

## ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С БОЛЬШИМИ ГРАДИЕНТАМИ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННЫМИ МЕТОДАМИ РУНГЕ – КУТТА

*Предложена и апробирована идея обобщения методов Рунге – Кутта на двумерный случай для приближенного интегрирования начально-краевых задач, соответствующих дифференциальным уравнениям в частных производных. Показано, что некоторые классические конечно-разностные схемы интегрирования уравнений переноса и нестационарной одномерной теплопроводности могут быть получены как следствия такого обобщения. Получены новые схемы высоких порядков точности для различных задач математической физики. Доказана устойчивость этих схем и приведены результаты расчетов для задач с большими градиентами решения. На конкретных примерах показано, что классические схемы низких порядков точности неудовлетворительно описывают решения таких задач, а схемы высоких порядков, построенные при помощи предложенных обобщенных методов Рунге – Кутта, дают хорошие приближения к точным решениям.*

Решения многих задач математической физики и механики имеют большие градиенты, которые быстро изменяются или осциллируют по времени (например, эффекты пограничного слоя в начально-краевых задачах с сингулярным возмущением [3, 4] и т. п.). Необходимость получения наиболее достоверной информации о поведении неизвестных функций в таких задачах определяется тем, что, как правило, именно в подобластях, где решения имеют большие градиенты, происходит резкое возрастание по модулю неизвестных функций, значения которых в точках экстремумов (в «пиковых» точках) в указанных подобластях могут по модулю на порядки превосходить соответствующие значения этих же функций за пределами областей с большими градиентами решения. Это может стать причиной различных негативных последствий. (Так, резкая концентрация напряжений в отдельных точках конструкции может привести к разрушению ее материала именно в этих точках и, как следствие, к общей потере несущей способности конструкции; резкое изменение температуры может привести к нежелательному изменению механических и теплофизических свойств изделия и к концентрации тепловых напряжений [5, 7] и т. д.) Поэтому актуальной становится проблема разработки надежных, устойчивых методов численного интегрирования начально-краевых задач с большими градиентами решения. Эти методы должны обладать высокими порядками точности, чтобы наиболее достоверно определять поведение неизвестных функций в областях с большими и быстроменяющимися градиентами.

В одномерном случае хорошо зарекомендовали себя неклассические методы Рунге – Кутта (МРК) [2] для численного интегрирования начальных и краевых задач с жесткими дифференциальными уравнениями, решения которых обладают указанными выше особенностями. Поэтому естественно возникает вопрос об обобщении МРК на многомерные случаи, что позволит использовать их для интегрирования начально-краевых задач физики и механики. Разработке этой идеи и ее апробации и посвящено настоящее исследование.

**1. Обобщение методов Рунге – Кутта.** Суть обобщения классического МРК изложим на примере одного уравнения в частных производных первого порядка. Пусть для некоторой функции  $y(t, x)$  на прямой  $t = t_0$  поставлена задача Коши

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f\left(t, x, y, \frac{\partial y}{\partial x}\right), \quad y(t_0, x) = y_0(x), \quad (1)$$

где  $f, y_0$  – известные функции, имеющие такую гладкость по всем аргументам, какая потребуется в процессе рассуждений. Найдем приближенное решение начальной задачи (1) на прямой  $t = t_0 + \tau$ , где  $\tau$  – шаг интегрирования. Согласно идее классического МРК [1] рассмотрим функцию

$$u(\tau, x) = y_0(x) + \sum_{i=1}^s b_i k_i(\tau, x), \quad k_i(\tau, x) = \tau f_i(\tau, x), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad s \geq 1, \quad (2)$$

где

$$f_i = f\left(t_0 + c_i \tau, x, y_0 + \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j, \frac{d}{dx}\left(y_0 + \sum_{j=1}^s d_{ij} k_j\right)\right), \quad c_1 = 0, \quad (3)$$

$d_{ij} = a_{ij} = 0$  при  $j \geq i$ ;  $b_i, c_i, a_{ij}, d_{ij}$  – постоянные, подлежащие определению. Функцию  $u(\tau, x)$  будем рассматривать в качестве приближенного решения задачи Коши (1) и потребуем, чтобы она имела по  $\tau$  как можно больший порядок касания [1] (при произвольных  $f$  и  $\tau$ ) к функции  $v(\tau, x) = y(t_0 + \tau, x)$ , т.е. функция  $\varphi(\tau, x) = v(\tau, x) - u(\tau, x)$  должна при  $\tau = 0$  для наибольшего  $r$  удовлетворять условиям

$$\varphi(0, x) = \frac{\partial \varphi(0, x)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \varphi(0, x)}{\partial \tau^2} = \dots = \frac{\partial^r \varphi(0, x)}{\partial \tau^r} = 0, \quad \frac{\partial^{r+1} \varphi(0, x)}{\partial \tau^{r+1}} \neq 0. \quad (4)$$

При этом отклонение функции  $u(\tau, x)$  от  $v(\tau, x)$  будет [1]

$$P(x) = \frac{\tau^{r+1}}{(r+1)!} \frac{\partial^{r+1} \varphi(\zeta, x)}{\partial \tau^{r+1}}, \quad 0 \leq \zeta(x) \leq \tau. \quad (5)$$

Постоянные  $b_i, c_i, a_{ij}, d_{ij}$  в (2), (3) будем определять из системы уравнений (4). При этом из (4) с учетом выражений для функций  $u(\tau, x)$  и  $v(\tau, x)$  при  $\tau = 0$  ( $t = t_0$ ) получим систему равенств

$$\frac{\partial^\ell y(t_0, x)}{\partial t^\ell} = \sum_{i=1}^s b_i \frac{\partial^\ell k_i(0, x)}{\partial \tau^\ell}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, r. \quad (6)$$

Левые части в равенствах (6) всегда можно определить, используя задачу Коши (1). Действительно, на прямой  $t = t_0$  из (1) следует

$$\frac{\partial^0 y(t_0, x)}{\partial t^0} \equiv y(t_0, x) = y_0(x), \quad \frac{\partial y(t_0, x)}{\partial t} = f\left(t_0, x, y_0(x), \frac{dy_0(x)}{dx}\right). \quad (7)$$

Используя перестановочность порядка дифференцирования в смешанных производных от функций  $y$  и  $f$ , на линии  $t = t_0$  с учетом (7) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y_{,x}} \frac{df}{dx}, & \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y_{,x}} \frac{df}{dx} + f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_{,x}^2} + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y_{,x}} \frac{df}{dx} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial y} + f \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y_{,x}} \frac{df}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_{,x}^2} \frac{df}{dx} \frac{df}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y_{,x}} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y_{,x}} \frac{df}{dx} \right), \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $y_{,x} = \partial y / \partial x$ ;  $dg/dx$  – полная производная по  $x$  от сложной функции  $g$ ; производные от  $y$  по  $t$  более высоких порядков не выписаны в силу их громоздкости.

Из выражений (2), (3) следует, что производные от функций  $k_i$  по  $\tau$  в правых частях равенств (6) имеют вид

$$\frac{\partial^\ell k_i}{\partial \tau^\ell} = \ell \frac{d^{\ell-1} f_i}{d\tau^{\ell-1}}, \quad \tau = 0, \quad 1 \leq \ell \leq r, \quad 1 \leq i \leq s. \quad (9)$$

Далее для простоты изложения в равенствах (2), (3), (6) примем, что  $s = 3$ . Тогда производные от  $f_i$  в (9) при  $\tau = 0$  определяются равенствами (см. (2), (3))

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{d\tau} &= \frac{d^2 f_1}{d\tau^2} = 0, & \frac{df_2}{d\tau} &= c_2 \frac{\partial f_1}{\partial t_0} + a_{21} f_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_0} + d_{21} \frac{\partial f_1}{\partial y_0'} \frac{df_1}{dx}, \\ \frac{d^2 f_2}{d\tau^2} &= c_2 \left( c_2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial t_0^2} + a_{21} f_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial t_0 \partial y_0} + d_{21} \frac{\partial^2 f_1}{\partial t_0 \partial y_0'} \frac{df_1}{dx} \right) + a_{21} f_1 \left( c_2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial t_0 \partial y_0} + a_{21} f_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial y_0^2} + \right. \\ &\quad \left. + d_{21} \frac{\partial^2 f_1}{\partial y_0 \partial y_0'} \frac{df_1}{dx} \right) + d_{21} \frac{df_1}{dx} \left( c_2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial t_0 \partial y_0'} + a_{21} f_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial y_0 \partial y_0'} + d_{21} \frac{\partial^2 f_1}{\partial y_0'^2} \frac{df_1}{dx} \right), \\ \frac{df_3}{d\tau} &= c_3 \frac{\partial f_1}{\partial t_0} + (a_{31} + a_{32}) f_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_0} + (d_{31} + d_{32}) \frac{\partial f_1}{\partial y_0'} \frac{df_1}{dx}, \quad \dots, \quad \tau = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $y_0' = dy_0(x)/dx$ ; выражение для  $d^2 f_3 / d\tau^2$  не выписано в силу его громоздкости.

Подставим выражения (7)–(10) в уравнения (6) и воспользуемся условием, что эти равенства должны выполняться при  $\tau = 0$  для произвольной функции  $f$  (или, что то же самое, для  $f_1$ ). Тогда для определения неизвестных коэффициентов в (2), (3) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 &= b_2 a_{21}^2 + b_3 (a_{31} + a_{32})^2 = b_2 d_{21}^2 + b_3 (d_{31} + d_{32})^2 = 1/3, \\ b_2 c_2 a_{21} + b_3 c_3 (a_{31} + a_{32}) &= b_2 c_2 d_{21} + b_3 c_3 (d_{31} + d_{32}) = 1/3, \\ b_2 a_{21} d_{21} + b_3 (a_{31} + a_{32}) (d_{31} + d_{32}) &= 1/3, \quad b_1 + b_2 + b_3 = 1, \\ b_2 c_2 + b_3 c_3 &= b_2 a_{21} + b_3 (a_{31} + a_{32}) = b_2 d_{21} + b_3 (d_{31} + d_{32}) = 1/2, \\ b_3 c_2 a_{32} = b_3 a_{21} a_{32} &= b_3 a_{32} d_{21} = b_3 c_2 d_{31} = b_3 a_{21} d_{31} = b_3 d_{21} d_{32} = 1/6. \end{aligned} \quad (11)$$

Не все уравнения системы (11) являются независимыми. После анализа этой системы получим независимые уравнения, образующие две подсистемы

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1, \quad b_2 c_2 + b_3 c_3 = 1/2, \quad b_3 c_2 a_{32} = 1/6, \quad (12)$$

$$b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = 1/3, \quad c_2 = a_{21}, \quad c_3 = a_{31} + a_{32}, \quad (13)$$

$$d_{21} = a_{21}, \quad d_{31} = a_{31}, \quad d_{32} = a_{32}.$$

Из подсистемы (13) следует, что в выражениях (3) коэффициенты, стоящие при функциях  $k_i$  и  $dk_i/dx$ , совпадают. Подсистема же (12) позволяет определить коэффициенты  $b_i, c_i, a_{ij}$ , причем она полностью совпадает с системой уравнений для коэффициентов классического МРК, используемого для приближенного интегрирования задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения [1, 2]

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad (14)$$

когда в представлении, аналогичном (2), удерживаются три слагаемых вида  $b_i k_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ ,  $s = 3$ , т.е. именно столько, сколько было выбрано выше для рассмотрения конкретного случая. Поэтому можно воспользоваться готовыми результатами, приведенными в [1, 2].

Подобные результаты были получены и при анализе соответствующих уравнений для коэффициентов  $b_i, c_i, a_{ij}, d_{ij}$  в выражениях (2), (3) при задании  $s = 1$  и  $s = 2$ . Следовательно, сам ход рассуждений, приводящий к уравнениям, определяющим постоянные  $b_i, c_i, a_{ij}, d_{ij}$  в равенствах (2), (3), и непосредственно сами уравнения для этих коэффициентов, полученные при  $s = 1, 2, 3$ , позволяют сделать вывод о том, что, по-видимому, при любом  $s \geq 1$  коэффициенты, стоящие в (3) при функциях  $k_i$  и  $dk_i/dx$ , будут совпадать:

$$a_{ij} = d_{ij}, \quad (15)$$

а постоянные  $b_i, c_i, a_{ij}$  будут определяться из систем, совпадающих с получающимися для тех же значений  $s$  при решении задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (14) классическим МРК. Решения этих систем известны (см. [1, 2]). При этом функция  $u(\tau, x)$  на прямой  $\tau = 0$  по  $\tau$  имеет  $s$ -й порядок касания к  $v(\tau, x)$  (или к  $y(t_0 + \tau, x)$ ), т.е. в выражении (5)  $r = s$ , и метод имеет  $s$ -й порядок точности по  $\tau$ . (Численные эксперименты показали, что сделанный вывод справедлив и при  $s = 4$ . Аналитически система уравнений для определения коэффициентов  $b_i, c_i, a_{ij}, d_{ij}$  при  $s = 4$  не была получена в силу чрезмерной громоздкости выражений для производных  $\partial^4 y / \partial t^4, \partial^3 f_i / \partial \tau^3$  при  $\tau = 0, t = t_0$ .)

В одномерном случае все схемы численного решения задачи Коши (14) методами Рунге – Кутты автоматически переносятся на системы уравнений первого порядка, разрешенные относительно производных [1, 2]. В связи с полученными выше результатами этот вывод естественно переносится на двумерный случай, если система разрешена относительно частных производных по одной из переменных, т.е. начальная задача имеет вид (1), где под  $y, f, y_0$  нужно понимать векторные функции. Более того, аналогичные результаты можно получить и в случае, когда функция  $f$  в (1) зависит не только от производной  $\partial y / \partial x$ , но и от производных по  $x$  более высоких порядков, например,  $\partial^2 y / \partial x^2$  и т.д., а также, если функция  $y$  зависит не от двух, а большего количества переменных, например,  $y(t, x_1, x_2)$  и т.д.

Очевидно, что вычисление полных производных  $dk_j/dx$  в выражениях (3) усложняется с увеличением  $j$ . Однако обобщенный МРК (2), (3) позволяет интегрировать задачу Коши (1) только приближенно, поэтому и производные  $dk_j/dx$  в (3) целесообразно вычислять приближенно, используя формулы конечно-разностного дифференцирования [10]. Естественно, можно использовать различные шаблоны для аппроксимации оператора дифференцирования по переменной  $x$ . Так, при большем количестве узлов, входящих в шаблон, будем получать больший порядок аппроксимации оператора дифференцирования, что положительно скажется на точности решения задачи Коши (1). С другой стороны, условия устойчивости изложенного метода или особенности конкретной задачи могут потребовать использования центральных или скошенных разностей для аппроксимации производной по  $x$ . Например, в [13] на базе классических МРК получены явные схемы высокого порядка точности по переменной  $t$ , когда операторы конечно-разностного дифференцирования по  $x$  на разных стадиях (при разных  $i$  в (3)) различны и обеспечивают свойство монотонности решения с ограниченной полной вариацией (так называемые TVD-схемы). Если на всех стадиях МРК операторы конечно-разностного дифференцирования по  $x$  одинаковы, то предложенный выше метод редуцируется в метод прямых [2].

Явные МРК, к которым фактически относится и схема (2), (3), либо неустойчивы, либо накладывают неоправданно жесткие ограничения на шаги интегрирования [2]. В одномерном случае эти особенности устраняются при помощи использования неклассических МРК [2], которые являются неявными. Очевидно, что в связи с полученными выше результатами естественно было бы обобщить неклассические МРК на двумерный случай по схеме, аналогичной (2), (3). Единственное отличие, возникающее при таком обобщении, будет заключаться лишь в том, что в (3)  $c_1 \neq 0$  и в соответствии с (15)  $d_{ij} = a_{ij} \neq 0$  при  $j \geq i$  (именно эта особенность приводит к неявным МРК). Для удобства дальнейших исследований обобщенные неклассические МРК целесообразно представить в форме, отличной от (2), (3) (см. [2]):

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + \tau \sum_{i=1}^s b_i f(t_n + c_i \tau, x, Y_i(x), Y_i'(x)), \quad (16)$$

$$Y_i(x) = y^n(x) + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_n + c_j \tau, x, Y_j(x),$$

$$Y_j'(x)) \equiv y^n(x) + \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j, \quad 1 \leq i \leq s, \quad (17)$$

где  $y^n(x)$  – приближенное решение задачи Коши (1) на линии  $t_n = t_0 + \tau n$ ;  $n$  – номер слоя,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Если функция  $f$  в (2) не зависит от аргумента  $\partial y / \partial x$ , то схемы (2), (3) и (16), (17) редуцируются в обычные МРК [1, 2]. В этом случае переменная  $x$  выступает в качестве параметра. Так как коэффициенты  $b_i, c_i, a_{ij}, d_{ij}$  в МРК определяются в предположении о произвольности функции  $f$ , то последнее обстоятельство и запись обобщенного МРК в форме (16), (17) наглядно подтверждают выводы, сделанные выше на основе строгого математического анализа при обобщении классических МРК: постоянные  $b_i, c_i, a_{ij}$  в (2), (3) и (16), (17) должны совпадать с коэффициентами обычных МРК [1, 2], применяемых в одномерном случае.

Первые из равенств (17) определяют замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $Y_j(x)$ , зависящих только от одной переменной, т.е. применение обобщенных МРК позволяет понизить размерность исходной задачи на единицу. В случае линейных или квазилинейных уравнений (17) они могут быть легко разрешены относительно производных  $Y_j'(x)$  и затем проинтегрированы по  $x$  при определенных начальных или краевых условиях, которые естественно вытекают из краевых условий или условий периодичности решения исходной задачи (1). В некоторых случаях система (17) может быть проинтегрирована аналитически, в общем же случае ее можно проинтегрировать приближенно, применяя, например, обычные МРК. После решения задачи, соответствующей системе (17), с помощью (16) строится приближенное решение исходной задачи Коши (1) на  $(n+1)$ -м слое в точках прямой  $t_{n+1} = t_n + \tau$  и т.д.

Предложенный подход позволяет получать численные схемы интегрирования начальной задачи (1) (и других начально-краевых задач) высоких порядков точности по  $t, x$ , и, как будет показано ниже на конкретных примерах, эти схемы обладают устойчивостью и позволяют получать надежные результаты при интегрировании задач с большими градиентами решения.

Следует подчеркнуть принципиальное отличие метода (16), (17) от широко известного метода прямых [5]. При использовании метода прямых начально-краевая задача сначала дискретизируется по пространственной пе-

ременной  $x$ , по которой нужно как бы решить краевую (или граничную) часть задачи, и затем уже интегрируется каким-либо методом (возможно, аналитически) по временной переменной  $t$ , по которой ставятся начальные условия. При использовании же метода (16), (17), наоборот, задача сначала как бы дискретизируется по переменной  $t$  на слои (расстояния между слоями  $\tau$  могут меняться), а лишь затем каким-либо способом (возможно, аналитически) интегрируется по  $x$  краевая (или граничная) задача для системы (17). При этом в методе прямых интегрирование по  $t$  производится одновременно по всем прямым  $x_k = x_0 + hk, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , параллельным оси  $Ox$ , а на каждом этапе применения метода (16), (17) рассматриваются только два ближайших слоя  $t_n, t_{n+1}$ , и количество фиктивных прямых (слоев)  $t_{nj} = t_n + c_j \tau$ , параллельных оси  $Ox$ , для  $s$ -стадийного МРК (16), (17) равно  $s$ , что в случае неявных методов приводит к существенному уменьшению количества неизвестных величин, определяемых при переходе от одного слоя к другому.

**2. Интегрирование некоторых начально-краевых задач математической физики обобщенными МРК.** Исследуем применение обобщенных МРК (16), (17) к решению некоторых задач математической физики.

Известно [10], что уравнение переноса является модельным и позволяет «отрабатывать» схемы для более сложных уравнений акустики, кинематических интегро-дифференциальных уравнений переноса нейтронов, нелинейных уравнений газовой динамики и др. Поэтому исследование численных схем интегрирования этого уравнения обобщенными МРК представляет определенный методический интерес. С этой целью рассмотрим решение задачи Коши для уравнения переноса

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \alpha \frac{\partial y}{\partial x}, \quad y(0, x) = y_0(x), \quad \alpha = \pm 1, \quad (18)$$

предполагая, что  $y_0(x+X) = y_0(x)$  – периодическая функция с периодом  $X$ .

Для интегрирования начальной задачи (18) по схеме (16), (17) воспользуемся коэффициентами 1-стадийного метода Радо ПА (далее будем просто говорить: «воспользуемся таким-то методом», используя названия, принятые в [2]) – неявного метода Эйлера, – тогда получим уравнения  $y^{n+1}(x) = y^n(x) + \tau \alpha Y_1'(x)$ ,  $Y_1(x) = y^n(x) + \tau \alpha Y_1'(x)$ , откуда

$$y^{n+1}(x) = Y_1(x), \quad Y_1'(x) = \alpha(Y_1(x) - y^n(x)) / \tau. \quad (19)$$

Второе из уравнений (19) можно проинтегрировать аналитически [6] с учетом периодичности решения по  $x$ . Однако нас интересует численное решение задачи (18), поэтому для интегрирования второго уравнения (19) вновь используем неявный метод Эйлера, тогда окончательно получим схему

$$y_{m+1}^{n+1} = (1 - \alpha H)^{-1}(y_m^{n+1} - \alpha H y_{m+1}^n), \quad H = h/\tau, \quad (20)$$

где  $m$  – номер узла в слое;  $h = x_{m+1} - x_m > 0$  – расстояние между двумя соседними узлами в слое – шаг интегрирования по  $x$ , причем  $h$  может быть переменной по  $m$  величиной. Если же для интегрирования второго уравнения (19) использовать 1-стадийный метод Радо IA (явный метод Эйлера), то вместо (20) получим схему

$$y_m^{n+1} = (1 + \alpha H)^{-1}(y_{m+1}^{n+1} + \alpha H y_m^n). \quad (21)$$

Значения коэффициентов в правых частях схем (20) при  $\alpha = -1$  и (21) при  $\alpha = 1$  положительны и меньше единицы. В силу этого из (20), (21) следует  $\|y^{n+1}\|_C \leq \|y^n\|_C$ , откуда вытекает абсолютная устойчивость этих схем в пространстве  $C$  при любых  $H > 0$ . (В действительности схемы (20), (21) яв-

ляются хорошо известными в теории разностных схем неявными, абсолютно устойчивыми схемами интегрирования уравнения переноса, построенными на 3-точечных шаблонах [10] и имеющими 1-й порядок точности по обоим переменным.)

Если для интегрирования задачи Коши (18) использовать по  $t$  явный метод Эйлера, а затем по  $x$  – либо явный, либо неявный метод Эйлера, то в конечном итоге получим две явные схемы 1-го порядка, подобные (20), (21) и построенные на 3-точечных шаблонах  $(n, m)$ ,  $(n, m + 1)$ ,  $(n + 1, m + 1)$  или  $(n, m)$ ,  $(n, m + 1)$ ,  $(n + 1, m)$ , но устойчивые лишь при  $0 < H^{-1} \leq 1$  [10]. (Этот результат наглядно подтверждает тезис о том, что требование устойчивости явных МРК накладывает жесткие ограничения на шаги интегрирования, в частности, в рассматриваемом примере должно быть  $0 < \tau \leq h$ . Более того, явные МРК (2), (3) любого порядка точности по  $\tau$  при аппроксимации в (3) производных  $dk_j/dx$  центральными разностями любого порядка по  $h$  приводят к неустойчивым схемам интегрирования задачи Коши (18) [10, 13].)

Исследуем схемы более высоких порядков точности. Проинтегрируем задачу (18), используя 1-стадийный метод Гаусса – Лежандра (метод средней точки). Тогда получим  $y^{n+1}(x) = y^n(x) + \tau \alpha Y_1'(x)$ ,  $Y_1 = y^n + \tau \alpha Y'/2$ , откуда

$$y^{n+1}(x) = 2Y_1(x) - y^n(x), \quad Y_1'(x) = 2\alpha(Y_1(x) - y^n(x))/\tau. \quad (22)$$

Для интегрирования второго из уравнений (22) применим 2-стадийный метод Лобатто IIIA (метод трапеций), тогда из (22) следует

$$Y_1^{m+1} = [(1 + \alpha H)Y_1^m - \alpha H(y_m^n + y_{m+1}^n)]/(1 - \alpha H), \quad y_{m+1}^{n+1} = 2Y_1^{m+1} - y_{m+1}^n, \quad (23)$$

$$Y_1^m = [(1 - \alpha H)Y_1^{m+1} + \alpha H(y_m^n + y_{m+1}^n)]/(1 + \alpha H), \quad y_m^{n+1} = 2Y_1^m - y_m^n. \quad (24)$$

Если из вторых равенств (23), (24) исключить за счет первых равенств величины  $Y_1^{m+1}$ ,  $Y_1^m$  соответственно и во вновь полученных уравнениях заменить  $Y_1^m$ ,  $Y_1^{m+1}$  выражениями  $Y_1^m = (y_m^{n+1} + y_m^n)/2$ ,  $Y_1^{m+1} = (y_{m+1}^{n+1} + y_{m+1}^n)/2$ , которые следуют из первого из уравнений (22), то в конечном итоге получим классические схемы 2-го порядка по обоим переменным, построенные на 4-точечном шаблоне [10]:

$$y_{m+1}^{n+1} = a y_m^{n+1} + y_m^n - a y_{m+1}^n, \quad a = (1 + \alpha H)/(1 - \alpha H), \quad \alpha = -1, \quad (25)$$

$$y_m^{n+1} = b y_{m+1}^{n+1} + y_{m+1}^n - b y_m^n, \quad b = (1 - \alpha H)/(1 + \alpha H), \quad \alpha = 1. \quad (26)$$

В [10] показано, что схема (25) или, что то же самое, (23) при  $\alpha = -1$  абсолютно устойчива по норме оператора разностного дифференцирования по переменной  $x$ :

$$\|y^n\| = \sqrt{(y^n, v^n)}, \quad (y^n, v^n) = \sum_{m=1}^M y_m^n v_m^n h,$$

$$v_m^n \equiv (y_m^n - y_{m-1}^n)/h, \quad x_i = ih, \quad i=0, 1, \dots, M, \quad h = X/M = \text{const}, \quad (27)$$

а схема (26) (или (24)) устойчива по норме, аналогичной (27), при  $\alpha = 1$ . Однако по норме пространства  $C$ , которая наиболее естественна в задачах с большими градиентами решения, схемы (23)–(26) неустойчивы. Покажем это на примере схемы (25).

Используя повторно формулу (25), получим такую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} y_m^{n+1} &= \\ &= a y_{m-1}^{n+1} + y_{m-1}^n - a y_m^n = a(a y_{m-2}^{n+1} + y_{m-2}^n - a y_{m-1}^n) + y_{m-1}^n - a y_m^n = \dots = \\ &= a^M y_{m-M}^{n+1} + a^{M-1} y_{m-M}^n + (1 - a^2) \sum_{k=0}^{M-2} a^k y_{m-k-1}^n - a y_m^n, \quad M \geq 2. \end{aligned} \quad (28)$$

Учитывая условие периодичности решения  $y_m^n = y_{m-M}^n$  и  $y_m^{n+1} = y_{m-M}^{n+1}$ , из (28) будем иметь

$$y_m^{n+1} = (1 - a^M)^{-1} \left[ (1 - a^2) \sum_{k=0}^{M-2} a^k y_{m-k-1}^n - a(1 - a^{M-2}) y_m^n \right], \quad M \geq 2. \quad (29)$$

Для схемы (25) введем в рассмотрение оператор  $A$  перехода от слоя к слою  $\mathbf{y}^{n+1} = A\mathbf{y}^n$  и оценим его норму в  $C$ , которая определяется равенством [10]

$$\|A\|_C = \sup_{\|\mathbf{y}\|_C=1} \|A\mathbf{y}\|_C, \quad \|\mathbf{y}\|_C = \max_{0 \leq m \leq M} |y_m|. \quad (30)$$

Согласно (30) зададим в равенстве (29)  $y_m^n = -1$ ,  $y_{m-k-1}^n = 1$ ,  $k = 0, 1, \dots, M-2$ , тогда получим (при  $0 < a < 1$ )

$$y_m^{n+1} = (1 - a^M)^{-1} [(1 - a^2)(1 - a^{M-1}) / (1 - a) - a(1 - a^{M-2})] > 1. \quad (31)$$

Из сопоставления (30) и (31) следует, что  $\|A\|_C > 1$  при  $0 < a < 1$ , т.е. при  $0 < a < 1$  схема (25) неустойчива в  $C$ . Аналогично доказывается неустойчивость этой схемы и при  $-1 < a < 0$ . Для доказательства следует в (29) задать  $y_m^n = y_{m-1}^n = 1$ ,  $y_{m-k-1}^n = \text{sgn}(a^k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, M-2$ , тогда из (29) при четном  $M$  получим оценку (31), в которой необходимо  $a$  заменить на  $|a|$  (подобным образом доказывается неустойчивость схемы (25) в случае  $-1 < a < 0$  при нечетном  $M$ ). Следовательно, в  $C$  схема (25) устойчива только при  $a = 0$  ( $H = 1$ ,  $\tau = h$ ), при этом из (25), (29) вытекает равенство переноса  $y_{m+1}^{n+1} = y_m^n$ .

Построим теперь схему 4-го порядка точности по обеим переменным. Для этого по  $t$  используем 3-стадийный метод Лобатто IIIВ:

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + \tau\alpha(Y_1'(x) + 4Y_2'(x) + Y_3'(x))/6,$$

$$Y_1(x) = y^n(x) + \tau\alpha(Y_1'(x) - Y_2'(x))/6,$$

$$Y_2(x) = y^n(x) + \tau\alpha(Y_1'(x) + 2Y_2'(x))/6,$$

$$Y_3(x) = y^n(x) + \tau\alpha(Y_1'(x) + 5Y_2'(x))/6.$$

Отсюда получаем

$$Y_3(x) = 2Y_2(x) - Y_1(x) \quad Y_2'(x) = 2\alpha(Y_2(x) - Y_1(x))/\tau,$$

$$Y_1'(x) = 2\alpha(2Y_1(x) + Y_2(x) - 3y^n(x))/\tau, \quad (32)$$

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + 2(Y_2(x) - Y_1(x)),$$

$$Y_3(x) = 2Y_2(x) - Y_1(x). \quad (33)$$

(Для построения схемы 4-го порядка по  $\tau$  можно использовать и 2-стадийный метод Гаусса – Лежандра. В конечном итоге для реализации этого метода получим систему двух уравнений, аналогичную (32), однако коэффициенты в этой системе будут иррациональными.)

Для интегрирования системы двух уравнений (32) применим 3-стадийный метод Лобатто IIIА, который в векторной форме имеет вид

$$\mathbf{Y}_{m+1} = \mathbf{Y}_m + h[\mathbf{f}(x_m, \mathbf{Y}_m) + 4\mathbf{f}(x_m + h/2, \mathbf{Z}) + \mathbf{f}(x_{m+1}, \mathbf{Y}_{m+1})]/6,$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}_m + h[5\mathbf{f}(x_m, \mathbf{Y}_m) + 8\mathbf{f}(x_m + h/2, \mathbf{Z}) - \mathbf{f}(x_{m+1}, \mathbf{Y}_{m+1})]/24, \quad (34)$$

где  $\mathbf{Y}_m = \{Y_1^m, Y_2^m\}^\top$ ;  $\mathbf{Z} = \{Z_1, Z_2\}^\top$  – вспомогательный вектор;  $\mathbf{f}$  – вектор-функция правых частей уравнений (32), явно зависящая от  $x$  в силу того,



что правые части в (32) зависят от функции  $y^n(x)$ , которая на  $n$ -м слое предполагается уже известной. В развернутом виде система (34) громоздка, поэтому не будем ее выписывать. Уравнения (34) образуют замкнутую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных  $Y_1^{m+1}$ ,  $Y_2^{m+1}$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$  при  $\alpha = -1$  и  $Y_1^m$ ,  $Y_2^m$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$  при  $\alpha = 1$ . (Такая зависимость выбора неизвестных в (34) от значений  $\alpha$  определяется условиями устойчивости получающейся в конечном итоге схемы.) Так как уравнения (32) являются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, то при любых  $m$  коэффициенты СЛАУ (34) будут одни и те же. Следовательно, требуется лишь один раз произвести обращение матрицы 4-го порядка системы (34), причем значения  $Z_1$ ,  $Z_2$  в дальнейшем нигде не потребуются и их можно не вычислять (они формально потребовались лишь для составления матрицы системы (34)). Если система (34) разрешена, то из (33) окончательно получим схемы

$$\begin{aligned} y_{m+1}^{n+1} &= y_{m+1}^n + 2(Y_2^{m+1} - Y_1^{m+1}), & \alpha &= -1, \\ y_m^{n+1} &= y_m^n + 2(Y_2^m - Y_1^m), & \alpha &= 1. \end{aligned} \quad (35)$$

Отметим, что при определении правых частей системы (34) необходимо вычислять значения функции  $y^n(x)$  в промежуточных точках  $x_m + h/2$ . Эти значения можно приближенно определить либо с помощью интерполяционного полинома Лагранжа  $y^n(x_m + h/2) \approx (9y_m^n + 9y_{m+1}^n - y_{m-1}^n - y_{m+2}^n)/16$  (в этом случае шаг  $h$  должен быть постоянным, иначе такая замена не будет иметь 4-й порядок точности), либо с помощью интерполяционного полинома Эрмита  $y^n(x_m + h/2) \approx (y_m^n + y_{m+1}^n)/2 - h[(y_{m+1}^n)' - (y_m^n)']/8$  (здесь шаг  $h$  уже может быть переменным по  $m$ ; штрихом обозначена производная по  $x$  в узловых точках  $x_m$ ,  $x_{m+1}$ ; при переходе от слоя к слою эти производные определяются с помощью формул (33):  $(y_m^{n+1})' = (y_m^n)' + 2(Y_2'(x_m) - Y_1'(x_m))$ , где  $Y_i'$  вычисляются по формулам (32)). Следовательно, при использовании полинома Эрмита для интегрирования задачи Коши (18) с 4-м порядком точности по  $x$  необходимо задать, кроме начального условия  $y(0, x) = y_0(x)$ , дополнительное условие  $\partial y(0, x)/\partial x = y_0'(x)$ .

Авторам пока не удалось строго доказать устойчивость методов (34), (35), но серии численных экспериментов, проведенных ими, показали, что эти схемы в силу 4-го порядка точности по обоим переменным весьма эффективны при интегрировании задач с большими градиентами решения.

Для сравнения решений, полученных с помощью схем (20), (25), (34), (35), рассмотрим уравнение переноса (18) при  $\alpha = -1$  и начальном условии

$$y_0(x) = \sum_{k=0}^K 8 \sin(\lambda_k x) / \lambda_k, \quad \lambda_k = 2\pi(2k + 1), \quad K = 0, 1, 2, \dots, \quad (36)$$

где функция  $y_0(x)$  является частичной суммой ряда Фурье для периодической ступенчатой функции

$$z(x) = \begin{cases} -1, & -0.5 + \ell \leq x < \ell, \\ +1, & \ell \leq x < 0.5 + \ell, \end{cases} \quad \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (37)$$

с периодом  $X = 1$  (ломаная 1 на рис. 1). Точное решение задачи Коши (18), (36) имеет вид [10]

$$y(t, x) = \sum_{k=0}^K 8 \sin(\lambda_k(x - t)) / \lambda_k. \quad (38)$$

Отсюда следует, что на прямых  $x - t = \ell/2$  частные производные от  $y$  по модулю равны:

$$\left| \frac{\partial y}{\partial t} \right| = \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| = 8 \left| \sum_{k=0}^K \cos(\pi(2k+1)\ell) \right| = 8(K+1), \quad x - t = \ell/2, \quad (39)$$

а модуль градиента решения в этих точках равен  $8\sqrt{2}(K+1)$ . Следовательно, с увеличением  $K$  модуль градиента возрастает и уже при  $K = 4$  его можно считать большим по сравнению со значениями модуля функции (38). Кроме того, известно, что в окрестности точки разрыва функции (37) ее разложение (36) имеет неустранимые «пики», и чем больше значение  $K$ , тем больше вторые производные от  $y_0(x)$  в точках, соответствующих этим пикам. Следовательно, решение рассматриваемой начальной задачи (18), (36) при больших  $K$  будет обладать не только большими по модулю производными первого порядка, но и производными высших порядков.

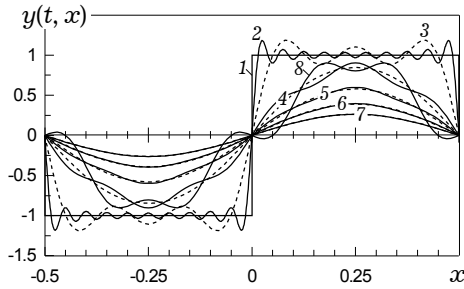


Рис. 1

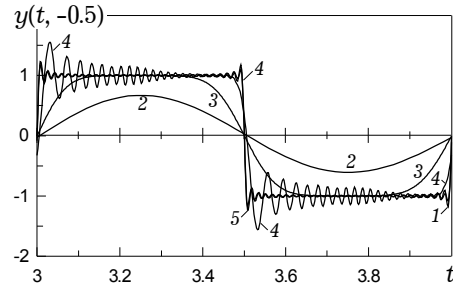


Рис. 2

В качестве конкретного примера рассмотрим случай  $K = 29$  (график функции (36), соответствующей этому значению  $K$ , изображен на рис. 1 кривой 2). При этом максимальные значения модуля градиента больше и превосходят число 339. На рис. 2 приведены графики точного и приближенных решений этой задачи на прямой  $x = -0.5$  при  $3 \leq t \leq 4$ . Кривая 1 соответствует точному решению; кривая 2 построена по схеме (20) при разбивке прямоугольной области  $G: 0 \leq t \leq 4, -0.5 \leq x \leq 0.5$  на 201 слой по  $t$ ,  $t_n = n\tau$ ,  $\tau = 4/N$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $N = 200$ , и каждого слоя на 101 узел по  $x$   $x_m = mh$ ,  $h = 1/M$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$ ,  $M = 100$ , величина наибольшего отклонения  $\delta$  от точного решения при этом составила по модулю 1.14; кривая 3 соответствует той же схеме (20) и  $N = 2000$ ,  $M = 1000$ , при этом  $\max |\delta| = 1.08$ . Линия 4 получена по схеме (25) при прежних значениях  $N, M$ , причем  $\max |\delta| = 1.1$ . А решение, построенное по схеме (34), (35) при тех же значениях  $N, M$ , отличается от точного менее, чем на 5%, поэтому соответствующая кривая 5 визуально почти не отличается от кривой 1 на рис. 2. (Поведение кривых 1–5 на начальном отрезке времени  $0 \leq t < 3$  на рис. 2 не изображено, так как на нем отклонения приближенных решений от точного менее заметно, чем при  $3 \leq t \leq 4$ .)

Линии 2, 3 на рис. 2 показывают, что схема (20) «отслеживает» только общую (в некотором усредненном смысле) тенденцию поведения решения задачи (18), (36), но не отражает локальные особенности решения (38), в частности, не выделяет локальных экстремумов, причем с увеличением  $t$  приближенное решение постепенно затухает, приближаясь к нулю. (Последняя особенность фактически заложена в схеме (20), так как из нее следует, что  $\|\mathbf{y}^{n+1}\|_C \leq \|\mathbf{y}^n\|_C$ .) Решение, построенное по схеме (25) (кривая 4), уже качественно отслеживает и локальное поведение точного решения (38).

Однако с увеличением  $t$  это приближенное решение приводит к увеличению по модулю «пиковых» значений (экстремумов) в окрестностях точек  $t = \ell/2$  справа и сглаживанию пиков в окрестностях тех же точек слева, что нашло наглядное отражение на рис. 2. При этом  $\|\mathbf{y}^n\|_C$  (см. (30)) с увеличением  $n$  возрастает, в частности,  $\|\mathbf{y}^N\|_C / \|\mathbf{y}^0\|_C = 1.33$ , т. е., как и было доказано, схема (25) неустойчива в  $C$ . Отметим, что при достаточно гладких начальных условиях (36) схема (25) может обеспечивать приемлемую точность. Так, при задании в (36)  $K = 0$  ( $y_0(x)$  – синусоида)  $\max|\delta|$  имеет порядок машинной точности ( $\max|\delta| \approx 10^{-6}$ ), а при больших  $K$ , наоборот, происходит полная потеря точности, например, уже при  $K = 9$  (модуль градиента превосходит число 112)  $\max|\delta| = 0.39$ . Следовательно, схема (25) если и может быть использована для интегрирования уравнения переноса, то только при достаточно гладких начальных условиях.

Таким образом, исследованные схемы показывают, что обобщенные МРК позволяют легко строить устойчивые схемы высоких порядков точности, по крайней мере, для начально-краевых задач с дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка, решения которых имеют большие градиенты. (Так, решение, построенное по схеме 4-го порядка (34), (35) при  $K = 9$  и  $N = 2000$ ,  $M = 1000$  (градиенты по модулю превосходят значение 112), отклоняется от точного менее, чем на  $5.2 \cdot 10^{-4}$ , а при  $K = 29$ , как уже отмечалось, – менее, чем на 5 %.)

Обратимся теперь к другим задачам математической физики, которым соответствуют дифференциальные уравнения в частных производных более высоких порядков. Сначала рассмотрим начально-краевую задачу нестационарной одномерной теплопроводности

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad y(0, x) = y_0(x), \quad y\left(t, \pm \frac{1}{2}\right) = \varphi_{\pm}(t), \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad t \geq 0. \quad (40)$$

Интегрировать эту задачу по  $t$  можно по схеме, аналогичной (16), (17), с той лишь разницей, что функция  $f$  должна зависеть и от  $Y_i''(x)$  – еще одного аргумента.

Для решения задачи (40) используем 1-стадийный метод Радо ПА (неявный метод Эйлера). Тогда получим уравнения  $y^{n+1}(x) = y^n(x) + \tau Y_1''(x)$ ,  $Y_1(x) = y^n(x) + \tau Y_1''(x)$ , откуда

$$y^{n+1}(x) = Y_1(x), \quad \tau Y_1''(x) - Y_1(x) = -y^n(x). \quad (41)$$

Исследуем спектральную устойчивость схемы (41), используя идею метода разделения переменных [9, 10]. А именно, предположим, что

$$y^n(x) = a_k^n \sin(\lambda_k x), \quad \lambda_k = 2\pi(2k + 1), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (42)$$

где  $\sin(\lambda_k x)$  –  $2k$ -я собственная функция задачи теплопроводности (40) [12]. Тогда решение второго из уравнений (41) при граничных условиях  $Y_1(\pm 0.5) = y^{n+1}(\pm 0.5) = 0$  имеет вид  $y^{n+1}(x) = a_k^{n+1} \sin(\lambda_k x)$ , где постоянные  $a_k^{n+1}$ ,  $a_k^n$  связаны соотношением

$$a_k^{n+1} = R(\tau \lambda_k^2) a_k^n, \quad R(\tau \lambda_k^2) = (1 + \tau \lambda_k^2)^{-1}. \quad (43)$$

Функцию  $R$  по аналогии с терминологией, принятой в [2], целесообразно назвать функцией устойчивости обобщенного МРК для задачи теплопроводности. Так как при любых  $\tau > 0$ ,  $\lambda_k$  функция  $R$  удовлетворяет неравен-

ствам  $0 < R < 1$ , то любое возмущение коэффициента  $a_k^n$  затухает с удалением от  $n$ -го слоя, а значит, метод (41) абсолютно устойчив по  $t$ . Граничную задачу для конечно-разностного аналога (КРА) второго из уравнений (41)

$$\tau(y_{m-1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m+1}^{n+1})/h^2 - y_m^{n+1} = -y_m^n, \quad y_m^{n+1} = Y_1^m, \quad (44)$$

можно проинтегрировать с помощью метода прогонки [10]. Прогонка для уравнения (44) устойчива, поэтому метод (41), (44) в целом устойчив, по крайней мере, по энергетической норме. (Отметим, что уравнение (44) соответствует известной в теории разностных схем абсолютно устойчивой по энергетической норме схеме с опережением [10], имеющей 1-й порядок точности по  $\tau$  и 2-й порядок – по  $h$ .)

Используем для интегрирования задачи (40) 1-стадийный метод Гаусса – Лежандра. Тогда получим  $y^{n+1} = y^n + \tau Y_1''$ ,  $Y_1 = y^n + \tau Y_1''/2$ , откуда

$$y^{n+1}(x) = 2Y_1(x) - y^n(x), \quad \tau Y_1''(x) - 2Y_1(x) = -2y^n(x). \quad (45)$$

Если из второго из уравнений (45) за счет первого равенства исключить функцию  $Y_1$ , а затем вторые производные заменить их КРА, построенными на 3-точечном шаблоне с постоянным шагом  $h$ , то получим в итоге классическую симметричную 6-точечную схему [10], абсолютно устойчивую по энергетической норме и имеющую 2-й порядок точности по  $\tau$  и  $h$ .

После анализа уравнений (45) по схеме (42), (43) получим, что функция устойчивости  $R$ , соответствующая им, имеет вид

$$R(\tau\lambda_k^2) = (2 - \tau\lambda_k^2)(2 + \tau\lambda_k^2)^{-1}. \quad (46)$$

Отсюда следует, что  $|R| < 1$  для любых  $\tau\lambda_k^2 > 0$ , т.е. метод (45) абсолютно устойчив по  $t$ , но при некоторых  $\tau\lambda_k^2 > 0$  может оказаться, что

$$-1 < R(\tau\lambda_k^2) < 0, \quad (47)$$

например,  $R(\tau\lambda_0^2) = -0.33$  при  $\tau = 0.1$  и  $R(\tau\lambda_1^2) = -0.28$  при  $\tau = 0.01$ .

Из теории уравнений математической физики [12] известно, что решение однородного уравнения теплопроводности (40) при нулевых граничных условиях  $\varphi_{\pm}(t) = 0$  монотонно убывает по  $t$ . В случае же выполнения неравенств (47) коэффициенты  $a_k^{n+1}$ ,  $a_k^n$  имеют разные знаки, т.е. последовательность  $a_k^n$  знакопеременна и с увеличением  $n$  стремится к нулю. Следовательно, в этом случае приближенное решение не удовлетворяет условию монотонного убывания по  $t$  и искусственно порождает эффект фиктивных тепловых колебаний, не имеющих места в действительности. Очевидно, что эта особенность решения уравнений (45) переносится и на решение их КРА – симметричную 6-точечную схему. Насколько известно авторам, эта особенность симметричной 6-точечной схемы в классической теории разностных схем не была подмечена и объяснена. (Нетрудно видеть, что при использовании схемы с опережением (41), (44) при любых  $\tau\lambda_k^2 > 0$  функция устойчивости (43) удовлетворяет неравенствам  $0 < R < 1$ , т.е. схема (44) удовлетворяет требованию монотонности решения по  $t$ .)

Авторами были исследованы и другие МРК применительно к интегрированию задачи (40). Так, в силу линейности этой задачи 2-стадийные методы Лобатто IIIA, IIIB приводят в конечном итоге к симметричной 6-точечной схеме, а из всех МРК 2-го порядка точности по  $\tau$  только 2-стадийный метод Лобатто IIIC удовлетворяет требованию монотонности решения по  $t$ . Уравнения этого метода имеют вид

$$y^{n+1} = y^n + \tau(Y_1'' + Y_2'')/2,$$

$$Y_1 = y^n + \tau(Y_1'' - Y_2'')/2, \quad Y_2 = y^n + \tau(Y_1'' + Y_2'')/2, \quad (48)$$

а функция устойчивости определяется равенством  $R = (1 + 2\gamma_k + 2\gamma_k^2)^{-1}$ ,  $\gamma_k = \tau\lambda_k^2/2$ . Очевидно, что  $0 < R < 1$  при любых  $\tau\lambda_k^2 > 0$ .

Следует отметить, что схемы (45), (48) имеют 2-й порядок по  $\tau$ , но для реализации метода (45) нужно проинтегрировать на каждом слое только одно уравнение относительно  $Y_1$  (второе из уравнений (45)), а для реализации схемы (48) нужно проинтегрировать уже систему двух уравнений относительно  $Y_1, Y_2$  (второе и третье из уравнений (48)). Такое усложнение метода (48) окупается выполнением требования монотонности решения по  $t$ . Матричная прогонка [11] для 3-точечных КРА двух последних уравнений (48), как легко получить, устойчива, поэтому в целом этот метод абсолютно устойчив по энергетической норме и имеет 2-й порядок по  $\tau$  и  $h$ .

Из всех обобщенных МРК 4-го порядка по  $\tau$  самым «удобным» для интегрирования задачи (40) является 3-стадийный метод Лобатто ШВ:

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + \tau[Y_1''(x) + 4Y_2''(x) + Y_3''(x)]/6,$$

$$Y_1(x) = y^n(x) + \tau[Y_1''(x) - Y_2''(x)]/6,$$

$$Y_2(x) = y^n(x) + \tau[Y_1''(x) + 2Y_2''(x)]/6,$$

$$Y_3(x) = y^n(x) + \tau[Y_1''(x) + 5Y_2''(x)]/6, \quad (49)$$

так как его функция устойчивости имеет вид

$$R(\tau\lambda_k^2) = (1 - 3\gamma_k + 3\gamma_k^2)(1 + 3\gamma_k + 3\gamma_k^2)^{-1}, \quad \gamma_k = \tau\lambda_k^2/6, \quad (50)$$

(т.е. метод абсолютно устойчив и удовлетворяет требованию монотонности решения по  $t$ :  $0 < R < 1$ ) и при реализации схемы (49) для каждого  $n$  необходимо интегрировать граничную задачу для системы двух уравнений относительно  $Y_1, Y_2$  (второе и третье уравнения (49)). Следовательно, реализация этого метода требует приблизительно тех же вычислительных затрат, что и метода (48), но схема (49) имеет точность на два порядка выше.

Трехстадийный метод Лобатто ША имеет функцию устойчивости (50); для его реализации на каждом слое также необходимо интегрировать систему двух уравнений, но, в отличие от схемы (49), в правых частях этих уравнений предварительно нужно дважды продифференцировать функцию  $y^n(x)$ , что потребует дополнительных вычислительных затрат и приведет к потере точности. Остальные обобщенные МРК 4-го порядка применительно к интегрированию задачи (40) не удовлетворяют требованию монотонности решения по  $t$ , т.е. при определенных значениях  $\tau\lambda_k^2 > 0$  их функции устойчивости удовлетворяют неравенствам (47).

Рассмотрим теперь конкретный пример приближенного интегрирования задачи теплопроводности (40) с большими градиентами решения. А именно, пусть начальное условие имеет вид (36), а граничные условия равны нулю. Точное решение такой задачи теплопроводности известно [12]:

$$y(t, x) = \sum_{k=0}^K 8 \exp(-\lambda_k^2 t) \sin(\lambda_k x) / \lambda_k, \quad (51)$$

и оценка для производной  $\partial y / \partial t$  в начальный момент времени имеет вид

$$\max_x \left| \frac{\partial y(0, x)}{\partial t} \right| = \max_x \left| -8 \sum_{k=0}^K \lambda_k \sin(\lambda_k x) \right| > \max_x |8\lambda_K \sin(\lambda_K x)| = 8\lambda_K. \quad (52)$$

Следовательно, градиенты решения такой задачи будут превосходить по модулю значения  $8\lambda_K = 16\pi(2K + 1)$ , т.е. будут большими по сравнению со значениями функции (51). Так, например,  $\max_x \left| \frac{\partial y(0, x)}{\partial t} \right| > 16\pi > 50$  при  $K = 0$  и  $\max_x \left| \frac{\partial y(0, x)}{\partial t} \right| > 80\pi$  при  $K = 2$ .

На рис. 1 приведены кривые, характеризующие приближенное решение этой задачи, полученное по схеме (49) (4-й порядок по  $\tau$  и 2-й порядок по  $h$ ) при  $K = 2$  и  $\tau = 0.01$ ,  $h = 0.001$ . Кривая 3 соответствует начальному условию (36), кривые 4–7 соответствуют значениям времени  $t = \tau(i - 3)$ , где  $i$  – номер кривой, причем кривые с номерами 4–7, изображенные сплошными линиями, соответствуют приближенному решению, а штриховыми – точному. Сопоставление точного и приближенного решений показывает, что наибольшее отклонение возникает на первом слое  $t = 0.01$  (кривые 4), где градиенты наиболее велики. Максимальное отклонение на этом слое равно по модулю 0.091. С увеличением  $t$  градиенты решения быстро убывают по модулю, и приближенное решение удовлетворительно описывает поведение точного уже на всех последующих слоях (кривые 5–7). Если интегрировать уравнения (49) точно, то не получим принципиального улучшения приближенного решения задачи (40). Улучшить приближенное решение можно лишь за счет использования обобщенных МРК более высоких порядков либо за счет уменьшения  $\tau$ . Так, при  $\tau = 0.001$  кривые, характеризующие точное и приближенное решения, визуально вообще не отличаются.

Кривая 8 на рис. 1 соответствует приближенному решению задачи теплопроводности при  $t = \tau = 0.01$ , полученному по классической симметричной 6-точечной схеме (45). На форме этой кривой отчетливо проявились немонотонность схемы (45) и малый (2-й) порядок точности по  $\tau$ , в силу чего линия 8 ни качественно, ни количественно (наибольшее отклонение от точного решения составляет по модулю 0.28) не отражает поведения точного решения (штриховая линия 4). Следовательно, можно сделать вывод: классические схемы решения нестационарной задачи теплопроводности малопригодны в задачах с большими градиентами решения.

Исследуем теперь вопрос интегрирования при помощи обобщенных МРК начально-краевой задачи колебания струны:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad y(0, x) = y_0(x), \quad \frac{\partial y(0, x)}{\partial t} = z_0(x), \quad y(t, \pm \frac{1}{2}) = 0, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}. \quad (53)$$

В классической теории разностных схем для интегрирования такой задачи используют трехслойные схемы [10], имеющие точность 2-го порядка по  $\tau$ . Покажем, что с помощью обобщенных МРК можно получить двухслойные схемы различных порядков по  $\tau$ . Для этого перепишем уравнение (53) в виде системы

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = z. \quad (54)$$

Для интегрирования системы (54) применим сначала 1-стадийный метод Радо ПА (неявный метод Эйлера):  $z^{n+1}(x) = z^n(x) + \tau Y_1''(x)$ ,  $y^{n+1}(x) = y^n(x) + \tau Z_1(x)$ ,  $Y_1(x) = y^n(x) + \tau Z_1(x)$ ,  $Z_1(x) = z^n(x) + \tau Y_1''(x)$ , откуда

$$y^{n+1}(x) = Y_1(x), \quad z^{n+1}(x) = Z_1(x), \quad \tau^2 Y_1''(x) - Y_1(x) = -y^n(x) - \tau z^n(x). \quad (55)$$

Чтобы исследовать спектральную устойчивость схемы (55), вновь воспользуемся идеей метода разделения переменных. Предположим, что

$$y^n(x) = a_k^n \sin(\lambda_k x), \quad z^n(x) = b_k^n \sin(\lambda_k x), \quad \lambda_k = 2\pi(2k + 1), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (56)$$

Тогда из (55) с учетом граничных условий  $Y_1(\pm 0.5) = 0$  получим

$$y^{n+1}(x) = a_k^{n+1} \sin(\lambda_k x), \quad z^{n+1}(x) = b_k^{n+1} \sin(\lambda_k x), \quad (57)$$

где

$$\begin{aligned} a_k^{n+1} &= c^{-1}(a_k^n + \tau b_k^n), & b_k^{n+1} &= c^{-1}(b_k^n - a_k^n d/\tau), \\ c &= 1 + d > 1, & d &= \tau^2 \lambda_k^2 > 0, \end{aligned} \quad (58)$$

$a_k^0, b_k^0$  – значения, задаваемые в момент  $t = 0$ ;  $\sin(\lambda_k x)$  –  $2k$ -я собственная функция задачи (53) [12].

Используя выражения (58), получим следующее представление:

$$a_k^{n+1} = c^{-m}(\alpha_\ell a_k^\ell + \tau \beta_\ell b_k^\ell), \quad m = n + 1 - \ell, \quad \ell = 0, 1, \dots, n, \quad (59)$$

аналогично

$$a_k^{n+1} = c^{-(m+1)}(\alpha_{\ell-1} a_k^{\ell-1} + \tau \beta_{\ell-1} b_k^{\ell-1}), \quad (60)$$

где  $\alpha_\ell, \beta_\ell$  – коэффициенты, подлежащие определению. После подстановки в (59) выражений  $a_k^\ell = c^{-1}(a_k^{\ell-1} + \tau b_k^{\ell-1})$ ,  $b_k^\ell = c^{-1}(b_k^{\ell-1} - a_k^{\ell-1} d/\tau)$ , подобных (58), и сопоставления результата с (60) получим представления для  $\alpha_{\ell-1}, \beta_{\ell-1}$  через  $\alpha_\ell, \beta_\ell$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{\ell-1} &= \alpha_\ell - d\beta_\ell = \alpha_\ell - (c-1)\beta_\ell, & \beta_{\ell-1} &= \alpha_\ell + \beta_\ell, \\ \ell &= n, n-1, \dots, 2, 1, & \alpha_n &= \beta_n = 1. \end{aligned} \quad (61)$$

Формулы (61) позволяют последовательно определить все коэффициенты  $\alpha_\ell, \beta_\ell$  вплоть до  $\alpha_0, \beta_0$ , поэтому в конечном итоге будем иметь

$$a_k^{n+1} = c^{-(n+1)}\alpha_0 a_k^0 + \tau c^{-(n+1)}\beta_0 b_k^0. \quad (62)$$

Из выражений (61) нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} \alpha_{n-2s} &= p_s(c), & \beta_{n-2s} &= \ell_s(c), & \alpha_{n-(2s-1)} &= \bar{p}_s(c), \\ \beta_{n-(2s-1)} &= \bar{\ell}_{s-1}(c), & s &= 1, 2, \dots, s_*, \end{aligned} \quad (63)$$

где  $s_*$  определяется одной из формул  $n = 2s_*$  или  $n = 2s_* - 1$ ;  $p_s, \bar{p}_s, \ell_s, \bar{\ell}_{s-1}$  – полиномы порядка  $s$  и  $s-1$  соответственно, в частности,

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= 2 - c, & \bar{\ell}_0 &= 2, & p_1 &= 4 - 3c, & \ell_1 &= 4 - c, & \bar{p}_2 &= 8 - 8c + c^2, \\ \bar{\ell}_1 &= 4(2 - c), & p_2 &= 16 - 20c + 5c^2, & \ell_2 &= 16 - 12c + c^2, \\ \bar{p}_3 &= 31 - 45c + 15c^2 - (c-1)^3, & \bar{\ell}_2 &= 32 - 32c + 6c^2, \\ p_3 &= 57 - 91c + 35c^2 - 7(c-1)^3, & \ell_3 &= 63 - 77c + 21c^2 - (c-1)^3, & \dots \end{aligned}$$

Предположим, что  $n = 2s$  ( $s = s_*$ ), тогда из (62), (63) получим

$$a_k^{n+1} = c^{-(n+1)}\alpha_0 a_k^0 + \tau c^{-(n+1)}\beta_0 b_k^0 = c^{-(2s+1)}p_s(c)a_k^0 + \tau c^{-(2s+1)}\ell_s(c)b_k^0. \quad (64)$$

В отношениях  $p_s(c)/c^{2s+1}, \ell_s(c)/c^{2s+1}$  порядок числителей на  $s+1$  меньше порядка знаменателей, поэтому в силу  $c > 1$  имеют место предельные переходы  $p_s(c)/c^{2s+1} \rightarrow 0, \ell_s(c)/c^{2s+1} \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ), а значит, из (64) следует, что

$$a_k^{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (65)$$

Предельный переход, подобный (65), получим и при  $n = 2s - 1$ , т. е. предел (65) имеет место для всех  $n$ , четных и нечетных. Аналогично по схеме (58)–(65) можно доказать, что

$$b_k^{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (66)$$

Из (65), (66) следует абсолютная спектральная устойчивость метода (55) по начальным данным. Прогонка для 3-точечного КРА третьего из уравнений (55) устойчива [10, 11], поэтому в целом метод устойчив и имеет 1-й порядок точности по  $\tau$  и 2-й порядок – по  $h$ .

Применим для интегрирования задачи (53), (54) 1-стадийный метод Гаусса – Лежандра:  $z^{n+1}(x) = z^n(x) + \tau Y_1''(x)$ ,  $y^{n+1}(x) = y^n(x) + \tau Z_1(x)$ ,  $Y_1(x) = y^n(x) + \tau Z_1(x)/2$ ,  $Z_1(x) = z^n(x) + \tau Y_1''(x)/2$ , откуда

$$y^{n+1} = 2Y_1 - y^n, \quad z^{n+1} = 4(Y_1 - y^n)/\tau - z^n, \quad \tau^2 Y_1'' - 4Y_1 = -4y^n - 2\tau z^n. \quad (67)$$

Проведя анализ уравнений (67) по схеме (56)–(58), получим

$$a_k^{n+1} = [(4-d)a_k^n + 4b_k^n \tau]/c, \quad b_k^{n+1} = [(4-d)b_k^n - 4a_k^n d/\tau]/c, \\ c = 4 + d, \quad d = \tau^2 \lambda_k^2. \quad (68)$$

Рассуждая аналогично (58)–(64), для коэффициентов  $a_k^{n+1}$ ,  $b_k^{n+1}$  из (68) получим предельные переходы (65), (66). Отсюда следует абсолютная спектральная устойчивость метода (67) по начальным данным. Так как прогонка для 3-точечного КРА последнего уравнения (67) устойчива, то в целом метод устойчив и имеет 2-й порядок по  $\tau$  и  $h$ .

Для построения схемы 4-го порядка по  $\tau$  можно воспользоваться, например, 3-стадийным методом Лобатто ПИВ:

$$z^{n+1} = z^n + \tau(Y_1'' + 4Y_2'' + Y_3'')/6, \quad y^{n+1} = y^n + \tau(Z_1 + 4Z_2 + Z_3)/6,$$

$$Z_1 = z^n + \tau(Y_1'' - Y_2'')/6, \quad Z_2 = z^n + \tau(Y_1'' + 2Y_2'')/6, \quad Z_3 = z^n + \tau(Y_1'' + 5Y_2'')/6,$$

$$Y_1 = y^n + \tau(Z_1 - Z_2)/6, \quad Y_2 = y^n + \tau(Z_1 + 2Z_2)/6, \quad Y_3 = y^n + \tau(Z_1 + 5Z_2)/6,$$

откуда

$$\tau^2 Y_1'' - 12Y_1 - 12Y_2 = -24y^n - 6\tau z^n, \quad \tau^2 Y_2'' + 12Y_1 = 12y^n, \quad (69)$$

$$Z_1 = 2(2Y_1 + Y_2 - 3y^n)/\tau, \quad Z_2 = 2(Y_2 - Y_1)/\tau, \quad Z_3 = 2(-4Y_1 + Y_2 + 3y^n)/\tau,$$

$$Y_3 = -Y_1 + 2Y_2, \quad y^{n+1} = y^n + 2(Y_2 - Y_1), \quad z^{n+1} = z^n + 12(y^n - Y_1)/\tau. \quad (70)$$

Проанализировав решение системы (69), (70) по схеме (56)–(58), получим

$$a_k^{n+1} = a_k^n + 12 \frac{(12-d)(4a_k^n + \tau b_k^n) - 2(24+d)a_k^n}{144 + d(12+d)}, \\ b_k^{n+1} = b_k^n + \frac{12}{\tau} \left[ a_k^n - \frac{144a_k^n + 6d(\tau b_k^n + 4a_k^n)}{144 + d(12+d)} \right], \quad d = \tau^2 \lambda_k^2 > 0. \quad (71)$$

Используя эти выражения, по схеме, аналогичной (58)–(64), можно доказать, что имеют место предельные переходы (65), (66). Отсюда следует абсолютная спектральная устойчивость метода (69), (70) по начальным данным. Матричная прогонка для 3-точечного КРА системы уравнений (69) устойчива [11], поэтому метод в целом устойчив и имеет 4-й порядок точности по  $\tau$  и 2-й – по  $h$ .

Обратим внимание на то, что методы (49), (69), (70) имеют 4-й порядок точности по  $\tau$ , но для их реализации на каждом слое необходимо интегрировать граничную задачу для системы двух обыкновенных дифференци-



альных уравнений второго порядка относительно функций  $Y_1, Y_2$ . Решать эти граничные задачи можно численно с помощью методов конечных разностей [10]. Так, используя 3-точечные КРА этих уравнений на регулярной сетке с шагом  $h$ , получим приближенное решение соответствующих задач с точностью 2-го порядка по  $h$ , т.е. точность по  $h$  в этих случаях будет на два порядка ниже, чем по  $\tau$ . Для повышения точности решения по  $h$  можно использовать 5-точечные КРА или следующий подход. Уравнения (69) (или второе и третье из уравнений (49)) запишем в векторной форме

$$\mathbf{Y}''(x) + \mathbf{C}\mathbf{Y}(x) = \mathbf{Q}(x), \quad (72)$$

где  $\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2\}^\top$ ;  $\mathbf{Q}$  – двухкомпонентный вектор правых частей, в частности, для системы (69)  $\mathbf{Q} = \{-24y^n/\tau^2 - 6z^n/\tau, 12y^n/\tau^2\}^\top$ ;  $\mathbf{C}$  – известная квадратная матрица второго порядка, в частности, для системы (69)  $c_{22} = 0$ ,  $c_{11} = c_{12} = -c_{21} = -12/\tau^2$  (в общем случае компоненты  $c_{ij}$  могут зависеть от  $x$ ). Граничные условия для системы (72), заданные в точках  $x = x^0, x^1, x^0 < x^1$ , и естественно вытекающие из граничных условий соответствующей начально-краевой задачи (40) или (53), в общем виде имеют следующее представление:

$$\mathbf{P}_0\mathbf{Y}'(x^0) = \mathbf{F}_0\mathbf{Y}(x^0) + \mathbf{G}_0, \quad \mathbf{P}_1\mathbf{Y}'(x^1) = \mathbf{F}_1\mathbf{Y}(x^1) + \mathbf{G}_1, \quad (73)$$

где  $\mathbf{P}_i, \mathbf{F}_i$  – заданные квадратные матрицы второго порядка;  $\mathbf{G}_i$  – заданные двухкомпонентные векторы (в частности, для начально-краевой задачи (53)  $\mathbf{P}_i = \mathbf{0}, \mathbf{F}_i = \mathbf{I}, \mathbf{G}_i = \mathbf{0}, i = 0, 1$ ,  $\mathbf{I}$  – единичная матрица).

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\mathbf{D}(x)\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y}(x) + \mathbf{B}(x), \quad (74)$$

где  $\mathbf{D}, \mathbf{A}$  – квадратные матрицы второго порядка;  $\mathbf{B}$  – двухкомпонентные векторы; компоненты матриц  $\mathbf{D}, \mathbf{A}$  и вектора  $\mathbf{B}$  подлежат определению. Продифференцируем уравнение (74) и, используя уравнение (72), исключим из результата производную  $\mathbf{Y}''$ . Тогда получим

$$(\mathbf{D}'(x) - \mathbf{A}(x))\mathbf{Y}'(x) = (\mathbf{A}'(x) + \mathbf{D}(x)\mathbf{C})\mathbf{Y}(x) + (\mathbf{B}'(x) - \mathbf{D}(x)\mathbf{Q}(x)). \quad (75)$$

Из сопоставления уравнений (74), (75) следует система равенств

$$\mathbf{A}'(x) - \mathbf{A}(x) + \mathbf{D}(x)\mathbf{C} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{D}'(x) - \mathbf{A}(x) - \mathbf{D}(x) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{B}'(x) - \mathbf{B}(x) = \mathbf{D}(x)\mathbf{Q}(x). \quad (76)$$

Уравнения (76) образуют замкнутую систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Начальные условия для системы (76) можно получить из сопоставления уравнения (74) с граничными условиями (73) в одной из точек  $x = x^0$  или  $x = x^1$ . Так, из (74) и второго из условий (73) следует

$$\mathbf{D}(x^1) = \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{A}(x^1) = \mathbf{F}_1, \quad \mathbf{B}(x^1) = \mathbf{G}_1. \quad (77)$$

Интегрируя начальную задачу (76), (77), двигаясь от  $x = x^1$  к  $x = x^0$  (в обратном направлении), определим компоненты матриц  $\mathbf{D}, \mathbf{A}$  и вектора  $\mathbf{B}$  во всех точках  $x^0 \leq x \leq x^1$ . Тогда первое из граничных условий (73) и уравнение (74), рассмотренное в точке  $x = x^0$ , образуют замкнутую СЛАУ относительно  $\mathbf{Y}'(x^0), \mathbf{Y}(x^0)$ . В случае невырожденности этой системы из

нее можно однозначно определить начальные условия  $\mathbf{Y}(x^0)$  для уравнения (74). В частности, если  $\mathbf{D}(x^0)$  и  $(\mathbf{P}_0\mathbf{D}^{-1}(x^0)\mathbf{A}(x^0) - \mathbf{F}_0)$  – невырожденные матрицы, то

$$\mathbf{Y}(x^0) = (\mathbf{P}_0\mathbf{D}^{-1}(x^0)\mathbf{A}(x^0) - \mathbf{F}_0)^{-1}(\mathbf{G}_0 - \mathbf{P}_0\mathbf{D}^{-1}(x^0)\mathbf{B}(x^0)). \quad (78)$$

Далее, если решение задачи Коши (76), (77) обладает тем свойством, что  $\mathbf{D}(x)$  – невырожденная матрица в точках  $x^0 \leq x < x^1$ , то из уравнения (74) получим

$$\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{D}^{-1}(x)\mathbf{A}(x)\mathbf{Y}(x) + \mathbf{D}^{-1}(x)\mathbf{B}(x), \quad x^0 \leq x < x^1. \quad (79)$$

Интегрируя начальную задачу (78), (79), двигаясь от  $x = x^0$  к  $x = x^1$  (в прямом направлении), получим искомую векторную функцию  $\mathbf{Y}(x)$ .

Таким образом, интегрирование граничной задачи (72), (73) сводится к последовательному интегрированию задачи Коши (76), (77) и начальной задачи (78), (79). Так как уравнения (76), (79) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка, то для численного интегрирования соответствующих им начальных задач можно использовать обычные неклассические МРК [2] высоких порядков точности, при этом шаг интегрирования  $h$  может быть переменным. Следовательно, такой подход к интегрированию систем уравнений (49), (69) позволяет получать численное решение задач нестационарной теплопроводности и колебания струны высоких порядков точности по  $\tau$  и  $h$ .

Отметим, что интегрировать задачу (53) можно, используя и другой подход. Для этого представим уравнение (53) в виде системы уравнений первого порядка, записанных в инвариантах Римана  $\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ ,

$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial x} = z$ . Эти уравнения являются уравнениями переноса, интегрировать которые можно последовательно и для которых применение обобщенных МРК было исследовано выше.

Обратим внимание на то, что при исследовании вопросов спектральной устойчивости обобщенных МРК применительно к решению задач теплопроводности и колебания струны были использованы представления (42), (56), где  $\sin(\lambda_k x)$  –  $2k$ -е собственные функции этих задач. Те же результаты можно получить, если представить  $y^n(x)$ ,  $z^n(x)$  в (42), (56) в виде  $(2k-1)$ -х собственных функций  $\cos(\mu_k x)$ ,  $\mu_k = \lambda_k/2$ .

Во всех приведенных выше методах, касающихся решения задач теплопроводности и колебания струны, исследовалась спектральная устойчивость по начальным данным. Если решать при помощи обобщенных МРК эти задачи с неоднородными уравнениями, то при переходе с  $n$ -го слоя на  $(n+1)$ -й в уравнениях МРК появятся дополнительные слагаемые (известные функции от  $x$ ) – следствия неоднородности исходных уравнений. Эти функции можно разложить в ряды Фурье по собственным функциям задачи  $(\cos(\mu_k x), \sin(\lambda_k x))$  и применить уже описанные выше алгоритмы исследования устойчивости. Так как коэффициенты в этих разложениях при неограниченном удалении от  $n$ -го слоя стремятся к нулю (см. (43), (46), (50), (65), (66)), то отсюда следует спектральная устойчивость обобщенных МРК по правым частям.

Рассмотрим свободные колебания струны, соответствующие различным собственным формам, т. е. начальные условия в (53) зададим в виде

$$\begin{aligned} y_0(x) &= \cos(\mu_k x) \quad (\text{или} \quad y_0(x) = \sin(\lambda_k x)), \\ z_0(x) &= 0, \quad -0.5 \leq x \leq 0.5. \end{aligned}$$

Точное решение задачи (53) с такими начальными условиями имеет вид [12]

$$y(x, t) = \cos(\mu_k t) \cos(\mu_k x) \quad (\text{или} \quad y(x, t) = \cos(\lambda_k t) \sin(\lambda_k x)),$$

$$\mu_k = \lambda_k/2, \quad \lambda_k = 2\pi(2k + 1), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (80)$$

На рис. 3 приведены кривые, характеризующие движение центральной точки струны ( $x = 0$ ) при колебаниях по первой собственной форме ( $k = 0$ ,  $\mu_0 = \pi$ ). Процесс колебания рассматривается в течение времени  $T$ , равном 10-ти периодам колебаний первой собственной формы ( $T = 20$ ). Кривая 1

соответствует точному решению (80) при  $x = 0$ ,  $k = 0$ . Кривая 2 получена по схеме Радо ПА (55) (1-й порядок точности по  $\tau$ ) при разбивке прямоугольной области  $G: 0 \leq t \leq T$ ,  $-0.5 \leq x \leq 0.5$  на 101 слой по  $t$  ( $t_n = n\tau$ ,  $\tau = T/N$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $N = 100$ ) и каждого слоя на 101 узел по  $x$  ( $x_m = -0.5 + mh$ ,  $h = 1/M$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$ ,  $M = 100$ ), т.е. при разбивке каждого периода колебаний на 10 слоев.

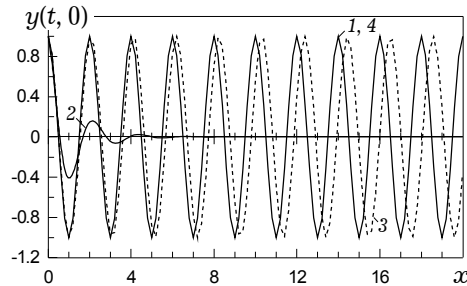


Рис. 3

Быстрое затухание кривой 2 отражает устойчивость метода, которая была доказана выше (см. (65), (66)). (Если разбить один период колебаний ( $t = 2$ ) на 1000 слоев, то метод (55) за время  $0 \leq t \leq 2$  дает ошибку менее 2 %, что свидетельствует о его сходимости.) Пунктирная кривая 3 на рис. 3 соответствует решению, полученному по схеме Гаусса – Лежандра (67) (2-й порядок точности по  $\tau$ ) при  $N = M = 100$ , кривая 4 получена по схеме (69), (70) (4-й порядок точности по  $\tau$ ) при тех же значениях  $N$ ,  $M$ . Линия 4 визуально не отличается от кривой 1 (точного решения), так как максимальное отклонение от точного решения по модулю не превышает  $6.7 \cdot 10^{-4}$ . Сравнение кривых 1, 3 показывает, что численное решение по схеме (67) приводит к запаздыванию, которое накапливается с течением времени (кривая 2 также указывает на запаздывание решения (55)). Качественно аналогичные результаты были получены и при рассмотрении высших форм колебаний струны. Так как эти формы осциллируют быстрее, чем первая собственная форма, то при численном интегрировании соответствующих начально-краевых задач по схемам (55), (67) наблюдается большее отставание от точного решения (80) за фиксированные промежутки времени. Схема же (69), (70), (76)–(79) и в этих случаях описывает решение задачи с высокой точностью.

Таким образом, проведенные в настоящей работе исследования позволяют сделать вывод о том, что обобщение МРК на двумерный случай открывает широкие возможности для быстрого и удобного построения устойчивых численных схем высоких порядков точности для интегрирования начально-краевых задач, соответствующих дифференциальным уравнениям в частных производных различных типов. И, что особенно важно, позволяет строить надежные численные схемы для задач с большими и быстроизменяющимися градиентами решения. Обобщенные МРК могут найти широкое применение при интегрировании динамических задач механики деформируемого твердого тела, жидкости и газа, которые описываются гиперболическими системами уравнений первого и второго порядка [5, 8].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант 99-01-00549).

1. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений: В 2 т. – М.: Физматгиз, 1959. – 620 с. – Т. 2.
2. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 334 с.
3. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. – М.: Наука, 1989. – 346 с.
4. Найфэ А. Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. – 536 с.
5. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
6. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М. – Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. – 208 с.
7. Работнов Ю. В. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
8. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 592 с.
9. Рябенский В. С., Филиппов А. Ф. Об устойчивости разностных уравнений. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 172 с.
10. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
11. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
12. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
13. Shu C.-W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes // J. Comput. Phys. – 1988. – 77, No. 2. – P. 439–471.

### ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З ВЕЛИКИМИ ГРАДІЄНТАМИ РОЗВ'ЯЗКУ УЗАГАЛЬНЕНИМИ МЕТОДАМИ РУНГЕ – КУТТА

Запропоновано та апробовано ідею узагальнення методів Рунге – Кутта на двовимірний випадок для наближеного інтегрування початково-крайових задач, які відповідають диференціальним рівнянням з частинними похідними. Показано, що деякі класичні скінченно-різницеві схеми інтегрування рівнянь переносу та нестационарної одновимірної теплопровідності можна отримати як наслідки такого узагальнення. Отримано нові схеми високих порядків точності для різних задач математичної фізики. Доведено стійкість цих схем і наведено результати розрахунків для задач з великими градієнтами розв'язку. На конкретних прикладах показано, що класичні схеми низьких порядків точності незадовільно описують розв'язки таких задач, а схеми високих порядків, побудовані за допомогою запропонованих методів Рунге – Кутта, дають добре наближення до точних розв'язків.

### NUMERICAL INTEGRATION OF INITIALLY BOUNDARY-VALUE PROBLEMS WITH LARGE GRADIENTS OF SOLUTION BY GENERALIZED RUNGE – KUTTA METHODS

The idea of generalization of Runge – Kutta methods on the 2D case for approximate integration of initially boundary-value problems, corresponding to differential equations in partial derivatives, is offered and approved. It is shown, that some classical finite-difference schemes of integration of transport equations and non-stationary one-dimensional heat conductivity equations may be obtained as consequence of such generalization. New schemes of high orders of accuracy for various problems of mathematical physics are obtained. Stability of these schemes is proved and results of calculations for problems with large gradients of solution are given. On the concrete examples it is shown, that classical schemes of low orders of accuracy unsatisfactorily describe the solution of such problems, and the schemes of high orders, constructed by means of the offered generalized Runge – Kutta methods, give good approximations to exact solutions.

Ин-т теорет. и прикл. механики  
СО РАН, Новосибирск

Получено  
18.04.01