УДК 517.95

О. М. Боценюк

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ДРУГОЇ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО НАПІВЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Для розв'язків напівлінійного параболічного рівняння з коефіцієнтами, залежними від часової змінної t, отримано асимптотичну формулу з точністю до експоненціально спадної функції при $t \to +\infty$.

Розглянемо параболічне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t) + F(u) = 0 \tag{1}$$

у циліндричній області $Q = \Omega \times (0,\infty)$, де Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з ліпшицевою межею Γ. У рівнянні (1) еліптичний оператор

$$A(t) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{2}$$

має коефіцієнти a_{ij}, b_i такі, що $a_{ij} \in L^\infty(Q)$, $b_i \in L^\infty(Q)$ і виконується умова

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\,\xi_i\,\xi_j \ge \alpha|\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \alpha > 0, \qquad (x,t) \in Q. \tag{3}$$

У пропонованій роботі вивчаємо поведінку при $t \to +\infty$ слабких розв'язків рівняння (1), які задовольняють початкову та крайову умови

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \times (0,\infty), \tag{4}$$

де ν – напрям зовнішньої конормалі до Γ. У роботі [1, теорема 1] була досліджена асимптотична поведінка розв'язків при $t \to +\infty$ задачі (1), (4) у випадку, коли a_{ij}, b_i не залежать від t, $a_{ij} = a_{ji}$ і $F(u) = a|u|^{\sigma-1}u$, $a > 0$, $\sigma > 1$. Однак в [1] застосовується перетворення Фур'є за змінною t і досліджується резольвента еліптичного оператора, що не дає змоги таким шляхом довести відповідні результати для випадку залежних від t коефіцієнтів. У цій роботі застосовуємо інші методи дослідження задачі (1), (4), ніж в [1]. Це дає можливість розглянути випадок залежних від t коефіцієнтів і дещо узагальнити умови на функцію $F(u)$. Припускаємо, що $F \in C^1(\mathbb{R})$ – непарна функція, $F'(0) = 0$ і $F(u) = f(u)u$, де функція f задовольняє умову

$$c_0|x|^{\sigma-1} \le f'(x)x \le c_1|x|^{\sigma-1} \qquad \forall x \ne 0, \qquad c_0 > 0, \qquad \sigma > 1. \tag{5}$$

Крім того, припускаємо, що існує $F''(x)$ $\forall x \in (0,1)$ і $0 \le F''(x) \le c_2 x^\lambda$ $\forall x \in (0,1)$, де число λ таке, що $-1 < \lambda \le \sigma - 2$. Означимо сім'ю білінійних форм на $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$:

$$a(t;u,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i}\,dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\,w\,dx. \tag{6}$$

За означенням слабким розв'язком задачі (1), (4) назвемо функцію $u(x,t)$ таку, що $u \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$ $\forall T > 0$, $u(0) = u_0$,

$u_0 \in L^\infty(\Omega)$, і $u(t)$ задовольняє наступне рівняння:

$$\frac{d}{dt}(u,w) + a(t;u,w) + (F(u),w) = 0 \qquad \forall w \in H^1(\Omega)\,, \tag{7}$$

де через $(\cdot,\cdot)$ позначено скалярний добуток в $L^2(\Omega)$. Рівність (7) розуміємо в сенсі розподілів на $(0,+\infty)$. Із результатів, викладених у [3], випливає, що $u \in C(Q)$.

Теорема 1. *Якщо* $u(x,t)$ – *слабкий розв'язок задачі* (1), (4) *в* Q, *то*

$$u(x,t) = \delta y(t) + \psi(x,t)\,, \tag{8}$$

де $\psi(x,t) = O(\exp(-\beta t))$ *при* $t \to +\infty$, $\beta = \mathrm{const} > 0$ *від* u *не залежить*, $\delta \in \{-1, 0, +1\}$ *і* $y \in C^1((0,+\infty))$ – *якийсь додатний розв'язок звичайного диференціального рівняння*

$$y'(t) + F(y(t)) = 0, \qquad t > 0\,. \tag{9}$$

Перед д о в е д е н н я м теореми 1 наведемо деякі твердження. Позначимо $V = H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$. Ототожнюючи за теоремою Ріса H і H^*, приходимо до вкладень $V \subset H \subset V^*$, де через H^* і V^* позначаємо простори, спряжені до H і V.

Нехай оператор $A(t) \in L(V,V^*)$ є асоційованим з білінійною формою (6), тобто $\left\langle A(t)u, w \right\rangle = a(t;u,w) \quad \forall u,w \in V$, та означимо оператор $A^*(t) \in L(V,V^*)$ таким чином: $\left\langle A^*(t)u, w \right\rangle = a(t;w,u) \quad \forall u,w \in V$, де через $\left\langle \,\cdot\,,\cdot \right\rangle$ позначаємо скалярний добуток між V^* і V.

Розглянемо таку задачу:

$$-\frac{dv}{dt} + A^*(t)v = 0\,, \qquad \int_\Omega v(x,t)\,dx = 1 \qquad \forall t \geq 0\,. \tag{10}$$

Лема 1. *Існує розв'язок* $v(x,t)$ *задачі* (10) *такий, що* $v \in L^2_{\mathrm{loc}}(0,+\infty;V) \cap$ $\cap\, C([0,+\infty);H)$ *і*

$$0 < a \leq v(x,t) \leq b \qquad \forall (x,t) \in Q, \qquad a,b = \mathrm{const}\,. \tag{11}$$

Д о в е д е н н я. Нехай w_m – розв'язок на $[0,m]$, $m \in \mathbb{N}$, наступної задачі:

$$w_m' + A^*(m-t)\,w_m = 0, \qquad w_m(0) = \omega\,, \tag{12}$$

де $\omega = (\mathrm{mes}\,\Omega)^{-1}$. Помноживши обидві частини рівняння (12) на 1 скалярно в H, отримаємо $\frac{d}{dt}\int_\Omega w_m(x,t)\,dx = 0$, звідки, врахувавши початкову умову (12), дістанемо $\int_\Omega w_m(x,t)\,dx = 1 \quad \forall t \in [0,m]$. На підставі принципу максимуму маємо, що $w_m \geq 0$. Помноживши обидві частини рівняння (12) на w_m скалярно в H і врахувавши обмеженість w_m в $L^1(\Omega)$, отримаємо

$$|w_m(t)|_2 \leq c \qquad \forall t \in (0,m), \qquad \int_t^{t+1} \|\, w_m \,\|_V^2\, ds \leq c \qquad \forall t \in (0, m-1)\,.$$

Тут і надалі літерою c будемо позначати різні додатні сталі, а через $|\cdot|_p$ позначаємо норму в $L^p(\Omega)$. Застосувавши до (12) ітеративний метод Мозера, отримаємо $w_m(x,t) \le b \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t \in (0,m)$, де стала b не залежить від m і w_m. Очевидно, що функція $v_m(t) = w_m(m-t)$ є розв'язком на $(0,m)$ рівняння

$$-v_m' + A^*(t)\,v_m = 0\,, \tag{13}$$

і для v_m мають місце ті ж самі оцінки, що й для w_m. Здійснивши граничний перехід у (13) при $m \to \infty$ на кожному фіксованому інтервалі (T_1, T_2), отримаємо всі твердження леми, крім обмеженості знизу сталою a. Оцінка знизу в (11) випливає із нерівності Гарнака [2] для розв'язків задачі (10). Лему доведено. ◊

Лема 2. *Нехай* $\psi \in L^\infty(\Omega)$, $\psi \ge 0$ *в* Ω. *Тоді*

$$\int_\Omega (u-\mu)^2 \psi\, dx \le c(\Omega)\,\xi \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \qquad \forall u \in H^1(\Omega)\,, \tag{14}$$

де

$$\mu = \left(\int_\Omega u\psi\, dx\right)\left(\int_\Omega \psi\, dx\right)^{-1}, \quad \xi = |\psi|_\infty^2 \left(\int_\Omega \psi dx\right)^{-1}.$$

Д о в е д е н н я випливає з рівності

$$\int_\Omega (u-\mu)^2 \psi\, dx = \left(2\int_\Omega \psi\, dx\right)^{-1} \int_\Omega\int_\Omega [u(x)-u(y)]^2\, \psi(x)\,\psi(y)\, dx\, dy$$

і узагальненої нерівності Пуанкаре. ◊

Д о в е д е н н я теореми 1. Задамо дві сім'ї операторів $P(t)u = (u, v(t))$, $\forall u \in H$, $Q(t)u = u - P(t)u \quad \forall u \in H$, де $v(t)$ − розв'язок задачі (10). Помножимо рівняння (1) на функцію v і проінтегруємо на Ω, де v − розв'язок задачі (10). Тоді, враховуючи (4), (10), одержимо

$$\frac{d}{dt} P(t)u(t) + P(t)F(u(t)) = 0\,. \tag{15}$$

Нехай $u(t)$ − розв'язок задачі (1), (4). Позначимо $u_+(t) = Q(t)u(t)$, $u_-(t) = P(t)u(t)$. Із (1), (15) випливає, що u_+, u_- задовольняють систему рівнянь

$$u_+' + A(t)\,u_+ + Q(t)F(u) = 0\,, \tag{16}$$

$$u_-' + P(t)F(u) = 0\,. \tag{17}$$

Доведемо, що $u_+(t)$ експоненціально спадає за змінною t у нормі $L^2(\Omega)$. Помножимо обидві частини рівняння (16) на u_+v і проінтегруємо на Ω, де v − розв'язок задачі (10). Тоді одержимо

$$\frac{1}{2}\int_\Omega v\,\frac{du_+^2}{dt}\, dx + a(t;\, u_+,\, u_+v) + (Q(t)F(u),\, u_+v) = 0\,. \tag{18}$$

Зазначимо, що для білінійних форм (6), враховуючи (3), (11), маємо

$$a(t;\, u_+,\, u_+v) \ge \alpha\, a \int_\Omega |\nabla u_+|^2\, dx + \frac{1}{2}\, a(t;\, u_+^2,\, v)\,. \tag{19}$$

Із (18), використавши (19), (10), отримаємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega vu_+^2\,dx + \alpha\,a\int_\Omega |\nabla u_+|^2\,dx + \big(Q(t)\big[F(u)-F(u_-)\big],\ u_+v\big) \le 0 .$$

Звідси, застосувавши нерівність (14) для $u = u_+$, $\psi = v$ (тоді $\mu = 0$), матимемо

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega vu_+^2\,dx + c\int_\Omega vu_+^2\,dx \le c\left(\int_\Omega vu_+^2\,dx\right)^{1/2} |F(u)-F(u_-)|_2 .$$

Враховуючи умову (5), звідси за допомогою теореми Лаґранжа про середнє значення для функції F виводимо

$$|u_+(t)|_2 \le c\exp\big[-c(t-t_0)\big]\,|u_+(t_0)|_2 + $$

$$+\,c\int_{t_0}^{t}\exp\big[-c(t-s)\big]\,|u|_\infty^{\sigma-1}\,|u_+|_2\,ds \qquad \forall t \ge t_0 . \tag{20}$$

Зазначимо, що з принципу максимуму маємо $|u(t)|_\infty^{\sigma-1} \le ct^{-1}$ $\forall t > 0$. Тоді, застосувавши до (20) (при $t_0 = 1$) лему Ґронуолла, отримаємо оцінку $|u_+(t)|_2 \le c\,\exp(-\,ct)$ $\forall t \ge 1$.

Покажемо, що $u_+(t)$ експоненціально спадає в $L^\infty(\Omega)$. Нехай функція $\theta(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ така, що $\theta(t) = 0$ $\forall t \le 0$, $\theta(t) = 1$ $\forall t \ge 1$. Розглянемо функцію $u_s(t) = \theta(t-s)u_+(t)$, $s \ge 0$. Із (16) випливає, що $u_s(t)$ є розв'язком рівняння

$$u_s' + A(t)\,u_s + \theta(t-s)\,Q(t)\big[F(u)-F(u_-)\big] = u_+\theta'(t-s) . \tag{21}$$

Аналогічно, як у [3, теорема 7.1], для розв'язків $u_s(t)$ рівняння (21) отримаємо оцінку

$$|u_+(s+1)|_\infty^r \le c\int_s^{s+1}\left(|F(u)-F(u_-)|_q^r + |u_+|_q^r\right)d\tau , \tag{22}$$

де числа q, r задовольняють співвідношення (7.2) з [3, с. 213]. Із (22), враховуючи оцінку $|u(t)|_\infty^{\sigma-1} \le ct^{-1}$ $\forall t > 0$ та оцінку експоненціального спадання для $u_+(t)$ в $L^2(\Omega)$, виводимо

$$|u_+(s+1)|_\infty \le c\,\exp(-\,cs) \qquad \forall s \ge 1 .$$

Із (17) маємо

$$u_-' + F(u_-) = g(t), \qquad g(t) = -P(t)\big[F(u_+ + u_-) - F(u_-)\big]. \tag{23}$$

Використавши нерівність $|F(u_+ + u_-) - F(u_-)| \le c\,|u|^{\sigma-1}\,|u_+|$, отримаємо оцінку $|g(t)| \le c\,\exp(-\,ct)$ $\forall t \ge 1$.

Нехай $y \in C^1((0,+\infty))$ − додатний розв'язок рівняння (9) і функція $z(t)$ така, що $u_-(t) = y(t)z(t)$. Тоді з (23), (9) випливає, що $z(t)$ задовольняє рівняння

$$z' + \big[f(yz) - f(y)\big]z = h, \qquad h \equiv \frac{g}{y} . \tag{24}$$

Лема 3. *Якщо* $z(t)$ *задовольняє рівняння* (24), *то* $z(t) \to \delta$ *при* $t \to +\infty$, *де* $\delta \in \{-1, 0, 1\}$, *причому* δ *не залежить від вибору* y *в* (9).

Д о в е д е н н я. Помноживши обидві частини рівняння (24) на $[f(z)-f(1)]z$ і проінтегрувавши на $[1, t]$, одержимо

$$G(z^2(t)) - f(1)z^2(t) + 2J_1(t) = G(z^2(1)) - f(1)z^2(1) + 2J_2(t), \tag{25}$$

де

$$G(x) = \int_0^x f(\sqrt{s})\,ds, \qquad J_1(t) = \int_1^t [f(yz)-f(y)][f(z)-f(1)]z^2\,ds,$$

$$J_2(t) = \int_1^t h[f(z)-f(1)]z\,ds.$$

Оскільки $z(t)$, $J_2(t)$ обмежені, то з (25) випливає, що $0 \le J_1(t) \le c \quad \forall t \ge 1$. Отже, $J_1(t) \to c$ при $t \to +\infty$, так що з (25) маємо $G(z^2(t)) - f(1)z^2(t) \to c$ при $t \to +\infty$. Тоді $z(t) \to \gamma$ при $t \to +\infty$, де γ − якийсь корінь рівняння $G(\gamma^2) - f(1)\gamma^2 = c$. Припустимо, що $\gamma \notin \{-1, 0, 1\}$. Тоді, використавши умову (5), одержимо

$$\mathcal{K}(y,z) \equiv [f(yz)-f(y)]/[f(z)-f(1)] \ge cy^{\sigma-1} \qquad \forall t \ge t_0,$$

де t_0 є достатньо великим. Маємо

$$J_1(t) = \int_1^t \mathcal{K}(y,z)[f(z)-f(1)]^2 z^2\,ds \ge c(\gamma)\int_{t_0}^t y^{\sigma-1}\,ds \ge$$

$$\ge c(\gamma,\sigma)\int_{t_0}^t f(y)\,ds = c(\gamma,\sigma)\ln\frac{y(t_0)}{y(t)}.$$

Звідси отримаємо, що $J_1(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Отже, прийшли до суперечності, так що $\gamma \in \{-1, 0, 1\}$. Лему доведено. ◊

Нехай $z(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Позначимо $q(t) = f(yz) - f(y)$. Із (24) отримаємо

$$z(t)\exp\left(\int_s^t q(\tau)\,d\tau\right) = z(s) + \int_s^t \exp\left(\int_s^\tau q(\lambda)\,d\lambda\right)h(\tau)\,d\tau. \tag{26}$$

Оскільки $q(t) \le 0 \quad \forall t \ge s$, де s є достатньо великим, то, виконавши граничний перехід у (26) при $t \to +\infty$, матимемо $|z(s)| \le \int_s^{+\infty} |h(\tau)|\,d\tau \le c\exp(-cs)$. Звідси випливає рівність (8) з $\delta = 0$.

Розглянемо випадок, коли $z(t) \to 1$ при $t \to +\infty$. Нехай $\tilde{y}(t)$ − розв'язок рівняння (9) такий, що $\tilde{y}(0) = +\infty$. Розглянемо множину $E = \{\tau \ge 0 : \exists T \ \forall t \ge T \quad |u_-(t)| \le \tilde{y}(t+\tau)\}$. Позначимо $\bar{\tau} = \sup E$. Покажемо, що множина E обмежена. Маємо $u = yz + u_+$. Звідси на підставі того, що u_+ експоненціально спадає, випливає $u(x,t) > c(t) > 0 \quad \forall t \ge t_0, \ \forall x \in \Omega$. Тоді знайдеться таке $\tau \ge 0$, що $u(x,t_0) > \tilde{y}(t_0+\tau)$, звідки з огляду на принцип максимуму отримаємо $u(x,t) \ge \tilde{y}(t+\tau) \quad \forall t \ge t_0, \quad \forall x \in \Omega$. Отже, $\bar{\tau} \le \tau$. Надалі будемо розглядати функцію $z(t)$ тільки таку, що $u_-(t) = \tilde{y}(t+\bar{\tau})z(t)$. Уведемо позначення

$$p(t) = [F(u_-) - F(y)]/(u_- - y), \qquad \varphi = u_- - y, \quad y(t) = \tilde{y}(t+\bar{\tau}).$$

Тоді з (23), (9) випливає, що φ задовольняє рівняння

$$\varphi'(t) + p(t)\varphi(t) = g(t).$$

Інтегруючи це рівняння, отримуємо

$$\varphi(t)\exp\left(\int_s^t p(\tau)\,d\tau\right) = \varphi(s) + \int_s^t \exp\left(\int_s^\tau p(\lambda)\,d\lambda\right) g(\tau)\,d\tau. \tag{27}$$

Розглянемо випадок, коли $\exists t_0 \quad \forall t \ge t_0 \quad \varphi(t) \ge 0$. Оскільки $\bar\tau - \varepsilon$ не є верхньою межею множини E, то одержимо $\varphi(t) = o\left(F(\tilde y(t + \bar\tau))\right)$, $t \to +\infty$. Із формули Тейлора з залишковим членом у формі Лаґранжа для функції F отримаємо $p(t) = F'(y) + \frac{1}{2}F''(\xi)\varphi$, $\xi \in (y, u_-)$. Тоді (вважаючи, що $t \ge s \ge t_0$, де t_0 є достатньо великим) маємо

$$\int_s^t p(\theta)\,d\theta \le \int_s^t F'(\tilde y(\theta + \bar\tau))\,d\theta + c\int_s^t \tilde y(\theta + \bar\tau)^\lambda F(\tilde y(\theta + \bar\tau))\,d\theta \le$$

$$\le \ln\frac{F(\tilde y(s + \bar\tau))}{F(\tilde y(t + \bar\tau))} + c. \tag{28}$$

Спрямувавши $t \to +\infty$ у (27) за допомогою (28), отримаємо

$$\varphi(s) = -\int_s^{+\infty} \exp\left(\int_s^\tau p(\lambda)\,d\lambda\right) g(\tau)\,d\tau,$$

звідки, враховуючи (28), випливає оцінка $\varphi(s) \le c\exp(-cs)$.

Розглянемо випадок, коли $\exists t_0 \quad \forall t \ge t_0 \quad \varphi(t) \le 0$. Тоді маємо $p(t) \le F'(y) \quad \forall t \ge t_0$, і тому $\int_s^t p(\zeta)\,d\zeta \le \ln\frac{F(\tilde y(s + \bar\tau))}{F(\tilde y(t + \bar\tau))}$ для $t \ge s \ge t_0$. Оскільки існує границя правої частини рівності (27) при $t \to +\infty$, то й ліва частина цієї рівності збігається до якогось k_s при $t \to +\infty$. Покажемо, що $k_s = 0$. Оскільки число $\bar\tau + \varepsilon$ не належить множині $E \quad \forall \varepsilon > 0$, то отримаємо

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists t_n \ge n, \qquad \varphi(t_n) > -\varepsilon F(\tilde y(t_n + \bar\tau)).$$

Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Тоді маємо

$$\left|\varphi(t_n)\exp\left(\int_s^{t_n} p\,d\zeta\right)\right| \le \varepsilon F(\tilde y(s + \bar\tau)),$$

звідки випливає $|k_s| \le \varepsilon F(\tilde y(s + \bar\tau)) \quad \forall \varepsilon > 0$. Отже, $k_s = 0$. Спрямувавши $t \to +\infty$ у (27), отримаємо оцінку $|\varphi(s)| \le c\exp(-cs) \quad \forall s \ge t_0$.

Розглянемо випадок, коли $\varphi(t_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ і $t_n \to +\infty$, $n \to \infty$. Тоді, поклавши в (27) $t = t_n$, $t_n > s$ і скориставшись (28), одержимо, що $\varphi(s)$ експоненціально спадає і в цьому випадку. Теорему доведено. ◊

1. *Арефьев В. Н., Кондратьев В. А.* Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи для нелинейных параболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1993. – **29**, № 12. – С. 2104–2116.
2. *Иванов А. В.* Неравенство Гарнака для обобщенных решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова.– 1967. – **102**. – С. 51–84.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ВТОРОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ПОЛУЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Для решений полулинейного параболического уравнения с коэффициентами, зависящими от временной переменной t*, получена асимптотическая формула с точностью до экспоненциально убывающей функции при* $t \to +\infty$.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS TO SECOND INITIALLY BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR SEMILINEAR PARABOLIC EQUATION

For solutions of semi-linear parabolic equation with the coefficients, dependent on the time variable t*, we obtain an asymptotic formula with accuracy up to the exponentially decreasing function with* $t \to +\infty$.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
22.08.02