УДК 519.624.2

Л. Б. Гнатів, М. В. Кутнів

МОДИФІКОВАНІ ТРИТОЧКОВІ РІЗНИЦЕВІ СХЕМИ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З МОНОТОННИМ ОПЕРАТОРОМ

Для нелінійних крайових задач з монотонним оператором побудовано триточкові різницеві схеми високого порядку точності на нерівномірній сітці. Доведено існування та єдиність розв'язку триточкових різницевих схем, отримано оцінку точності як стосовно до розв'язку $\mathbf{u}(x)$, *так і до потоку* $K(x)d\mathbf{u}/dx$.

Триточкові різницеві схеми (ТРС) високого порядку точності на рівномірній сітці для систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) другого порядку розроблено у роботі [1], а у випадку систем ЗДР з монотонним оператором – у [2].

Модифіковані ТРС високого порядку точності на нерівномірній сітці для скалярних ЗДР другого порядку побудовано та обґрунтовано у роботах [3, 7]. Ці результати у [6] були узагальнені на випадок диференціальних рівнянь, права частина яких містить похідну.

У цій роботі побудовано ТРС порядку точності $\bar{m} = 2[(m+1)/2]$ (тут $[a]$ – ціла частина числа a) для систем ЗДР

$$\frac{d}{dx}\left[K(x)\frac{d\mathbf{u}}{dx}\right] = -\mathbf{f}\left(x, \mathbf{u}, \frac{d\mathbf{u}}{dx}\right), \quad x \in (0,1), \quad \mathbf{u}(0) = \boldsymbol{\mu}_1, \quad \mathbf{u}(1) = \boldsymbol{\mu}_2, \tag{1}$$

де матриця $K(x) = [k_{rs}(x)]_{r,s=1}^{n}$ і вектор-функція $\mathbf{f}(x, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) = \{f_r(x, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi})\}_{r=1}^{n}$ задовольняють умови

$$K(x) = K^*(x), \qquad k_{rs}(x) \in Q^1[0,1],$$

$$c_1 \| \mathbf{u} \|^2 \le (K(x)\mathbf{u}, \mathbf{u}) \le c_2 \| \mathbf{u} \|^2 \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \quad x \in [0,1], \tag{2}$$

$$f_{r\mathbf{u}\boldsymbol{\xi}}(x) \equiv f_r(x, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) \in Q^0[0,1] \qquad \forall \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n,$$

$$f_{rx}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) \equiv f_r(x, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) \in C(\mathbb{R}^{2n}) \qquad \forall x \in [0,1], \tag{3}$$

$$| f_r(x, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) | \le g_r(x) + C_r \sum_{p=1}^{n} (|u_p| + |\xi_p|) \qquad \forall x \in [0,1], \quad \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

$$(\mathbf{f}(x, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}), \mathbf{u} - \mathbf{v}) \le c_3 (\| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|^2 + \| \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta} \|^2)$$

$$\forall x \in [0,1], \quad \mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n, \quad c_3 < \frac{\pi^2}{\pi^2 + 1}, \tag{5}$$

$(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$; $\| \mathbf{u} \| = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}$ – норма вектора; $Q^p[0,1]$ – клас функцій з кусково-неперервними похідними до p-го порядку включно зі скінченною кількістю точок розриву першого роду; $g_r(x) \in L_2[0,1]$; c_1, c_2, c_3, C_r – невід'ємні сталі.

Умови (2)–(5) гарантують існування та єдиність розв'язку задачі (1). У точках розриву вимагаємо виконання умов неперервності розв'язку $\mathbf{u}(x)$ та потоку $K(x)\dfrac{d\mathbf{u}}{dx}$.

Виберемо нерівномірну сітку $\widehat{\omega}_h = \{ x_j \in (0,1),\ j = 1,2,\ldots, N-1,\ h_j = x_j - x_{j-1} > 0,\ h_1 + h_2 + \ldots + h_N = 1 \}$ так, щоб точки розриву матриці $K(x)$ та вектор-функції $\mathbf{f}(x,\mathbf{u},\boldsymbol{\xi})$ збігались з вузлами сітки.

Аналогічно до скалярного випадку [6] точна триточкова різницева схема буде мати вигляд

$$(A\mathbf{u}_{\bar{x}})_{\hat{x}} = -\,\boldsymbol{\varphi}(x,\mathbf{u}), \qquad x \in \widehat{\omega}_h, \qquad \mathbf{u}(0) = \boldsymbol{\mu}_1, \qquad \mathbf{u}(1) = \boldsymbol{\mu}_2, \tag{6}$$

$$\mathbf{u}_{\bar{x},j} = \frac{\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{j-1}}{h_j}, \qquad \mathbf{u}_{\hat{x},j} = \frac{\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{u}_j}{\hbar_j}, \qquad \hbar_j = \frac{h_j + h_{j+1}}{2},$$

$$A(x_j) = h_j\left[V_1^j(x_j)\right]^{-1},$$

$$\boldsymbol{\varphi}(x_j,\mathbf{u}) = \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha}\left[\boldsymbol{\ell}_{\alpha}^j(x_j,\mathbf{u}) + (-1)^{\alpha}\,\frac{\mathbf{w}_{\alpha}^j(x_j,\mathbf{u})}{V_{\alpha}^j(x_j)}\right], \tag{7}$$

де

$$V_1^j(x) = \int\limits_{x_{j-1}}^{x}\frac{1}{K(t)}\,dt, \qquad V_2^j(x) = \int\limits_{x}^{x_{j+1}}\frac{1}{K(t)}\,dt,$$

функції $\mathbf{w}_{\alpha}^j(x,\mathbf{u})$, $\boldsymbol{\ell}_{\alpha}^j(x,\mathbf{u})$ − розв’язки задач Коші

$$\frac{d\mathbf{w}_{\alpha}^j(x,\mathbf{u})}{dx} = K^{-1}(x)\boldsymbol{\ell}_{\alpha}^j(x,\mathbf{u}),$$

$$\frac{d\boldsymbol{\ell}_{\alpha}^j(x,\mathbf{u})}{dx} = -\mathbf{f}\left(x, \mathbf{Y}_{\alpha}^j(x,\mathbf{u}), \frac{d\mathbf{Y}_{\alpha}^j(x,\mathbf{u})}{dx}\right), \qquad x \in (x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}), \tag{8}$$

$$\mathbf{w}_{\alpha}^j(x_{j+(-1)^{\alpha}},\mathbf{u}) = \boldsymbol{\ell}_{\alpha}^j(x_{j+(-1)^{\alpha}},\mathbf{u}) = 0, \quad \alpha = 1,2, \quad j = 1,2,\ldots,N-1, \tag{9}$$

$$\mathbf{Y}_{\alpha}^j(x,\mathbf{u}) = \hat{\mathbf{u}}(x) + \mathbf{w}_{\alpha}^j(x,\mathbf{u}) - V_{\alpha}^j(x)\left[V_{\alpha}^j(x_j)\right]^{-1}\mathbf{w}_{\alpha}^j(x_j,\mathbf{u}),$$
$$x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}],$$

$$\hat{\mathbf{u}}(x) = V_1^j(x)\left[V_1^j(x_j)\right]^{-1}\mathbf{u}(x_j) + V_2^{j-1}(x)\left[V_1^j(x_j)\right]^{-1}\mathbf{u}(x_{j-1}),$$
$$x \in [x_{j-1}, x_j].$$

Зазначимо, що для точного розв’язку задачі (1) справджується рівність

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{Y}_{\alpha}^j(x,\mathbf{u}), \quad x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], \quad \alpha = 1,2, \quad j = 1,2,\ldots,N-1. \tag{10}$$

Для побудови ТТРС (6), (7) $\forall x_j \in \widehat{\omega}_h$ необхідно розв’язати дві задачі Коші (8), (9): одну ($\alpha = 1$) вперед на відрізку $[x_{j-1}, x_j]$, а другу ($\alpha = 2$) − назад на відрізку $[x_j, x_{j+1}]$, причому обидві мають гладкі коефіцієнти. Застосуємо для їх чисельного розв’язування метод розвинення у ряд Тейлора. Зауважимо, що функції $\mathbf{w}_{\alpha}^j(x,\mathbf{u})$, $\boldsymbol{\ell}_{\alpha}^j(x,\mathbf{u})$, $\alpha = 1,2$, які є розв’язками системи (8), залежать від параметрів $\mathbf{b}_{\alpha} \equiv \mathbf{b}_{\alpha}^j(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{w}_{\alpha}^j(x_j,\mathbf{u})$, тобто $\mathbf{w}_{\alpha}^j(x,\mathbf{u}) \equiv \mathbf{w}_{\alpha}^j(x,\mathbf{u},\mathbf{b}_{\alpha})$, $\boldsymbol{\ell}_{\alpha}^j(x,\mathbf{u}) \equiv \boldsymbol{\ell}_{\alpha}^j(x,\mathbf{u},\mathbf{b}_{\alpha})$, $\alpha = 1,2$. Тоді алгоритм розв’язування задачі (8), (9) має вигляд:

1°. Послідовно диференціюючи (8), знаходимо похідні

$$\frac{d^p \mathbf{w}_\alpha^j(x,\mathbf{u},\mathbf{b}_\alpha)}{dx^p}, \quad p = 2,3,\ldots,\bar{m}, \qquad \frac{d^p \boldsymbol{\ell}_\alpha^j(x,\mathbf{u},\mathbf{b}_\alpha)}{dx^p}, \quad p = 2,3,\ldots,m\,.$$

2°. Визначаємо наближене значення параметрів $\mathbf{b}_\alpha$:

$$\mathbf{b}_\alpha^{(1)} = 0, \qquad \mathbf{b}_\alpha^{(s-1)} \equiv \mathbf{b}_\alpha^{(s-1)j}(\mathbf{u}) = \mathbf{w}_\alpha^{(s-1)j}(x_j,\mathbf{u}) =$$

$$= \sum_{p=2}^{s-1} \frac{\left[(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}\right]^p}{p\,!} \frac{d^p \mathbf{w}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\mathbf{u},\mathbf{b}_\alpha^{(s-2)})}{dx^p}, \qquad s = 3,4,\ldots,\bar{m}\,.$$

3°. Обчислюємо наближений розв'язок задачі (8), (9):

$$\mathbf{w}_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j,\mathbf{u}) = \sum_{p=2}^{\bar{m}} \frac{\left[(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}\right]^p}{p\,!} \frac{d^p \mathbf{w}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\mathbf{u},\mathbf{b}_\alpha^{(\bar{m}-1)})}{dx^p},$$

$$\boldsymbol{\ell}_\alpha^{(m)j}(x_j,\mathbf{u}) = \sum_{p=1}^{m} \frac{\left[(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}\right]^p}{p\,!} \frac{d^p \boldsymbol{\ell}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\mathbf{u},\mathbf{b}_\alpha^{(\bar{m}-1)})}{dx^p}.$$

Справджується

Лема 1. *Нехай*

$$c_1 \|\mathbf{u}\|^2 \le \left(K(x)\mathbf{u},\mathbf{u}\right) \le c_2 \|\mathbf{u}\|^2 \qquad \forall x \in [0,1], \qquad k_{rs}(x) \in Q^{m+1}[0,1],$$

$$f_r(x,\mathbf{u},\boldsymbol{\xi}) \in \bigcup_{j=1}^{N} C^m\left([x_{j-1},x_j] \times \mathbb{R}^{2n}\right).$$

Тоді виконуються такі співвідношення:

$$V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j) = (-1)^{\alpha+1} \sum_{p=1}^{\bar{m}} \frac{\left[(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}\right]^p}{p\,!} \left[\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} \frac{1}{K(x)}\right]\Bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} =$$

$$= V_\alpha^j(x_j) + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+1}), \tag{11}$$

$$\mathbf{w}_\alpha^j(x_j,u) = \mathbf{w}_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j,\mathbf{u}) +$$

$$+ \frac{\left[(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}\right]^{\bar{m}+1}}{(\bar{m}+1)!} \frac{d^{\bar{m}+1} \mathbf{w}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\mathbf{u})}{dx^{\bar{m}+1}} + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+2}), \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\ell}_\alpha^j(x_j,\mathbf{u}) = \boldsymbol{\ell}_\alpha^{(m)j}(x_j,\mathbf{u}) +$$

$$+ \frac{\left[(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}\right]^{m+1}}{(m+1)!} \frac{d^{m+1} \boldsymbol{\ell}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\mathbf{u})}{dx^{m+1}} + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+1}). \tag{13}$$

Д о в е д е н н я. Для доведення рівності (11) розвинемо функції, що стоять зліва, в ряд Тейлора в точках $x_{j+(-1)^\alpha}$ з використанням залишкового члена в інтегральній формі

$$V_\alpha^j(x_j) = \sum_{p=1}^{\bar{m}} \frac{\left[(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}\right]^p}{p\,!} \frac{d^p V_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha})}{dx^p} +$$

$$+ \frac{1}{\bar{m}\,!} \int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x_j} (x_j - t)^{\bar{m}} \frac{d^{\bar{m}+1} V_\alpha^j(t)}{dt^{\bar{m}+1}}\, dt = V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j) + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+1}).$$

Оскільки

$$\frac{d^p V_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha})}{dx^p} = (-1)^{\alpha+1}\left[\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}\frac{1}{K(x)}\right]\Bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}},$$

то отримаємо (11).

Методом математичної індукції доведемо рівності

$$\mathbf{b}_\alpha^{(s-1)} = \mathbf{b}_\alpha + O(h_{j-1+\alpha}^s), \qquad s = 2,3,\ldots,\bar{m}. \tag{14}$$

Для $s = 2$ маємо

$$\mathbf{b}_\alpha = \mathbf{b}_\alpha^{(1)} + O(h_{j-1+\alpha}^2).$$

Припустимо, що рівність (14) справджується для $s = q-1$ і доведемо її виконання для $s = q$. Оскільки

$$\mathbf{b}_\alpha^{(q)} = \mathbf{w}_\alpha^{(q)j}(x_j, \mathbf{u}) = \sum_{p=2}^{q}\frac{\left[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right]^p}{p!}\frac{d^p\mathbf{w}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, \mathbf{u}, \mathbf{b}_\alpha^{(q-1)})}{dx^p} =$$

$$= \sum_{p=2}^{q}\frac{\left[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right]^p}{p!}\frac{d^p\mathbf{w}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, \mathbf{u}, \mathbf{b}_\alpha + O(h_{j-1+\alpha}^q))}{dx^p} =$$

$$= \sum_{p=2}^{q}\frac{\left[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right]^p}{p!}\frac{d^p\mathbf{w}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, \mathbf{u}, \mathbf{b}_\alpha)}{dx^p} + O(h_{j-1+\alpha}^{q+2}),$$

то

$$\mathbf{b}_\alpha = \sum_{p=2}^{q}\frac{\left[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right]^p}{p!}\frac{d^p\mathbf{w}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, \mathbf{u}, \mathbf{b}_\alpha)}{dx^p} +$$

$$+ \frac{1}{q!}\int_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x_j}(x_j - t)^q\,\frac{d^{q+1}\mathbf{w}_\alpha^j(t, \mathbf{u}, \mathbf{b}_\alpha)}{dt^{q+1}}\,dt =$$

$$= \mathbf{w}_\alpha^{(q)j}(x_j, \mathbf{u}) + O(h_{j-1+\alpha}^{q+1}) = \mathbf{b}_\alpha^{(q)} + O(h_{j-1+\alpha}^{q+1}).$$

Крім того,

$$\mathbf{w}_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j, \mathbf{u}) = \sum_{p=2}^{\bar{m}}\frac{\left[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right]^p}{p!}\frac{d^p\mathbf{w}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, \mathbf{u}, \mathbf{b}_\alpha^{(\bar{m}-1)})}{dx^p} =$$

$$= \sum_{p=2}^{\bar{m}}\frac{\left[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right]^p}{p!}\frac{d^p\mathbf{w}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, \mathbf{u}, \mathbf{b}_\alpha)}{dx^p} + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+2}),$$

$$\boldsymbol{\ell}_\alpha^{(m)j}(x_j, \mathbf{u}) = \sum_{p=1}^{m}\frac{\left[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right]^p}{p!}\frac{d^p\boldsymbol{\ell}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, \mathbf{u}, \mathbf{b}_\alpha^{\bar{m}-1})}{dx^p} =$$

$$= \sum_{p=1}^{m}\frac{\left[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right]^p}{p!}\frac{d^p\boldsymbol{\ell}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, \mathbf{u}, \mathbf{b}_\alpha)}{dx^p} + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+1}).$$

Таким чином,

$$\mathbf{w}_{\alpha}^{j}(x_j,\mathbf{u}) = \sum_{p=2}^{\bar{m}+1} \frac{\left[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right]^p}{p!} \frac{d^p \mathbf{w}_{\alpha}^{j}(x_{j+(-1)^{\alpha}},\mathbf{u},\mathbf{b}_{\alpha})}{dx^p} +$$

$$+\frac{1}{(\bar{m}+1)!}\int\limits_{x_{j+(-1)^{\alpha}}}^{x_j}(x_j-t)^{\bar{m}+1}\frac{d^{\bar{m}+2}\mathbf{w}_{\alpha}^{j}(t,\mathbf{u},\mathbf{b}_{\alpha})}{dt^{\bar{m}+2}}dt = \mathbf{w}_{\alpha}^{(\bar{m})j}(x_j,\mathbf{u}) +$$

$$+\frac{\left[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right]^{\bar{m}+1}}{(\bar{m}+1)!}\frac{d^{\bar{m}+1}\mathbf{w}_{\alpha}^{j}(x_{j+(-1)^{\alpha}},\mathbf{u},\mathbf{b}_{\alpha})}{dx^{\bar{m}+1}} + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+2}),$$

$$\boldsymbol{\ell}_{\alpha}^{j}(x_j,\mathbf{u}) = \sum_{p=1}^{m+1} \frac{\left[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right]^p}{p!} \frac{d^p \boldsymbol{\ell}_{\alpha}^{j}(x_{j+(-1)^{\alpha}},\mathbf{u},\mathbf{b}_{\alpha})}{dx^p} +$$

$$+\frac{1}{(m+1)!}\int\limits_{x_{j+(-1)^{\alpha}}}^{x_j}(x_j-t)^{m+1}\frac{d^{m+2}\boldsymbol{\ell}_{\alpha}^{j}(t,\mathbf{u},\mathbf{b}_{\alpha})}{dt^{m+2}}dt = \boldsymbol{\ell}_{\alpha}^{(m)j}(x_j,\mathbf{u}) +$$

$$+\frac{\left[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right]^{m+1}}{(m+1)!}\frac{d^{m+1}\boldsymbol{\ell}_{\alpha}^{j}(x_{j+(-1)^{\alpha}},\mathbf{u},\mathbf{b}_{\alpha})}{dt^{m+1}} + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+1}).$$

Лему доведено. ◊

Замість ТТРС (6), (7) можна тепер скористатись ТРС $\bar{m}$-го рангу вигляду

$$(A^{(\bar{m})}\mathbf{y}_{\bar{x}}^{(\bar{m})})_{\hat{x}} = -\boldsymbol{\varphi}^{(\bar{m})}(x,\mathbf{y}^{(\bar{m})}), \qquad x\in\hat{\omega}_h, \quad \mathbf{y}^{(\bar{m})}(0)=\boldsymbol{\mu}_1, \quad \mathbf{y}^{(\bar{m})}(1)=\boldsymbol{\mu}_2. \tag{15}$$

$$A^{(\bar{m})}(x_j) = \left[\frac{1}{h_j}V_1^{(\bar{m})j}(x_j)\right]^{-1},$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{(\bar{m})}(x_j,\mathbf{u}) = \hbar_j^{-1}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha}\left[\boldsymbol{\ell}_{\alpha}^{(m)j}(x_j,\mathbf{u}) + (-1)^{\alpha}\frac{\mathbf{w}_{\alpha}^{(\bar{m})j}(x_j,\mathbf{u})}{V_{\alpha}^{j}(x_j)}\right].$$

Для доведення існування і єдиності розв'язку ТРС (15), а також для встановлення її точності необхідна

Лема 2. *Нехай виконуються умови леми* 1. *Тоді мають місце оцінки*

$$\left\| A^{(\bar{m})}(x_j) - A(x_j)\right\| \le M\,|\,h\,|^{\bar{m}}, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{(\bar{m})}(x_j,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varphi}(x_j,\mathbf{u}) =$$

$$= \left\{ h_j^{m+1}\left[\frac{1}{(m+2)!}K(x_j-0)\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\left(\frac{\boldsymbol{\ell}_2^{j-1}(x,\mathbf{u})}{K(x)}\right)\Bigg|_{x=x_j-0} - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\left(\frac{1}{(m+1)!}\frac{d^{m+1}\boldsymbol{\ell}_2^{j-1}(x,\mathbf{u})}{dx^{m+1}}\right)\Bigg|_{x=x_j-0}\right]\right\}_{\hat{x}} + O\left(\frac{h_j^{m+2}+h_{j+1}^{m+2}}{\hbar_j}\right), \tag{17}$$

якщо m *– непарне, і*

$$\boldsymbol{\varphi}^{(\bar{m})}(x_j,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varphi}(x_j,\mathbf{u}) = \left\{\frac{h_j^m}{(m+1)!}K(x_j-0)\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\boldsymbol{\ell}_2^{j-1}(x,\mathbf{u})}{K(x)}\right)\Bigg|_{x=x_j-0}\right\}_{\hat{x}} +$$

$$+O\left(\frac{h_j^{m+1}+h_{j+1}^{m+1}}{\hbar_j}\right), \tag{18}$$

якщо m *– парне.*

Д о в е д е н н я. Нерівність (16) випливає з (11). Справді,

$$A^{(\bar m)}(x_j) - A(x_j) = \frac{h_j\left[V_1^j(x_j) - V_1^{(\bar m)j}(x_j)\right]}{V_1^{(\bar m)j}(x_j)V_1^j(x_j)} = O(h_j^{\bar m}).$$

Доведемо (17), (18). Зауважимо, що

$$\boldsymbol{\varphi}^{(\bar m)}(x_j,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varphi}(x_j,\mathbf{u}) = \hbar_j^{-1}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha}\left\{\boldsymbol{\ell}_{\alpha}^{(m)j}(x_j,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\ell}_{\alpha}^{j}(x_j,\mathbf{u}) + \right.$$

$$\left. + (-1)^{\alpha}\left[\frac{\mathbf{w}_{\alpha}^{(\bar m)j}(x_j,\mathbf{u})}{V_{\alpha}^{(\bar m)j}(x_j)} - \frac{\mathbf{w}_{\alpha}^{j}(x_j,\mathbf{u})}{V_{\alpha}^{j}(x_j)}\right]\right\}. \tag{19}$$

За лемою 1 маємо

$$\frac{\mathbf{w}_{\alpha}^{(\bar m)j}(x_j,\mathbf{u})}{V_{\alpha}^{(\bar m)j}(x_j)} - \frac{\mathbf{w}_{\alpha}^{j}(x_j,\mathbf{u})}{V_{\alpha}^{j}(x_j)} =$$

$$= \frac{\mathbf{w}_{\alpha}^{(\bar m)j}(x_j,\mathbf{u}) - \mathbf{w}_{\alpha}^{j}(x_j,\mathbf{u})}{V_{\alpha}^{j}(x_j)} + \frac{V_{\alpha}^{j}(x_j) - V_{\alpha}^{(\bar m)j}(x_j)}{V_{\alpha}^{j}(x_j)}\cdot\frac{\mathbf{w}_{\alpha}^{(\bar m)j}(x_j,\mathbf{u})}{V_{\alpha}^{(\bar m)j}(x_j)} =$$

$$= \frac{\left[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right]^{\bar m+1}}{(\bar m+1)!}\frac{1}{V_{\alpha}^{j}(x_j)}\frac{d^{\bar m+1}\mathbf{w}_{\alpha}^{j}(x_{j+(-1)^{\alpha}},\mathbf{u})}{dx^{\bar m+1}} + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar m+1}). \tag{20}$$

Співвідношення (19), (13), (20) і $\left[V_{\alpha}^{j}(x_j)\right]^{-1} = \left[h_{j-\alpha+1}K_{j+(-1)^{\alpha}}^{-1} + O(h_{j-\alpha+1}^{2})\right]^{-1}$ при непарному m зводяться до

$$\boldsymbol{\varphi}^{(\bar m)}(x_j,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varphi}(x_j,\mathbf{u}) = \frac{1}{\hbar_j}\left[\frac{h_{j+1}^{m+1}}{(m+2)!}K_{j+1}\frac{d^{m+2}\mathbf{w}_2^{j}(x_{j+1},\mathbf{u})}{dx^{m+2}} - \right.$$

$$- \frac{h_{j}^{m+1}}{(m+2)!}K_{j-1}\frac{d^{m+2}\mathbf{w}_1^{j}(x_{j-1},\mathbf{u})}{dx^{m+2}} - \frac{h_{j+1}^{m+1}}{(m+1)!}\frac{d^{m+1}\boldsymbol{\ell}_2^{j}(x_{j+1},\mathbf{u})}{dx^{m+1}} +$$

$$\left. + \frac{h_{j}^{m+1}}{(m+1)!}\frac{d^{m+1}\boldsymbol{\ell}_1^{j}(x_{j-1},\mathbf{u})}{dx^{m+1}}\right] + O\left(\frac{h_j^{m+2} + h_{j+1}^{m+2}}{\hbar_j}\right), \tag{21}$$

а при парному m – до виразу

$$\boldsymbol{\varphi}^{(\bar m)}(x_j,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varphi}(x_j,\mathbf{u}) = \frac{1}{(m+1)!\,\hbar_j}\left[h_{j+1}^{m}K_{j+1}\frac{d^{m+1}\mathbf{w}_2^{j}(x_{j+1},\mathbf{u})}{dx^{m+1}} - \right.$$

$$\left. - h_j^{m}K_{j-1}\frac{d^{m+1}\mathbf{w}_1^{j}(x_{j-1},\mathbf{u})}{dx^{m+1}}\right] + O\left(\frac{h_j^{m+1} + h_{j+1}^{m+1}}{\hbar_j}\right). \tag{22}$$

Зі співвідношень (10) маємо

$$\mathbf{u}(x) = \hat{\mathbf{u}}(x) + \mathbf{w}_1^{j}(x,\mathbf{u}) - \frac{V_1^{j}(x)}{V_1^{j}(x_j)}\mathbf{w}_1^{j}(x_j,\mathbf{u}) =$$

$$= \hat{\mathbf{u}}(x) + \mathbf{w}_2^{j-1}(x,\mathbf{u}) - \frac{V_2^{j-1}(x)}{V_2^{j-1}(x_{j-1})}\mathbf{w}_2^{j-1}(x_j,\mathbf{u}), \qquad x \in [x_{j-1}, x_j].$$

Тоді

$$\mathbf{w}_1^j(x,\mathbf{u}) = \mathbf{w}_2^{j-1}(x,\mathbf{u}) + \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)}\mathbf{w}_1^j(x_j,\mathbf{u}) -$$

$$-\frac{V_2^{j-1}(x)}{V_2^{j-1}(x_{j-1})}\mathbf{w}_2^{j-1}(x_{j-1},\mathbf{u}), \qquad x \in [x_{j-1}, x_j].$$

Продиференціювавши цю рівність і помноживши на $K(x)$, отримаємо

$$\boldsymbol{\ell}_1^j(x,\mathbf{u}) = \boldsymbol{\ell}_2^{j-1}(x,\mathbf{u}) + \frac{\mathbf{w}_1^j(x_j,\mathbf{u}) + \mathbf{w}_2^{j-1}(x_{j-1},\mathbf{u})}{V_1^j(x_j)}, \qquad x \in [x_{j-1}, x_j].$$

Оскільки за умов леми виконуються співвідношення

$$\frac{d^{m+1}\boldsymbol{\ell}_1^j(x,\mathbf{u})}{dx^{m+1}} = \frac{d^{m+1}\boldsymbol{\ell}_2^{j-1}(x,\mathbf{u})}{dx^{m+1}},$$

$$\frac{d^{m+1}\mathbf{w}_1^j(x,\mathbf{u})}{dx^{m+1}} = \frac{d^{m+1}\mathbf{w}_2^{j-1}(x,\mathbf{u})}{dx^{m+1}} + \frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{1}{K(x)}\right]\frac{\mathbf{w}_1^j(x_j,\mathbf{u}) + \mathbf{w}_2^{j-1}(x_{j-1},\mathbf{u})}{V_1^j(x_j)} =$$

$$= \frac{d^{m+1}\mathbf{w}_2^{j-1}(x,\mathbf{u})}{dx^{m+1}} + O(h_j), \qquad x \in [x_{j-1}, x_j],$$

то згідно з рівністю $K_{j-1} = K_j + O(h_j)$ отримаємо

$$\frac{d^{m+1}\boldsymbol{\ell}_1^j(x_{j-1}+0,\mathbf{u})}{dx^{m+1}} = \frac{d^{m+1}\boldsymbol{\ell}_2^{j-1}(x_j-0,\mathbf{u})}{dx^{m+1}} + O(h_j),$$

$$K(x_{j-1}+0)\frac{d^{m+1}\mathbf{w}_1^j(x_{j-1}+0,\mathbf{u})}{dx^{m+1}} = K(x_j-0)\frac{d^{m+1}\mathbf{w}_2^{j-1}(x_j-0,\mathbf{u})}{dx^{m+1}} + O(h_j). \qquad (23)$$

З урахуванням (23) зі співвідношень (21), (22) випливають оцінки (17), (18). ◊

У просторі сіткових функцій введемо скалярні добутки

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\hat\omega_h} = \sum_{\xi\in\hat\omega_h}\hbar(\xi)\,(\mathbf{u}(\xi),\mathbf{v}(\xi)), \qquad (\mathbf{u},\mathbf{v})_{\hat\omega_h^+} = \sum_{\xi\in\hat\omega_h^+}h(\xi)\,(\mathbf{u}(\xi),\mathbf{v}(\xi))$$

та відповідні норми

$$\|\mathbf{u}\|_{0,2,\hat\omega_h} = (\mathbf{u},\mathbf{u})_{\hat\omega_h}^{1/2}, \qquad \|\mathbf{u}\|_{0,2,\hat\omega_h^+} = (\mathbf{u},\mathbf{u})_{\hat\omega_h^+}^{1/2},$$

$$\|\mathbf{u}\|_{1,2,\hat\omega_h} = \left(\|\mathbf{u}\|_{0,2,\hat\omega_h}^2 + \|\mathbf{u}_{\bar x}\|_{0,2,\hat\omega_h^+}^2\right)^{1/2}, \qquad \hat\omega_h^+ = \hat\omega_h \cup x_N.$$

На основі попередніх тверджень доведемо теорему.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (2)–(5) *та умови леми* 1. *Тоді* $\exists h_0 > 0$ *таке, що* $\forall\{h_j\}_{j=1}^N : |h| = \max_{1\le j\le N} h_j \le h_0$, *і ТРС* (15) *матиме єдиний розв'язок, точність якого характеризується оцінкою*

$$\|\mathbf{y}^{(\bar m)} - \mathbf{u}\|_{1,2,\hat\omega_h}^* = \left[\|\mathbf{y}^{(\bar m)} - \mathbf{u}\|_{0,2,\hat\omega_h}^2 + \left\|K\frac{d\mathbf{y}^{(\bar m)}}{dx} - K\frac{d\mathbf{u}}{dx}\right\|_{0,2,\hat\omega_h}^2\right]^{1/2} \le M|h|^{\bar m},$$

де

$$K(x_j)\frac{d\mathbf{y}^{(\bar m)}(x_j)}{dx} = \frac{h_j\mathbf{y}^{(\bar m)}_{\bar x,j} - \mathbf{w}_1^{(\bar m)j}(x_j,\mathbf{y}^{(\bar m)})}{V_1^{(\bar m)j}(x_j)} + \boldsymbol{\ell}_1^{(m)j}(x_j,\mathbf{y}^{(\bar m)}),$$

стала M *не залежить від* $|h|$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо оператор

$$A_h^{(\bar m)}(x,\mathbf{u}) = B_h^{(\bar m)}\mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}^{(\bar m)}(x,\mathbf{u}), \qquad B_h^{(\bar m)}\mathbf{u} = -(A^{(\bar m)}\mathbf{u}_{\bar x})_{\hat x}.$$

З (16)–(18) випливає співвідношення

$$\left(A_h^{(\bar m)}(x,\mathbf{u}) - A_h^{(\bar m)}(x,\mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{v}\right)_{\hat\omega_h} =$$

$$= \left(A^{(\bar m)}(\mathbf{u}_{\bar x} - \mathbf{v}_{\bar x}), \mathbf{u}_{\bar x} - \mathbf{v}_{\bar x}\right)_{\hat\omega_h} - \left(\boldsymbol{\varphi}^{(\bar m)}(x,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varphi}^{(\bar m)}(x,\mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{v}\right)_{\hat\omega_h} =$$

$$= \left(A_h(x,\mathbf{u}) - A_h(x,\mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{v}\right)_{\hat\omega_h} + O(|h|^{\bar m}),$$

де $A_h(x,\mathbf{u}) = B_h\mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}(x,\mathbf{u})$, $B_h\mathbf{u} = -(A\mathbf{u}_{\bar x})_{\hat x}$. Тоді згідно з нерівністю

$$\left(A_h(x,\mathbf{u}) - A_h(x,\mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{v}\right)_{\hat\omega_h} \ge \frac{c_4}{\pi^2 c_2}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2_{B_h}$$

$\exists h_0 > 0$ таке, що $\forall\{h_j\}_{j=1}^N : |h| \le h_0$ маємо

$$\tilde c_1\|\mathbf{u}\|^2_{0,2,\hat\omega_h} \le \left(A^{(\bar m)}\mathbf{u},\mathbf{u}\right)_{\hat\omega_h},$$

$$\left(A_h^{(\bar m)}(x,\mathbf{u}) - A_h^{(\bar m)}(x,\mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{v}\right)_{\hat\omega_h} \ge c\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2_{B_h^{(\bar m)}} \ge 8c\tilde c_1\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2_{0,2,\hat\omega_h}, \quad (24)$$

де сталі $\tilde c_1 > 0$, $c > 0$. Таким чином, за умови $|h| \le h_0$ оператор $A_h^{(\bar m)}(x,\mathbf{u})$ є сильно монотонним, і при $|h| \le h_0$ ТРС (15) має єдиний розв'язок $\mathbf{y}^{(\bar m)}(x)$, $x \in \hat\omega_h$ (див. [5, с. 461]).

Для похибки $\mathbf{z}(x) = \mathbf{y}^{(\bar m)}(x) - \mathbf{u}(x)$, $x \in \hat\omega_h$, будемо мати задачу

$$\left[A^{(\bar m)}(x)\mathbf{z}_{\bar x}(x)\right]_{\hat x} + \boldsymbol{\varphi}^{(\bar m)}(x,\mathbf{y}^{(\bar m)}) - \boldsymbol{\varphi}^{(\bar m)}(x,\mathbf{u}) =$$

$$= \boldsymbol{\varphi}(x,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varphi}^{(\bar m)}(x,\mathbf{u}) + \left[(A(x) - A^{(\bar m)}(x))\mathbf{u}_{\bar x}(x)\right]_{\hat x}, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}(1) = 0. \quad (25)$$

З (25) отримаємо

$$\left(A_h^{(\bar m)}(x,\mathbf{u}) - A_h^{(\bar m)}(x,\mathbf{y}^{(\bar m)}), \mathbf{z}\right)_{\hat\omega_h} =$$

$$= \left(\boldsymbol{\varphi}^{(\bar m)}(x,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varphi}(x,\mathbf{u}), \mathbf{z}\right)_{\hat\omega_h} + \left((A^{(\bar m)} - A)\mathbf{u}_{\bar x}, \mathbf{z}_{\bar x}\right)_{\hat\omega_h^+}. \quad (26)$$

З урахуванням (24) справджується оцінка

$$\left(A_h^{(\bar m)}(x,\mathbf{u}) - A_h^{(\bar m)}(x,\mathbf{y}^{(\bar m)}), \mathbf{z}\right)_{\hat\omega_h} \ge c\|\mathbf{z}\|^2_{B_h^{(\bar m)}}. \quad (27)$$

За допомогою нерівності Коші – Буняковського, використовуючи (16)–(18), оцінимо праву частину рівності (26):

$$\left((A - A^{(\bar m)})\mathbf{u}_{\bar x}, \mathbf{z}_{\bar x}\right)_{\hat\omega_h^+} \le \left\| A^{(\bar m)} - A\right\|_{0,2,\hat\omega_h}\|\mathbf{u}_{\bar x}\|_{0,2,\hat\omega_h^+}\|\mathbf{z}_{\bar x}\|_{0,2,\hat\omega_h^+} \le$$

$$\le M|h|^{\bar m}\|\mathbf{z}_{\bar x}\|_{0,2,\hat\omega_h^+} \le \frac{M|h|^{\bar m}}{\tilde c_1}\|\mathbf{z}\|_{B_h^{(\bar m)}}, \quad (28)$$

$$(\boldsymbol{\varphi}^{(\bar m)}(x,\mathbf{u})-\boldsymbol{\varphi}(x,\mathbf{u}),\mathbf{z})_{\widehat\omega_h} \le M|h|^{m+1}\|\mathbf{z}_{\bar x}\|_{0,2,\widehat\omega_h^+} \le \frac{M|h|^{m+1}}{\tilde c_1}\|\mathbf{z}\|_{B_h^{(\bar m)}}, \quad (29)$$

якщо m – непарне, і

$$(\boldsymbol{\varphi}^{(\bar m)}(x,\mathbf{u})-\boldsymbol{\varphi}(x,\mathbf{u}),\mathbf{z})_{\widehat\omega_h} \le M|h|^{m}\|\mathbf{z}_{\bar x}\|_{0,2,\widehat\omega_h^+} \le \frac{M|h|^{m}}{\tilde c_1}\|\mathbf{z}\|_{B_h^{(\bar m)}}, \quad (30)$$

якщо m – парне.

З оцінок (28)–(30) випливає, що $\|\mathbf{z}\|_{B_h^{(\bar m)}} \le M|h|^{\bar m}$. Звідси з огляду на еквівалентність норм $\|\cdot\|_{1,2,\widehat\omega_h}$, $\|\cdot\|_{B_h^{(\bar m)}}$ маємо $\|\mathbf{z}\|_{1,2,\widehat\omega_h} \le M|h|^{\bar m}$.

Оскільки згідно з (11)–(13)

$$\begin{aligned}
\left\|K\frac{d\mathbf{z}}{dx}\right\|_{0,2,\widehat\omega_h} &\le \left\|\frac{1}{V_1^{(\bar m)j}}-\frac{1}{V_1^j}\right\|_{0,2,\widehat\omega_h}\cdot\Big[|h|\cdot\|\mathbf{u}_{\bar x}\|_{0,2,\widehat\omega_h^+} + \\
&+\left\|\mathbf{w}_1^j(x,\mathbf{u})\right\|_{0,2,\widehat\omega_h}\Big]+\frac{1}{\left\|V_1^{(\bar m)j}\right\|_{0,2,\widehat\omega_h}}\Big[|h|\cdot\left\|\mathbf{y}_{\bar x}^{(\bar m)}-\mathbf{u}_{\bar x}\right\|_{0,2,\widehat\omega_h^+} + \\
&+\left\|\mathbf{w}_1^j(x,\mathbf{y}^{(\bar m)})-\mathbf{w}_1^j(x,\mathbf{y}^{(\bar m)})\right\|_{0,2,\widehat\omega_h}+\left\|\mathbf{w}_1^j(x,\mathbf{y}^{(\bar m)})-\mathbf{w}_1^j(x,\mathbf{u})\right\|_{0,2,\widehat\omega_h}\Big]+ \\
&+\left\|\boldsymbol{\ell}_1^{(m)j}(x,\mathbf{y}^{(\bar m)})-\boldsymbol{\ell}_1^j(x,\mathbf{y}^{(\bar m)})\right\|_{0,2,\widehat\omega_h}+\left\|\boldsymbol{\ell}_1^j(x,\mathbf{y}^{(\bar m)})-\boldsymbol{\ell}_1^j(x,\mathbf{u})\right\|_{0,2,\widehat\omega_h} \le \\
&\le M_1|h|^{\bar m}+\Bigg[\frac{1}{\left\|V_1^{(\bar m)j}\right\|_{0,2,\widehat\omega_h}}\left\|\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{w}_1^j(x,\mathbf{u})\Big|_{u=\tilde u}\right\|_{0,2,\widehat\omega_h} + \\
&+\left\|\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{\ell}_1^j(x,\mathbf{u})\Big|_{u=\tilde u}\right\|_{0,2,\widehat\omega_h}\Bigg]\cdot\|\mathbf{z}\|_{0,2,\widehat\omega_h} \le M|h|^{\bar m},
\end{aligned}$$

то отримаємо $\|\mathbf{z}\|^*_{1,\infty,\widehat\omega_h} \le Mh^{\bar m}$. Теорему доведено. ◊

Для розв'язування нелінійної ТРС $\bar m$-го порядку точності (15) застосуємо ітераційний метод.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді*

$$\left\|\boldsymbol{\varphi}^{(\bar m)}(x,\mathbf{u})-\boldsymbol{\varphi}^{(\bar m)}(x,\mathbf{v})\right\|_{0,2,\widehat\omega_h} \le \tilde L\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{0,2,\widehat\omega_h},$$

$\exists h_0>0$ *таке, що* $\forall\{h_j\}_{j=1}^N : |h|\le h_0,\ 0<\tilde c_1\|\mathbf{u}\|^2_{0,2,\widehat\omega_h} \le (A^{(\bar m)}\mathbf{u},\mathbf{u})_{0,2,\widehat\omega_h}$, *ітераційний метод*

$$\begin{aligned}
&B_h^{(\bar m)}\frac{\mathbf{y}^{(\bar m,n)}-\mathbf{y}^{(\bar m,n-1)}}{\tau}+A_h^{(\bar m)}(x,\mathbf{y}^{(\bar m,n-1)})=0, \qquad x\in\widehat\omega_h, \\
&\mathbf{y}^{(\bar m,n)}(0)=\boldsymbol{\mu}_1, \qquad \mathbf{y}^{(\bar m,n)}(1)=\boldsymbol{\mu}_2, \qquad n=1,2,\ldots, \\
&\mathbf{y}^{(\bar m,0)}(x)=\frac{V_2(x)}{V_1(1)}\boldsymbol{\mu}_1+\frac{V_1(x)}{V_1(1)}\boldsymbol{\mu}_2, \\
&B_h^{(\bar m)}\mathbf{y}=-(A^{(\bar m)}\mathbf{y}_{\bar x})_{\widehat x}, \qquad A_h^{(\bar m)}(x,\mathbf{y})=B_h^{(\bar m)}\mathbf{y}-\boldsymbol{\varphi}^{(\bar m)}(x,\mathbf{y}),
\end{aligned}$$

з $\tau=\tau_0=\left(1+\dfrac{\tilde L}{8\tilde c_1}\right)^{-2}$ *збігається і для похибки виконується оцінка*

$$\left\| \mathbf{y}^{(\bar{m},n)} - \mathbf{u} \right\|^{*}_{1,2,\hat{\omega}_h} \le M(h^{\bar{m}} + q^n), \qquad q = \sqrt{1-\tau_0}\,,$$

де

$$K(x_j)\frac{d\mathbf{y}^{(\bar{m},n)}(x_j)}{dx} = \frac{h_j \mathbf{y}^{(\bar{m},n)}_{\bar{x},j} - \mathbf{w}_1^{(\bar{m})j}(x_j, \mathbf{y}^{(\bar{m},n)})}{V_1^{(\bar{m})j}(x_j)} + \boldsymbol{\ell}_1^{(m)j}(x_j, \mathbf{y}^{(\bar{m},n)})\,,$$

стала M *не залежить від* $|h|$, m, n.

Д о в е д е н н я аналогічне до доведення теореми 4 з роботи [6] для скалярного випадку ($n = 1$).

Зауваження. Результати роботи справджуються для крайових задач

$$\frac{d}{dx}\left[K(x)\frac{d\mathbf{u}}{dx}\right] = -\mathbf{f}(x,\mathbf{u}), \quad x \in (0,1), \quad \mathbf{u}(0) = \boldsymbol{\mu}_1, \quad \mathbf{u}(1) = \boldsymbol{\mu}_2$$

за умов

$$K(x) = K^*(x), \qquad k_{rs}(x) \in Q^1[0,1]\,,$$

$$c_1\|\mathbf{u}\|^2 \le (K(x)\mathbf{u},\mathbf{u}) \le c_2\|\mathbf{u}\|^2 \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \qquad x \in [0,1]\,,$$

$$f_{r\mathbf{u}}(x) \equiv f_r(x,\mathbf{u}) \in Q^0[0,1] \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\,,$$

$$f_{rx}(\mathbf{u}) \equiv f_r(x,\mathbf{u}) \in C(\mathbb{R}^n) \qquad \forall x \in [0,1]\,,$$

$$|f_r(x,\mathbf{u})| \le g_r(x) + C_r\sum_{p=1}^{n}|u_p| \qquad \forall x \in [0,1], \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\,,$$

$$(\mathbf{f}(x,\mathbf{u}) - \mathbf{f}(x,\mathbf{v}), \mathbf{u}-\mathbf{v}) \le c_3\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \quad \forall x \in [0,1], \quad \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \quad c_3 < \pi^2 c_1\,,$$

які є слабшими, ніж у [2].

Отже, у роботі побудовано та обґрунтовано ТРС на нерівномірній сітці $\bar{m}$-го порядку точності як відносно вектор-функції $\mathbf{u}(x)$, так і потоку $K(x)\,d\mathbf{u}/dx$ для задачі (1)–(5). У перспективі планується розробити ТРС високого порядку точності для систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з крайовими умовами третього роду.

1. *Кутнив М. В.* Трехточечные разностные схемы высокого порядка точности для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2001. – **41**, № 6. – С. 909–921.
2. *Кутнив М. В.* Трехточечные разностные схемы высокого порядка точности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с монотонным оператором // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2002. – **42**, № 5. – С. 754–768.
3. *Кутнів М. В.* Модифіковані триточкові різницеві схеми високого порядку точності для монотонних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46,** № 4. – С. 120–129.
4. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
5. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.
6. *Gnativ L. B., Kutniv M. V.* Modified three-point difference schemes of high accuracy order for second order monotone ordinary differential equations with derivative in the right-hand side // Журн. обчисл. прикл. матем. – 2003. – Вип. 1. – С. 43–65.
7. *Kutniv M. V.* Modified of three-point difference schemes of high-accuracy order for second order nonlinear ordinary differential equations // Comp. Meth. Appl. Math. – 2003. – **3,** No. 2. – P. 287–312.

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ТРЕХТОЧЕЧНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МОНОТОННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Для нелинейных краевых задач с монотонным оператором построены трехточечные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерной сетке. Доказаны существование и единственность решения трехточечных разностных схем, получена оценка точности как в отношении решения $\mathbf{u}(x)$, *так и потока* $K(x)\,d\mathbf{u}/dx$.

MODIFIED THREE-POINT DIFFERENCE SCHEMES OF HIGH-ORDER ACCURACY FOR SYSTEMS OF THE SECOND-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MONOTONE OPERATOR

For nonlinear boundary-value problems with a monotone operator, three-point difference schemes of high-order accuracy on the irregular grid are constructed. The existence and uniqueness of solution to three-point difference schemes is proved and estimate of accuracy of both the solution $\mathbf{u}(x)$ *and flow* $K(x)\,d\mathbf{u}/dx$ *are determined.*

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
28.11.03