розв'язуванні задач тепломасоперенесення у пористих середовищах // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 1999. – Вип. 1. – С. 26–31.
2. Гумецький Л. Р., Савула Я. Г. Застосування стабілізаційних рівнянь для чисельного розв'язування задач адвекції-дифузії // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 1999. – Вип. 1. – С. 88–93.
3. Козаревська Ю. С., Шинкаренко Г. А., Шинкаренко О. Г. Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: локалізовані найменші квадрати // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 52. – С. 59–70.
4. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. – М.: Мир, 1988. – 352 с.
5. Щербина Н. М. Обчислювальні аспекти чисельно-аналітичного методу розв'язування лінійних крайових задач // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2000. – Вип. 2. – С. 169–180.
6. Idelsohn S. R., Heinrich J. C., Onate E. Petrov – Galerkin methods for the transient advective-diffusive equations with sharp gradient // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1996. – 39. – P. 1455–1473.

**ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА
К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ**

Показана эффективность решения одномерных краевых задач с пограничным слоем предложенным численно-аналитическим методом. Представлены численные результаты решения конкретных задач и их анализ.

**APPLICATION OF NUMERICAL-ANALYTICAL METHOD TO SOLVE
BOUNDARY-VALUE PROBLEMS WITH BOUNDARY LAYER**

Effectiveness of solving the one-dimensional boundary-value problems with the boundary layer by using the numerical-analytical method is demonstrated. The numerical results of concrete problems are presented and analyzed.

Ин-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
04.04.02