УДК 517.946

І. Д. Пукальський

ЗАГАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ВИРОДЖЕННЯМ

У просторах класичних функцій зі степеневою вагою доведено існування і єдиність розв'язку загальної крайової задачі для нерівномірно параболічних рівнянь з довільним степеневим порядком виродження коефіцієнтів. Встановлено оцінку розв'язку задачі у відповідних просторах.

Постановка задачі та основний результат. Нехай $\mathcal{D}$ – обмежена випукла область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\mathcal{D}$. Розглянемо в циліндричній області $Q = (0,T)\times\mathcal{D}$ крайову задачу

$$(Lu)(t,x) \equiv \left[D_t - \sum_{|k|\le 2b} A_k(t,x) D_x^k \right] u(t,x) = f_0(t,x)\,, \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x)\,, \tag{2}$$

$$(\mathcal{B}_i u)(t,x)\big|_\Gamma \equiv \left[\sum_{|k|\le r_i} b_k^{(i)}(t,x) D_x^k \right] u(t,x)\big|_\Gamma = f_i(t,x)\,, \tag{3}$$

де $\Gamma = (0,T)\times\partial\mathcal{D}$, $0 \le r_i \le 2b-1$, $i=\overline{1,b}$, $D_x^k = D_{x_1}^{k_1}\ldots D_{x_n}^{k_n}$, $|k| = k_1+k_2+\ldots+k_n$. Порядок особливості коефіцієнтів оператора L буде характеризувати функція

$$a(s,x) = \begin{cases} |x-x^{(0)}|^s, & |x-x^{(0)}|\le 1, \\ 1, & |x-x^{(0)}|\ge 1, \end{cases} \text{, де } |x-x^{(0)}| = \left[\sum_{j=1}^n (x_j - x_j^{(0)})^2 \right]^{1/2},$$

$$\min_{\xi\in\partial\mathcal{D}} |\xi - x^{(0)}| \ge \delta > 0, \qquad \delta \text{ – const.}$$

Нехай $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)},x^{(2)})$ і $P_3(t^{(1)},x^{(2)})$ – довільні точки з Q. Означимо простори, в яких вивчається задача (1)–(3).

Позначимо через $C^r(\gamma,\beta;q;Q)$ множину функцій $u(t,x)$, які визначені в $\bar{Q}$, мають неперервні частинні похідні в області $Q^{(0)} = \bar{Q}\setminus(t,x^{(0)})$ вигляду $D_t^j D_x^k u$ при $2bj+|k|\le[r]$, для яких є скінченною норма

$$\begin{aligned} \| u;\gamma,\beta;q;Q \|_r &\equiv \| u;\gamma,\beta;q;Q \|_{[r]} + [\![u;\gamma,\beta;q;Q]\!]_r \equiv \\ &\equiv \sup_{P\in\bar{Q}} \sum_{2bj+|k|\le[r]} a\big(|k|(\gamma-\beta)+(2bj+q)\gamma,x\big) \big|D_t^j D_x^k u(P)\big| + \\ &+ \sum_{2bj+|k|=[r]} \Big\{ a\left((|k|+\{r\})(\gamma-\beta)+(2bj+q)\gamma,\tilde{x}\right) |x^{(1)}-x^{(2)}|^{-\{r\}} \times \\ &\times \big| D_t^j D_x^k u(P_1) - D_t^j D_x^k u(P_3) \big| + \sup_{P_2,P_3\in Q} a\big(|k|(\gamma-\beta)+(2bj+q+ \\ &+\{r\})\gamma, x^{(2)}\big) \big|t^{(1)}-t^{(2)}\big|^{-\{r/(2b)\}} \big| D_t^j D_x^k u(P_2) - D_t^j D_x^k u(P_3) \big| \Big\}, \end{aligned}$$

$$\| u \|_Q \equiv \| u;\gamma,\beta;0;Q \|_0 \equiv \sup_{P\in\bar{Q}} |u(P)|,$$

$[r]$ − ціла частина числа r, $\{r\} = r - [r]$, $\gamma \ge 0$, $\beta \in (-\infty, \infty)$, $q \ge 0$, $a(s,x) =$ $= \min\{a(s,x^{(1)}),\ a(s,x^{(2)})\}$.

Через $C^{\alpha}(s;Q)$ позначимо множину функцій $u(t,x)$, визначених в $Q^{(0)}$, для яких є скінченною норма

$$\| u;s;Q \|_{\alpha} = \sup_{P\in\bar{Q}} a(s,x)|u(P)| + \sup_{P_1,P_3\in\bar{Q}} a(s+\alpha,\tilde{x})\left|x^{(1)}-x^{(2)}\right|^{-\alpha} \times$$

$$\times |u(P_1)-u(P_3)| + \sup_{P_2,P_3\in\bar{Q}} a(s,x^{(2)})\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\alpha/(2b)} |u(P_2)-u(P_3)|.$$

Нехай для задачі (1)–(3) виконуються такі умови:

1°. Коефіцієнти рівняння $A_k(t,x) \in C^{\alpha}(\mu_{|k|},Q)$, якщо $|k| \le 2b-1$,

$A_k(t,x) \in C^{\alpha}(2b\beta,Q)$, якщо $|k| = 2b$, $\mu_{|k|} \ge 0$, $\beta \in (-\infty,\infty)$, $\alpha \in (0,1)$,

$b_k^{(i)}(t,x) \in C^{2b-r_i+\nu_i}(\Gamma)$, $\nu_i \in (0,1)$, $\partial\mathcal{D} \in C^{2b+\alpha}$,

і крайова задача

$$\left[D_t - a(2b\beta,x) \sum_{|k|=2b} A_k(t,x) D_x^k \right] u(t,x) \equiv g_0(t,x),$$

$$u(0,x) = \varphi(x),$$

$$\sum_{|k|=r_i} a(|k|\beta,x)\, b_k^{(i)}(t,x) D_x^k u \Big|_{\Gamma} = g_i(t,x)$$

є параболічною [4];

2°. $f_0(t,x) \in C^{\alpha}(\gamma,\beta;2b;Q)$, $\varphi(x) \in C^{2b+\alpha}(\gamma,\beta;0;\mathcal{D})$,

$f_i(t,x) \in C^{2b-r_i+\alpha_i}(\gamma,\beta;r_i;\Gamma)$, $(\mathcal{B}_i\varphi)(x)\big|_{\Gamma} = f_i(0,x)$,

$$\gamma = \max\left\{1+\beta,\ \max_{|k|<2b} \frac{\mu_{|k|}-|k|\beta}{2b-|k|}\right\}.$$

Справджується така

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1)–(3) *виконуються умови* **1°**, **2°**. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(3), *для якого справджується нерівність*

$$\left| u;\gamma,\beta;0;Q \right|_{2b+\alpha} \le C\Bigg(\left| f_0;\gamma,\beta;2b;Q \right|_{\alpha} + \left| \varphi;\gamma,\beta;0;\mathcal{D} \right|_{2b+\alpha} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{b} \left| f_i;\gamma,\beta;r_i;\Gamma \right|_{2b-r_i+\alpha_i} \Bigg), \tag{4}$$

де C залежить від δ, n, α, T та норми коефіцієнтів операторів L і $\mathcal{B}_i$.

Оцінка розв'язків крайових задач із гладкими коефіцієнтами. Нехай $Q_m = (0,T)\times\mathcal{D}_m$, $\mathcal{D}_m = \{x,\ x\in\mathcal{D},\ a(1,x) \ge m^{-1},\ m>1\}$ − зростаюча послідовність областей, яка при $m\to\infty$ збігається до Q, $\partial\mathcal{D}_m = \{x,\ a(1,x) = m^{-1}\}$.

Розглянемо загальну крайову задачу для параболічного рівняння:

$$(Lu_m)(t,x) \equiv \left[D_t - \sum_{|k|\le 2b} a_k(t,x) D_x^k \right] u_m(t,x) = F(t,x), \tag{5}$$

$$u_m(0,x) = \varphi(x), \tag{6}$$

$$(\mathcal{B}_i u_m)(t,x)\Big|_{\Gamma} \equiv \left[\sum_{|k|\le r_i} b_k^{(i)}(t,x) D_x^k \right] u_m(t,x)\Big|_{\Gamma} = f_i(t,x). \tag{7}$$

Тут $a_k(t,x) = A_k(t,x)$ і $F_m(t,x) = f_0(t,x)$, якщо $(t,x) \in Q_m$. Для $(t,x) \in \in Q \setminus Q_m$ функції $a_k(t,x)$ і $F_m(t,x)$ є розв'язками крайової задачі

$$D_t u - \Delta u = 0, \quad u(0,x) = 0, \quad u\Big|_{\Gamma_m} = \psi(t,x),$$

де для $a_k(t,x)$, наприклад, $\psi(t,x) = A_k(t,x)\Big|_{\Gamma_m}$, $\Gamma_m = (0,T) \times \partial\mathcal{D}_m$.

При будь-якому фіксованому m задача (5)–(7) має єдиний розв'язок [3, с. 83, теорема 7.1]. Знайдемо оцінку похідних розв'язку $u_m(t,x)$.

Введемо в просторі $C^{2b+\alpha}(Q)$ норму $\| u_m; \gamma, \beta; q; Q \|_{2b+\alpha}$, еквівалентну при кожному фіксованому m гельдеровій нормі, яка визначається, як $\| u; \gamma, \beta; q; Q \|_{2b+\alpha}$, тільки замість функції $a(\gamma, x)$ беремо $d(\gamma, x)$:

$$d(\gamma, x) = \begin{cases} a(\gamma, x), & x \in Q_m, \\ m^{-\gamma}, & x \in \bar{Q} \backslash Q_m. \end{cases}$$

Теорема 2. *Якщо виконуються умови* **1°**, **2°**, *то для розв'язку задачі* (5)–(7) *справджується оцінка*

$$\| u_m; \gamma, \beta; 0; Q \|_{2b+\alpha} \le C\Big(\| F_m; \gamma, \beta; 2b; Q \|_{\alpha} + \| \varphi; \gamma, \beta; 0; \mathcal{D} \|_{2b+\alpha} +$$

$$+ \| u_m \|_Q + \sum_{i=1}^{b} \| f_i; \gamma, \beta; r_i; \Gamma \|_{2b-r_i+\alpha_i} \Big), \tag{8}$$

де стала C *не залежить від* m.

Д о в е д е н н я. Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності [4, с. 176], маємо

$$\| u_m; \gamma, \beta; 0; Q \|_{2b+\alpha} \le (1 + \varepsilon^{\alpha}) [\![u_m; \gamma, \beta; 0; Q]\!]_{2b+\alpha} + C(\varepsilon) \| u_m \|_Q.$$

Тому досить оцінити півнорму $[\![u_m; \gamma, \beta; 0; Q]\!]_{2b+\alpha}$. Із означення півнорми випливає існування в $\bar{Q}$ точок P_1, P_2 і P_3, для яких при $2bj + |k| = 2b$ виконується одна з нерівностей

$$\frac{1}{4} [\![u_m; \gamma, \beta; 0; Q]\!]_{2b+\alpha} \le E_1 \equiv$$

$$\equiv d\big(|k| + \alpha)(\gamma - \beta) + 2bj\gamma, \tilde{x}\big) \left| x^{(1)} - x^{(2)} \right|^{-\alpha} \times$$

$$\times \left| D_t^j D_x^k u_m(P_1) - D_t^j D_x^k u_m(P_3) \right|,$$

$$\frac{1}{4} [\![u_m; \gamma, \beta; 0; Q]\!]_{2b+\alpha} \le E_1 \equiv$$

$$\equiv d\big(|k|(\gamma - \beta) + (2bj + \alpha)\gamma, x^{(2)}\big) \left| t^{(1)} - t^{(2)} \right|^{-\alpha/(2b)} \times$$

$$\times \left| D_t^j D_x^k u_m(P_2) - D_t^j D_x^k u_m(P_3) \right|. \tag{9}$$

Якщо $\left| x^{(1)} - x^{(2)} \right| \ge r d(\gamma - \beta, \tilde{x}) \equiv T_1$, $r \in (0,1)$, то, використовуючи інтерполяційні нерівності, маємо

$$E_1 \le \varepsilon^{\alpha} [\![u_m; \gamma, \beta; 0; Q]\!]_{2b+\alpha} + C(\varepsilon) \| u_m \|_Q.$$

Вибираючи $\varepsilon = 16^{-1/\alpha}$, з першої з нерівностей (9) знаходимо

$$[\![u_m; \gamma, \beta; 0; Q]\!]_{2b+\alpha} \le C \| u_m \|_Q. \tag{10}$$

Аналогічну оцінку одержуємо для випадку $\left| t^{(1)} - t^{(2)} \right| \geq r^{2b} d(2b\gamma, \tilde{x}) \equiv T_2$.

Розглянемо випадок, коли $\left| x^{(1)} - x^{(2)} \right| \leq T_1$ або $\left| t^{(1)} - t^{(2)} \right| \leq T_2$. Будемо вважати, що $d(\gamma, \tilde{x}) \equiv d(\gamma, x^{(1)})$. Нехай $\left| \xi - x^{(j)} \right| \geq 2T_1$, $j = 1, 2$, $\xi \in \partial\mathcal{D}$. Запишемо задачу (5), (6) у вигляді

$$D_t u_m - \sum_{|k|=2b} a_k(P_1) D_x^k u_m = \sum_{|k|=2b} \left[a_k(P) - a_k(P_1) \right] D_x^k u_m +$$

$$+ \sum_{|k| \leq 2b-1} a_k(P) D_x^k u_m + F_m(t, x) \equiv F_1(t, x), \tag{11}$$

$$u_m(0, x) = \varphi(x). \tag{12}$$

Нехай $V_1 \in Q$, $V_\nu = \{(t, x),\ \left| t - t^{(1)} \right| \leq \nu^{2b} T_2,\ t \geq 0,\ \left| x_j - x_j^{(1)} \right| \leq \nu T_1,\ j = \overline{1, n}\}$. Виконавши у задачі (11), (12) заміну $u_m(t, x) = v_m(t, y)$, $y_j = d(\beta, x^{(1)}) x_j$, $j = \overline{1, n}$, одержимо

$$(L_1 v_m)(t, y) \equiv \left[D_t - d(2b\beta, x^{(1)}) \sum_{|k|=2b} a_k(P_1) D_x^k \right] v_m(t, y) =$$

$$= F_1\left(t, d(-\beta, x^{(1)}) y\right) \equiv F_2(t, y),$$

$$v_m(0, y) = \varphi\left(d(-\beta, x^{(1)}) y\right) \equiv \varphi_1(y). \tag{13}$$

Позначимо

$$y_j^{(1)} = d(\beta, x^{(1)}) x_j^{(1)},$$

$$H_\nu = \{(t, y),\ \left| t - t^{(1)} \right| \leq \nu^{2b} T_2,\ t \geq 0,\ \left| y_j - y_j^{(1)} \right| \leq \nu r d(\gamma, x^{(1)}),\ j = \overline{1, n}\}$$

і виберемо нескінченно диференційовну функцію $\eta(t, y)$, яка задовольняє такі умови:

$$0 \leq \eta(t, y) \leq 1,$$

$$\eta(t, y) = \begin{cases} 1, & (t, y) \in H_{1/4}, \\ 0, & (t, y) \notin H_{3/4}, \end{cases}$$

$$\left| D_t^j D_y^k \eta(t, y) \right| \leq C_{jk} d\left(-(2bj + |k|)\gamma, x^{(1)}\right).$$

Тоді функція $\omega_m(t, y) = v_m(t, y)\eta(t, y)$ є розв'язком задачі Коші

$$(L_1 \omega_m)(t, y) = d(2b\gamma, x^{(1)}) \sum_{|k|=2b} a_k(P_1) \sum_{|\nu| \leq |k|-1} C_{|k|}^{|\nu|} D_y^{k-\nu} \eta \cdot D_y^\nu v_m +$$

$$+ v_m D_t \eta + F_2(t, y)\eta(t, y) \equiv F_3(t, y),$$

$$\omega_m(0, y) = \varphi_1(y)\eta(0, \eta) \equiv \varphi_2(y). \tag{14}$$

Коефіцієнти рівняння (13) згідно з накладеними умовами обмежені сталими, що не залежать від точки P_1. Тому на підставі теореми 4.1 з [3, с. 41], для довільних $M_1(\tau^{(1)}, z^{(1)})$ і $M_2(\tau^{(2)}, z^{(2)}) \in H_{1/4}$ справджується нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1, M_2) \left| D_t^j D_z^k v_m(M_1) - D_t^j D_z^k v_m(M_2) \right| \leq$$

$$\leq C\left(\| F_3 \|_{C^\alpha(H_{3/4})} + \| \varphi_2 \|_{C^{2b+\alpha}(H_{3/4} \cap (t=0))} \right). \tag{15}$$

Тут $d(M_1, M_2)$ – параболічна віддаль між точками M_1 і M_2, $2bj + |k| = 2b$.

Враховуючи властивості функції $\eta(t, y)$ і нерівність $d(\gamma, \tilde{\xi}) \ge \frac{r}{4} d(\gamma, x^{(1)})$, для $(\tau, \tilde{\xi}) \in H_{3/4}$ маємо

$$\| F_3 \|_{C^{\alpha}(H_{3/4})} \le C d(-(2b+\alpha)\gamma, x^{(1)}) (\| F_2; \gamma, 0; 2b; H_{3/4} \|_{\alpha} +$$
$$+ \| v_m; \gamma, 0; 0; H_{3/4} \|_{2b} + \| v_m \|_{H_{3/4}}),$$
$$\| \varphi_2 \|_{C^{2b+\alpha}(H_{3/4} \cap (t=0))} \le$$
$$\le c d(-(2b+\alpha)\gamma, x^{(1)}) \| \varphi_1; \gamma, 0; 0; H_{3/4} \cap (t=0) \|_{2b+\alpha}. \qquad (16)$$

Із означення простору $C^{2b+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ випливає виконання нерівностей

$$C_1 \| v_m; \gamma, 0; 0; H_{3/4} \|_{|k|+\alpha} \le \| u_m; \gamma, \beta; 0; V_{3/4} \|_{|k|+\alpha} \le C_2 \| v_m; \gamma, 0; 0; H_{3/4} \|_{|k|+\alpha}.$$

Підставляючи (16) в (15) і повертаючись до змінних (t, x), отримуємо

$$E_j \le C (\| F_1; \gamma, \beta; 2b; V_{3/4} \|_{\alpha} + \| u_m; \gamma, \beta; 0; V_{3/4} \|_{2b} +$$
$$+ \| \varphi; \gamma, \beta; 0; V_{3/4} \cap (t=0) \|_{2b+\alpha} + \| u_m \|_{V_{3/4}}), \qquad j = 1, 2. \qquad (17)$$

Враховуючи інтерполяційні нерівності, досить оцінити півнорму кожного доданка функції $F_1(t, x)$. Наприклад, для $\| a_k D_x^k u_m; \gamma, \beta; 2b; V_{3/4} \|_{\alpha} \equiv R_1$ при $|k| \le 2b - 1$ маємо

$$R_1 \le \sup_{B_1, B_3 \in V_{3/4}} \{ [d((|k| + \alpha)(\gamma - \beta), \tilde{z}) |z^{(1)} - z^{(2)}|^{-\alpha} | D_z^k u_m(B_1) -$$
$$- D_z^k u_m(B_3) |] [|a_k(B_1)| d(2b\gamma - |k|(\gamma - \beta), \tilde{z})] + [|a_k(B_1) -$$
$$- a_k(B_3)| |z^{(1)} - z^{(2)}|^{-\alpha} d(2b\gamma - (|k| - \alpha)(\gamma - \beta), \tilde{z})] \times$$
$$\times [d(|k|(\gamma - \beta), \tilde{z}) | D_z^k u_m(B_1) |] \} + \sup_{B_2, B_3 \in V_{3/4}} \{ [d(|k|(\gamma - \beta) +$$
$$+ \alpha\gamma, z^{(2)}) |\tau^{(1)} - \tau^{(2)}|^{-\alpha/(2b)} | D_z^k u_m(B_2) - D_z^k u_m(B_3) |] \times$$
$$\times [|a_k(B_2)| d(2b\gamma - |k|(\gamma - \beta), z^{(2)})] + [|a_k(B_2) -$$
$$- a_k(B_3)| |\tau^{(1)} - \tau^{(2)}|^{-\alpha/(2b)} d((2b\gamma + \alpha) -$$
$$- |k|(\gamma - \beta), z^{(2)})] [d(|k|(\gamma - \beta), z^{(2)}) | D_z^k u_m(B_3) |] \} \le$$
$$\le C ([\![u_m; \gamma, \beta; 0; V_1]\!]_{|k|+\alpha} + \| u_m \|_{V_1}).$$

Аналогічно одержуємо оцінки для інших доданків функції $F_1(t, x)$.

На підставі цих оцінок маємо

$$\| F_1; \gamma, \beta; 2b; V_{3/4} \|_{\alpha} \le C_1 r^{\alpha} \| u_m; \gamma, \beta; 0; V_1 \|_{2b+\alpha} +$$
$$+ C (\| u_m \|_{V_1} + \| F_m; \gamma, \beta; 2b; V_1 \|_{\alpha}). \qquad (18)$$

Підставляючи (18) у нерівність (17), отримуємо

$$E_j \le C (r^{\alpha} \| u_m; \gamma, \beta; 0; V_1 \|_{2b+\alpha} + \| u_m \|_{V_1} +$$
$$+ \| F_m; \gamma, \beta; 2b; V_1 \|_{\alpha} + \| \varphi; \gamma, \beta; 0; V_1 \cap (t=0) \|_{2b+\alpha}).$$

Враховуючи нерівності (9) і вибираючи $r = (16C)^{-1/\alpha}$, одержимо

$$\| u_m ; \gamma, \beta; 0; Q \|_{2b+\alpha} \le C\big(\| F_m ; \gamma, \beta; 2b; Q \|_{\alpha} + \| \varphi ; \gamma, \beta; 0; \mathcal{D} \|_{2b+\alpha} + \| u_m \|_{Q} \big). \quad (19)$$

Нехай $|x^{(j)} - \xi| \le 2T_1$, $\xi \in \partial\mathcal{D}$, $j = 1,2$. Розглянемо кулю $\mathcal{K}(\rho, P)$ радіуса ρ, $\rho \ge 4T_1$, з центром у деякій точці $P \in \Gamma$, яка містить точки P_1, P_2 і P_3. Використовуючи обмеження на гладкість поверхні $\partial\mathcal{D}$, можна розпрямити $\partial\mathcal{D} \cap \mathcal{K}(\rho, P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x = \psi(y)$ [2, с. 126], внаслідок якого область $\Pi \equiv Q \cap \mathcal{K}(\rho, P)$ переходить в область $\mathcal{N}$, для точок якої $y_n \ge 0$, $t \ge 0$. Якщо покласти $u_m(t,x) = \zeta_m(t,y)$, $P_j \equiv B_j$, $j = 1,2,3$, $d(\gamma, x^{(1)}) \equiv d_1(\gamma, y^{(1)})$ і коефіцієнти операторів задачі (5)–(7) при цьому перетворенні позначити через $h_k(t,y)$, $\ell_k^{(i)}(t,y)$, то $\zeta_m(t,y)$ в $\mathcal{N}$ буде розв'язком задачі

$$\Big[D_t - \sum_{|k|=2b} h_k(B_1) D_y^k \Big] \zeta_m(t,y) = \sum_{|k|=2b} \big[h_k(t,y) - h_k(B_1) \big] D_y^k \zeta_m(t,y) +$$

$$+ \sum_{|k|<2b} h_k(t,y) D_y^k \zeta_m(t,y) + F_m(t, \psi(y)) \equiv F_4(t,y), \quad (20)$$

$$\zeta_m(0,y) = \varphi(\psi(y)) \equiv \varphi_3(y), \quad (21)$$

$$\sum_{|k|=r_i} \ell_k^{(i)}(B_1') D_y^k \zeta_m \Big|_{y_n=0} = \Big[\sum_{|k|=r_i} \big[\ell_k^{(i)}(t,y) - \ell_k^{(i)}(B_1') \big] D_y^k \zeta_m +$$

$$+ \sum_{|k|<r_i} \ell_k^{(i)}(t,y) D_y^k \zeta_m + f_i(t, \psi(y)) \Big] \Big|_{y_n=0} \equiv G_m^{(i)}(t,y) \Big|_{y_n=0}, \quad (22)$$

де $B_1' \equiv B_1 \big|_{y_n=0}$.

У задачі (20)–(22) виконаємо заміну $\zeta_m(t,y) = \omega_m(t,z)$, $z_j = d_1(\beta, y^{(1)}) y_j$, $j = \overline{1,n}$. Тоді $\omega_m(t,z)$ буде розв'язком задачі

$$(L_2 \omega_m)(t,z) \equiv \Big[D_t - d_1(2b\beta, y^{(1)}) \sum_{|k|=2b} h_k(B_1) D_z^k \Big] \omega_m(t,z) =$$

$$= F_4(t, d_1(-\beta, y^{(1)}) z) \equiv F_5(t,z),$$

$$\omega_m(0,z) = \varphi_3(d_1(-\beta, y^{(1)}) z) \equiv \varphi_4(z),$$

$$(\mathcal{B}_i^{(0)} \omega_m)(t,z) \big|_{z_n=0} = d_1(r_i \beta, y^{(1)}) \sum_{|k|=r_i} \ell_k^{(i)}(B_1') D_z^k \omega_m \big|_{z_n=0} \equiv$$

$$\equiv G_m^{(i)}(t, d_1(-\beta, y^{(1)}) z) \big|_{z_n=0} \equiv \mathcal{H}_m^{(i)}.$$

Позначимо $z_j^{(1)} = d_1(\beta, y^{(1)}) y_j^{(1)}$, $\mathcal{N}_\nu = \{ (t,z),\ |t - t^{(1)}| \le \nu^{2b} r^{2b} d_1(2b\gamma, y^{(1)}),$ $|z_j - z_j^{(1)}| \le r\nu d_1(\gamma, y^{(1)}),\ j = \overline{1,n},\ z_n \ge 0,\ t \ge 0 \}$ і виберемо нескінченно диференційовну функцію $\eta_1(t,z)$, яка задовольняє такі умови:

$$0 \le \eta_1(t,z) \le 1,$$

$$\eta_1(t,z) = \begin{cases} 1, & (t,z) \in \mathcal{N}_{1/4}, \\ 0, & (t,z) \notin \mathcal{N}_{3/4}, \end{cases}$$

$$\big| D_t^j D_y^k \eta_1(t,z) \big| \le C_{jk} d(-(2bj + |k|)\gamma, y^{(1)}).$$

Тоді функція $W_m(t,z) = \eta_1(t,z)\,\omega_m(t,z)$ є розв'язком крайової задачі

$$(L_2 W_m)(t,z) \equiv d_1(2b\beta, y^{(1)}) \sum_{|k|=2b} h_k(B_1) \sum_{|\nu|<|k|} C_{|k|}^{|\nu|} D_z^{k-\nu}\eta_1 D_z^{\nu}\omega_m +$$

$$+ \omega_m D_t \eta_1 + F_5(t,z)\,\eta_1(t,z) \equiv F_6(t,z),$$

$$W_m(0,z) = \varphi_4(z)\,\eta_1(0,z) \equiv \varphi_5(z),$$

$$(\mathcal{B}_i^{(0)} W_m)(t,z)\Big|_{z_n=0} =$$

$$= \left[d_1(r_i\beta, y^{(1)}) \sum_{|k|=r_i} \ell_k^{(i)}(B_1') \sum_{|\nu|<|k|} C_{|k|}^{|\nu|} D_z^{k-\nu}\eta_1 D_z^{\nu}\omega_m + \right.$$

$$\left. + \mathcal{H}_m^{(i)}\eta_1(t,x) \right]\Bigg|_{z_n=0} \equiv \mathcal{K}_m^{(i)}. \qquad (23)$$

Коефіцієнти рівняння і крайових умов задачі (23) згідно з накладеними умовами є обмежені сталими, що не залежать від точки B_1. Тому на підставі теореми 7.1 з роботи [3, с. 83] маємо, що для довільних точок $M_1(\tau^{(1)},\xi^{(1)})$, $M_2(\tau^{(2)},\xi^{(2)}) \in \mathcal{N}_{1/4}$ виконується нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)\left|D_t^j D_z^k \omega_m(M_1) - D_t^j D_z^k \omega_m(M_2)\right| \le C\Bigg(\| F_6 \|_{C^{\alpha}(\mathcal{N}_{3/4})} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{b} \| \mathcal{K}_m^{(i)} \|_{C^{2b-r_i+\alpha_i}(\mathcal{N}_{3/4}\cap(z_n=0))} + \| \varphi_5 \|_{C^{2b+\alpha}(\mathcal{N}_{3/4}\cap(t=0))} \Bigg).$$

Повторюючи міркування, аналогічні до міркувань при доведенні нерівності (19), отримуємо

$$\| u_m;\gamma,\beta;0;Q \|_{2b+\alpha} \le C\Bigg(\| F_m;\gamma,\beta;2b;Q \|_{\alpha} + \| \varphi;\gamma,\beta;0;\mathcal{D} \|_{2b+\alpha} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{b} \| f_i;\gamma,\beta;r_i;\Gamma \|_{2b-r_i+\alpha_i} + \| u_m \|_Q \Bigg). \qquad (24)$$

Враховуючи нерівності (10), (19) і (24), одержуємо оцінку (8). ◊

Оцінимо $\| u_m \|_Q$.

Теорема 3. *Нехай* $u_m(t,x)$ − *єдиний класичний розв'язок задачі* (5)−(7) *і виконуються умови* **1°**, **2°**. *Тоді для* $u_m(t,x)$ *справджується нерівність*

$$\| u_m \|_Q \le C\Bigg(\| Lu_m;\gamma,\beta;2b;Q \|_{\alpha} +$$

$$+ \| u_m;\gamma,\beta;0;\mathcal{D} \|_{2b+\alpha} + \sum_{i=1}^{b} \| \mathcal{B}_i\, u_m;\gamma,\beta;r_i;\Gamma \|_{2b-r_i+\alpha_i} \Bigg), \qquad (25)$$

де стала C *не залежить від* m.

Д о в е д е н н я. Використаємо методику доведення зауваження 2 з роботи [1, с. 79]. Припустимо, що нерівність (25) не виконується. Тоді існує послідовність функцій $V_n \in C^{2b+\alpha}(Q)$ таких, що $\| V_n \|_Q = 1$ і $V_n(0,x)$, LV_n, $\mathcal{B}_i V_n$ прямують до нуля для відповідних V_n, коли $n \to \infty$. Із (8) випливає, що норми $\| V_n ; \gamma, \beta; 0; Q \|_{2b+\alpha}$ рівномірно обмежені. Тому існує підпослідовність $V_{n(j)}$, яка при $n(j) \to \infty$ збігається до розв'язку $V \in C^{2b+\alpha}(Q)$ однорідної крайової задачі. Оскільки розв'язок крайової задачі єдиний, то $V \equiv 0$, що суперечить рівності $\| V \|_Q = 1$. ◊

Д о в е д е н н я теореми 1. Зазначимо, що

$$\| F_m ; \gamma, \beta; 2b; Q \|_\alpha \le C \| f_0 ; \gamma, \beta; 2b; Q \|_\alpha .$$

Тому з нерівностей (8) і (25) маємо

$$\| u_m ; \gamma, \beta; 0; Q \|_{2b+\alpha} \le C \Big(\| f_0 ; \gamma, \beta; 2b; Q \|_\alpha + \| \varphi ; \gamma, \beta; 0; \mathcal{D} \|_{2b+\alpha} + \\ + \sum_{i=1}^{b} \| f_i ; \gamma, \beta; r_i ; \Gamma \|_{2b - r_i + \alpha_i} \Big). \tag{26}$$

Отже, права частина нерівності (26) не залежить від m, а послідовності

$$W_{kj}^{(m)} = \left\{ d\,(2bj\gamma + |k|(\gamma-\beta), x) \left| D_t^j D_x^k u_m \right|,\ 2bj + |k| \le 2b \right\}$$

рівномірно обмежені та рівностепенево неперервні в $\bar{Q}$. За теоремою Арцела існують підпослідовності $\{ W_{kj}^{m(j)} \}$, рівномірно збіжні при $m(j) \to \infty$ до $\{ W_{kj} \}$. Переходячи до границі при $m(j) \to \infty$ у задачі (5)–(7), одержимо, що $u(t,x) \equiv W_{00}$ – єдиний розв'язок задачі (1)–(3), $u \in C^{2b+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ і справджується оцінка (4). ◊

1. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 208 с.
2. *Камынин Л. И., Масленникова В. Н.* Граничные оценки шаудеровского типа решения задачи с косой производной для параболического уравнения в нецилиндрической области // Сиб. мат. журн. – 1966. – **7**, № 1. – С. 83–128.
3. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – К.: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
4. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.

ОБЩАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

В пространствах классических функций со степенным весом доказаны существование и единственность решения общей краевой задачи для неравномерно параболических уравнений с произвольным степенным порядком вырождения коэффициентов. Найдена оценка решения задачи в соответственных пространствах.

UNIVERSAL LINEAR PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH DEGENERATION

In the space of classical functions with power weight the existence and uniqueness of solution to universal problem for parabolic equation with any power order of degeneration coefficients is proved. The estimation of solution to the problem in corresponding spaces is found.

Чернів. ун-т ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано
20.02.02