УДК 517.95

М. І. Іванчов, Р. В. Сагайдак

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ СТАРШОГО КОЕФІЦІЄНТА У ДВОВИМІРНОМУ ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ

Встановлено умови існування і єдиності розв'язку оберненої задачі, яка полягає у визначенні невідомого старшого коефіцієнта в двовимірному параболічному рівнянні. Припускається, що цей коефіцієнт залежить лише від часу.

У роботі досліджується обернена задача визначення залежного від часу старшого коефіцієнта двовимірного параболічного рівняння з класичними крайовими умовами першого роду та умовою перевизначення другого роду. Аналогічна одновимірна задача досліджена в роботі [1]. Випадок рівняння без молодших членів, але з умовами перевизначення в інтегральній формі, розглянуто в [4], а в [7] досліджено n-вимірну обернену задачу для однорідного рівняння теплопровідності з аналогічними крайовими умовами та умовою перевизначення у зв'язній області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ з гладкою межею $\partial\Omega$.

1. Формулювання задачі. В області $\Omega_T = \{(x,y,t):\ 0 < x < h,\ 0 < y < \ell,\ 0 < t < T\}$ розглянемо обернену задачу визначення функцій $(a(t), u(x,y,t)) \in \in (C[0,T] \times C^{2,1}(\bar\Omega_T),\ a(t) > 0,\ t \in [0,T])$, що задовольняють рівняння

$$u_t = a(t)\Delta u + b_1(x,y,t)u_x + b_2(x,y,t)u_y + \\ + c(x,y,t)u + f(x,y,t), \qquad (x,y,t) \in \Omega_T, \qquad (1)$$

початкову умову

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \qquad (x,y) \in [0,h] \times [0,\ell], \qquad (2)$$

крайові умови

$$u(0,y,t) = \mu_1(y,t), \quad u(h,y,t) = \mu_2(y,t), \quad (y,t) \in [0,\ell] \times [0,T], \qquad (3)$$

$$u(x,0,t) = \mu_3(x,t), \quad u(x,\ell,t) = \mu_4(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T], \qquad (4)$$

та умову перевизначення

$$a(t)u_x(0,y_0,t) = \nu(t), \qquad t \in [0,T], \qquad (5)$$

де y_0 – довільна фіксована точка з $(0,\ell)$.

Відносно вихідних даних задачі протягом усієї роботи будемо припускати виконання таких умов:

(**A1**): $\varphi(x,y) \in C^2(\bar D)$, де $D = \{(x,y) : 0 < x < h,\ 0 < y < \ell\}$, $\mu_i(y,t) \in C^{2,1}([0,\ell] \times [0,T])$, $i = 1,2$, $\mu_i(x,t) \in C^{2,1}([0,h] \times [0,T])$, $i = 3,4$, $\nu(t) \in C[0,T]$, $f(x,y,t) \in C^{1,0}(\bar\Omega_T)$, $b_i(x,y,t) \in C(\bar\Omega_T)$, $i = 1,2$, $c(x,y,t) \in C(\bar\Omega_T)$; $b_i(x,y,t)$, $i = 1,2$, і $c(x,y,t)$ задовольняють умову Гельдера в $\bar\Omega_T$ за просторовими змінними з показником β, $0 < \beta < 1$;

(**A2**): $\nu(t) > 0$, $t \in [0,T]$, $\varphi_x(x,y) > 0$, $(x,y) \in \bar D$;

(**A3**): $\mu_1(y,0) = \varphi(0,y)$, $\mu_2(y,0) = \varphi(h,y)$, $\mu_3(x,0) = \varphi(x,0)$, $\mu_4(x,0) = \varphi(x,\ell)$, $\mu_1(0,t) = \mu_3(0,t)$, $\mu_1(\ell,t) = \mu_4(0,t)$, $\mu_2(0,t) = \mu_3(h,t)$, $\mu_2(\ell,t) = \mu_4(h,t)$;

(**A4**): $$\mu_{1t}(y,0) = \frac{\nu(0)}{\varphi_x(0,y_0)}\Delta\varphi(0,y) + b_1(0,y,0)\varphi_x(0,y) + b_2(0,y,0)\varphi_y(0,y) + \\ + c(0,y,0)\varphi(0,y) + f(0,y,0),$$

$$\mu_{2t}(y,0)=\frac{\nu(0)}{\varphi_x(0,y_0)}\Delta\varphi(h,y)+b_1(h,y,0)\varphi_x(h,y)+b_2(h,y,0)\varphi_y(h,y)+$$
$$+c(h,y,0)\varphi(h,y)+f(h,y,0)\,,$$
$$\mu_{3t}(x,0)=\frac{\nu(0)}{\varphi_x(0,y_0)}\Delta\varphi(x,0)+b_1(x,0,0)\varphi_x(x,0)+b_2(x,0,0)\varphi_y(x,0)+$$
$$+c(x,0,0)\varphi(x,0)+f(x,0,0)\,,$$
$$\mu_{4t}(x,0)=\frac{\nu(0)}{\varphi_x(0,y_0)}\Delta\varphi(x,\ell)+b_1(x,\ell,0)\varphi_x(x,\ell)+b_2(x,\ell,0)\varphi_y(x,\ell)+$$
$$+c(x,\ell,0)\varphi(x,\ell)+f(x,\ell,0)\,.$$

Зауважимо, що в умовах узгодження першого порядку (**A4**) значення $a(0)$ встановлюємо з умови (5).

2. Існування розв'язку.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (**A1**)–(**A4**). *Тоді задача* (1)–(5) *має розв'язок в області* $\overline{\Omega}_{T_0}$, *де* T_0, $0<T_0\le T$, *визначається вихідними даними задачі.*

Доведення. Обернену задачу (1)–(5) зведемо до системи рівнянь відносно невідомих функцій $a(t)$ та $u(x,y,t)$. Для цього тимчасово припустимо, що функція $a(t)$ є відомою. Позначимо

$$G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)=$$
$$=\frac{1}{4\pi[\alpha(t)-\alpha(\tau)]}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4[\alpha(t)-\alpha(\tau)]}\right]+\right.$$
$$\left.+(-1)^i\exp\left[-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4[\alpha(t)-\alpha(\tau)]}\right]\right\}\left\{\exp\left[-\frac{(y-\eta+2m\ell)]^2}{4[\alpha(t)-\alpha(\tau)]}\right]+\right.$$
$$\left.+(-1)^j\exp\left[-\frac{(y+\eta+2m\ell)]^2}{4[\alpha(t)-\alpha(\tau)]}\right]\right\},\qquad i,j=1,2,\qquad \alpha(t)=\int_0^t a(\sigma)\,d\sigma\,. \tag{6}$$

Легко бачити, що $G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ є функцією Ґріна задачі (2)–(4) для рівняння

$$u_t=a(t)\Delta u+f(x,y,t)\,. \tag{7}$$

Використовуючи рівність (6), пряму задачу (1)–(4) зведемо до інтегро-диференціального рівняння

$$u(x,y,t)=\int_0^\ell\int_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta+\int_0^t\int_0^\ell[G_{11\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)\mu_1(\eta,\tau)-$$
$$-G_{11\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)\mu_2(\eta,\tau)]a(\tau)\,d\eta\,d\tau+\int_0^t\int_0^h[G_{11\eta}(x,y,t,\xi,0,\tau)\,\mu_3(\xi,\tau)-$$
$$-G_{11\eta}(x,y,t,\xi,\ell,\tau)\,\mu_4(\xi,\tau)]a(\tau)\,d\xi\,d\tau+\int_0^t\int_0^\ell\int_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\times$$
$$\times[f(\xi,\eta,\tau)+b_1(\xi,\eta,\tau)u_\xi+b_2(\xi,\eta,\tau)u_\eta+c(\xi,\eta,\tau)u]\,d\xi\,d\eta\,d\tau\,.$$

Зауважимо, що функцію $u(x,y,t)$ можна зобразити так:

$$u(x,y,t)=u_0(x,y,t)+\int_0^t\int_0^\ell\int_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)[b_1(\xi,\eta,\tau)u_\xi+$$
$$+b_2(\xi,\eta,\tau)u_\eta+c(\xi,\eta,\tau)u]\,d\xi\,d\eta\,d\tau\,, \tag{8}$$

де $u_0(x,y,t)$ – розв'язок задачі (7), (2)–(4). Продиференціювавши рівність (8) за x і ввівши позначення $u_x = v$, $u_y = w$, отримаємо рівняння для v:

$$v(x,y,t) = u_{0x}(x,y,t) + \int_0^t \int_0^\ell \int_0^h G_{11x}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)[b_1(\xi,\eta,\tau)v + \\ + b_2(\xi,\eta,\tau)w + c(\xi,\eta,\tau)u]\,d\xi\,d\eta\,d\tau. \tag{9}$$

Аналогічно отримаємо рівняння для w:

$$w(x,y,t) = u_{0y}(x,y,t) + \int_0^t \int_0^\ell \int_0^h G_{11y}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)[b_1(\xi,\eta,\tau)v + \\ + b_2(\xi,\eta,\tau)w + c(\xi,\eta,\tau)u]\,d\xi\,d\eta\,d\tau. \tag{10}$$

З використанням введених позначень рівність (8) набуде вигляду

$$u(x,y,t) = u_0(x,y,t) + \int_0^t \int_0^\ell \int_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)[b_1(\xi,\eta,\tau)v + \\ + b_2(\xi,\eta,\tau)w + c(\xi,\eta,\tau)u]\,d\xi\,d\eta\,d\tau. \tag{11}$$

Отже, задача (1)–(4) при відомій функції $a(t)$ еквівалентна системі рівнянь (9)–(11).

Використаємо умову перевизначення (5). Для знаходження функції $u_{0x}(x,y,t)$ в задачі (7), (2)–(4) введемо позначення $u_{0x}(x,y,t) = z(x,y,t)$. Функція z є розв'язком задачі

$$z_t = a(t)\Delta z + f_x(x,y,t), \qquad (x,y,t) \in \Omega_T, \tag{12}$$

$$z(x,y,0) = \varphi_x(x,y), \qquad (x,y) \in [0,h]\times[0,\ell], \tag{13}$$

$$z_x(0,y,t) = \frac{\mu_{1t}(y,t)}{a(t)} - \frac{f(0,y,t)}{a(t)} - \mu_{1yy}(y,t), \qquad (y,t) \in [0,\ell]\times[0,T], \tag{14}$$

$$z_x(h,y,t) = \frac{\mu_{2t}(y,t)}{a(t)} - \frac{f(h,y,t)}{a(t)} - \mu_{2yy}(y,t), \qquad (y,t) \in [0,\ell]\times[0,T], \tag{15}$$

$$z(x,0,t) = \mu_{3x}(x,t), \qquad z(x,\ell,t) = \mu_{4x}(x,t), \qquad (x,t) \in [0,h]\times[0,T], \tag{16}$$

і зображається таким чином:

$$z(x,y,t) = \\ = \int_0^\ell \int_0^h G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta - \int_0^t \int_0^\ell \{G_{21}(x,y,t,0,\eta,\tau)[\mu_{1\tau}(\eta,\tau) - \\ - f(0,\eta,\tau) - a(\tau)\mu_{1\eta\eta}(\eta,\tau)] - G_{21}(x,y,t,h,\eta,\tau)[\mu_{2\tau}(\eta,\tau) - f(h,\eta,\tau) - \\ - a(\tau)\mu_{2\eta\eta}(\eta,\tau)]\}d\eta\,d\tau + \int_0^t \int_0^h [G_{21\eta}(x,y,t,\xi,0,\tau)\,\mu_{3\xi}(\xi,\tau) - \\ - G_{21\eta}(x,y,t,\xi,\ell,\tau)\,\mu_{4\xi}(\xi,\tau)]\,a(\tau)\,d\xi\,d\tau + \\ + \int_0^t \int_0^\ell \int_0^h G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau, \tag{17}$$

де $G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ – функція Ґріна задачі (12)–(16).

З припущення **(A2)** випливає, що перший доданок у (9), де значення $u_{0x}(x,y,t)$ береться з (17), додатний, а всі інші дорівнюють нулю при $t = 0$. Отже, існує таке $T_1 > 0$, $0 < T_1 \le T$, що має місце нерівність

$$v(0,y_0,t)\ge \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\int_0^{h} G_{21}(0,y_0,t,\xi,\eta,0)\varphi_{\xi}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta>0, \qquad t\in[0,T_1]. \quad (18)$$

Враховуючи (18), отримуємо рівняння відносно невідомої функції $a(t)$:

$$a(t)=\frac{\nu(t)}{v(0,y_0,t)}, \qquad t\in[0,T_1]. \quad (19)$$

Таким чином, задача (1)−(5) зведена до системи рівнянь (9)−(11), (19), і розв'язок задачі (1)−(5) задовольняє систему (9)−(11), (19). З іншого боку, якщо $(a(t),\ v(x,y,t),\ w(x,y,t),\ u(x,y,t))\in C[0,T_1]\times(C(\bar{\Omega}_{T_1}))^3$, $a(t)>0$, $t\in[0,T_1]$, − розв'язок системи (9)−(11), (19), то, використовуючи властивість єдиності розв'язку систем інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду, легко встановити, що $v(x,y,t)=u_x(x,y,t)$, $w(x,y,t)=u_y(x,y,t)$, і функція $u(x,y,t)$ є розв'язком рівняння (8). На основі властивостей об'ємних потенціалів [6, с. 19] встановлюємо, що $u(x,y,t)\in C^{2,1}(\bar{\Omega}_{T_1})$ і є розв'язком задачі (1)−(4). Виконання умови (5) випливає з рівняння (19). Отже, задача (1)−(5) і система рівнянь (9)−(11), (19) є еквівалентними.

Застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора [3, с. 616] до системи рівнянь (9)−(11), (19). Передусім встановимо апріорні оцінки розв'язків цієї системи.

Для розв'язку задачі (1)−(4) має місце оцінка [5, с. 24]

$$|u(x,y,t)|\le M_1<\infty, \qquad (x,y,t)\in\bar{\Omega}_T, \quad (20)$$

де константа M_1 залежить тільки від вихідних даних задачі.

Використовуючи (18), з (19) встановимо оцінку для $a(t)$ зверху:

$$a(t)\le \frac{2\max\limits_{t\in[0,T]}\nu(t)}{\min\limits_{\bar{D}}\varphi_x(x,y)\int_0^{\ell}\int_0^{h}G_{21}(0,y_0,t,\xi,\eta,0)\,d\xi\,d\eta}=$$

$$=\frac{C_1}{\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha(t)}}\int_0^{\ell}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{(y_0-\eta+2m\ell)^2}{4\alpha(t)}\right)-\exp\left(-\frac{(y_0+\eta+2m\ell)^2}{4\alpha(t)}\right)\right]d\eta}.$$

При цьому було використано співвідношення, яке перевіряється безпосереднім обчисленням:

$$\int_0^{h}G_2(x,t,\xi,\tau)\,d\xi=1, \quad (21)$$

де

$$G_k(x,t,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi[\alpha(t)-\alpha(\tau)]}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4[\alpha(t)-\alpha(\tau)]}\right)+\right.$$
$$\left.+(-1)^k\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4[\alpha(t)-\alpha(\tau)]}\right)\right], \qquad k=1,2.$$

У виразі для оцінки $a(t)$ зверху через $R(\alpha(t))$ позначимо знаменник дробу, поділений на C_1. Тоді ця нерівність набуде вигляду

$$a(t)\le\frac{1}{R(\alpha(t))}, \qquad t\in[0,T_1],$$

звідки після інтегрування і заміни змінної $\alpha(t)=\sigma$ під знаком інтеграла отримаємо

$$\int_0^{\alpha(t)} R(\sigma)\,d\sigma \le t, \qquad t \in [\,0, T_1\,].$$

Оскільки функція $R_1(s) = \int_0^s R(\sigma)\,d\sigma$ монотонно зростає, то існує обернена функція $R_1^{-1}(z)$, визначена на деякому проміжку $[\,0, T_2\,]$. Подаючи попередню нерівність у вигляді

$$R_1(\alpha(t)) \le t\,,$$

встановлюємо оцінку для $a(t)$ зверху:

$$a(t) \le R_1^{-1}(t) \le A_1 < \infty, \qquad t \in [\,0, T_2\,]. \tag{22}$$

Перейдемо до оцінки $a(t)$ знизу. Для цього оцінимо зверху $|v(x, y, t)|$ у рівності (9), попередньо встановивши оцінку $|u_{0x}(x, y, t)|$ у (17).

Оцінюючи перший доданок, використаємо (21). Тоді

$$\left| \int_0^{\ell}\int_0^{h} G_{21}(x, y, t, \xi, \eta, 0)\varphi_{\xi}(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta \right| \le C_2\,. \tag{23}$$

Скориставшись співвідношенням

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2h^2}{4\sigma}\right) \le \frac{1}{\sqrt{\sigma}} + \frac{2\sqrt{\pi}}{h} \tag{24}$$

і врахувавши (22), оцінку двох наступних доданків подамо у вигляді

$$\Bigg| \int_0^{t}\int_0^{\ell} \Big\{ G_{21}(x, y, t, 0, \eta, \tau)\big[\mu_{1\tau}(\eta, \tau) - f(0, \eta, \tau) - a(\tau)\mu_{1\eta\eta}(\eta, \tau)\big] -$$

$$- G_{21}(x, y, t, h, \eta, \tau)\big[\mu_{2\tau}(\eta, \tau) - f(h, \eta, \tau) - a(\tau)\mu_{2\eta\eta}(\eta, \tau)\big] \Big\} d\eta\,d\tau \Bigg| \le$$

$$\le C_3 + C_4 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t) - \alpha(\tau)}}\,.$$

Розглянемо наступні два доданки. Враховуючи (24), отримаємо

$$\Bigg| \int_0^{t}\int_0^{h} G_{21\eta}(x, y, t, \xi, 0, \tau)\,a(\tau)\mu_{3\xi}(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau -$$

$$- \int_0^{t}\int_0^{h} G_{21\eta}(x, y, t, \xi, \ell, \tau)\,a(\tau)\mu_{4\xi}(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau \Bigg| \le$$

$$\le C_5 \left(\int_0^t G_{1\eta}(y, t, 0, \tau)\,a(\tau)\,d\tau - \int_0^t G_{1\eta}(y, t, \ell, \tau)\,a(\tau)\,d\tau \right) \le$$

$$\le C_5\omega = C_5, \quad t \in [0, T_1],$$

де ω − розв'язок задачі

$$\omega_t = a(t)\omega_{yy}, \qquad (y, t) \in (0, \ell) \times (0, T_1)\,,$$

$$\omega(y, 0) = 1, \qquad y \in [0, \ell],$$

$$\omega(0, t) = \omega(\ell, t) = 1, \qquad t \in [0, T_1].$$

Легко перевірити, що $\omega(y,t) \equiv 1$.

Наступний доданок оцінюємо аналогічно до (23):

$$\left| \int_0^t \int_0^\ell \int_0^h G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) f_\xi(\xi,\eta,\tau)\, d\xi\, d\eta\, d\tau \right| \le C_6 .$$

Оцінюючи другий доданок у (9), скористаємось наявністю оцінки (20) і співвідношенням

$$G_{11x}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) = -\, G_{21\xi}(x,y,t,\xi,\eta,\tau).$$

Тоді

$$\left| \int_0^t \int_0^\ell \int_0^h G_{11x}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)(b_1 v + b_2 w + cu)\, d\xi\, d\eta\, d\tau \right| \le C_7 \int_0^t \frac{U_1(\tau)\, d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}} +$$

$$+ C_8 \int_0^t \frac{U_2(\tau)\, d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}} + C_9 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}},$$

де $U_1(t) = \max\limits_{(x,y)\in\bar{D}} |v(x,y,t)|$, $U_2(t) = \max\limits_{(x,y)\in\bar{D}} |w(x,y,t)|$. Зауважимо, що константи C_i, $i = \overline{2,9}$, залежать лише від вихідних даних задачі (1)–(4). Таким чином, із (9) отримуємо наступну нерівність:

$$|v(x,y,t)| \le C_{10} + C_{11} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}} + C_{12} \int_0^t \frac{U_1(\tau)\, d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}} +$$

$$+ C_{13} \int_0^t \frac{U_2(\tau)\, d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}, \qquad t \in [0, T_3], \tag{25}$$

де $T_3 = \min\{T_1, T_2\}$. Аналогічну нерівність отримуємо для функції $w(x,y,t)$:

$$|w(x,y,t)| \le C_{14} + C_{15} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}} + C_{16} \int_0^t \frac{U_1(\tau)\, d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}} +$$

$$+ C_{17} \int_0^t \frac{U_2(\tau)\, d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}, \qquad t \in [0, T_3]. \tag{26}$$

Додаючи (25), (26), приходимо до нерівності

$$|v(x,y,t)| + |w(x,y,t)| \le C_{18} +$$

$$+ C_{19} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}} + C_{20} \int_0^t \frac{(U_1(\tau)+U_2(\tau))\, d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}, \quad (x,y,t) \in \bar{\Omega}_{T_3}. \tag{27}$$

З (27) випливає виконання нерівності

$$U_1(t) + U_2(t) \le C_{18} +$$

$$+ C_{19} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}} + C_{20} \int_0^t \frac{(U_1(\tau)+U_2(\tau))\, d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}, \quad t \in [0, T_3].$$

Увівши позначення $U(t) \equiv U_1(t) + U_2(t)$, отримуємо

$$U(t) \le C_{18} + C_{19} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}} + C_{20} \int_0^t \frac{U(\tau)\, d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}, \quad t \in [0, T_3]. \tag{28}$$

З рівняння (19) встановлюємо, що

$$a(t) \geq \frac{C_{21}}{U_1(t)} \geq \frac{C_{21}}{U_1(t)+U_2(t)} = \frac{C_{21}}{U(t)}, \tag{29}$$

де $C_{21} > 0$ − відома константа. З (29) отримуємо нерівність $1 \leq \frac{a(t)U(t)}{C_{21}}$. Тоді (28) набуде вигляду

$$U(t) \leq C_{18} + C_{22}\int_0^t \frac{a(\tau)U(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}} + C_{23}\int_0^t \frac{a(\tau)U^2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}$$

або

$$U(t) \leq C_{18} + C_{24}\int_0^t \frac{a(\tau)\left[U(\tau)+1/2\right]^2}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\,d\tau.$$

Позначивши $W(t) = U(t) + \frac{1}{2}$, переходимо до нерівності

$$W(t) \leq C_{25} + C_{24}\int_0^t \frac{a(\tau)\,W^2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}. \tag{30}$$

Подальші перетворення нерівності (30) проводимо так, як у [2]. Щоб оцінити інтеграл $\int_0^t \frac{a(\tau)\,W^2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}$, піднесемо нерівність (30) до квадрату, замінимо t на σ, домножимо ліву та праву частину на $\frac{a(\sigma)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}}$ і проінтегруємо його від 0 до t. Використовуючи нерівність Коші, отримаємо

$$\int_0^t \frac{a(\sigma)\,W^2(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}} \leq 2C_{25}^2\int_0^t \frac{a(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}} +$$

$$+\,2C_{24}^2\int_0^t \left(\int_0^\sigma \frac{a(\tau)\,W^2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\alpha(\sigma)-\alpha(\tau)}}\right)^2 \frac{a(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}}.$$

Враховуючи оцінку (22) і застосовуючи нерівність Коші − Буняковського, отриманій нерівності надамо вигляду

$$\int_0^t \frac{a(\sigma)\,W^2(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}} \leq C_{26} + C_{27}\int_0^t \frac{a(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}}\int_0^\sigma \frac{a(\tau)\,W^4(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\alpha(\sigma)-\alpha(\tau)}}.$$

Змінивши порядок інтегрування в останньому доданку і врахувавши рівність

$$\int_\tau^t \frac{a(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{\left(\alpha(t)-\alpha(\sigma)\right)\left(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau)\right)}} = \pi,$$

приходимо до оцінки

$$\int_0^t \frac{a(\sigma)\,W^2(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}} \leq C_{26} + C_{28}\int_0^t W^4(\tau)\,d\tau, \tag{31}$$

де C_{26}, C_{28} − відомі додатні сталі.

Використавши (31), нерівність (30) запишемо як

$$W(t) \leq C_{29} + C_{30}\int_0^t W^4(\tau)\,d\tau. \tag{32}$$

Позначивши праву частину (32) через $V(t)$, приходимо до нерівності

$$V'(t) \le C_{30} V^4(t).$$

Розділимо останню нерівність на $V^4(t)$, замінимо t на σ і проінтегруємо по σ від 0 до t. Врахувавши, що $V(0) = C_{29}$, отримаємо оцінку

$$V(t) \le \frac{C_{29}}{\sqrt[3]{1 - 3C_{29}^3 C_{30} t}}, \qquad t \in [0, T_4],$$

за умови, що число T_4, $0 < T_4 < T$, вибрано так, щоб виконувалась нерівність

$$1 - 3C_{29}^3 C_{30} T_4 > 0.$$

Тоді

$$V(t) \le C_{31}, \qquad t \in [0, T_4].$$

Повертаючись до невідомої функції $W(t)$, встановлюємо, що

$$W(t) \le M_2 < \infty, \qquad t \in [0, T_4]. \tag{33}$$

Використовуючи (33) та введені позначення, одержуємо наступні оцінки:

$$|v(x,y,t)| \le M_3 < \infty, \qquad |w(x,y,t)| \le M_4 < \infty, \qquad (x,y,t) \in \bar{\Omega}_{T_4}, \tag{34}$$

що дозволяє отримати оцінку $a(t)$ знизу

$$a(t) \ge A_0 > 0, \qquad t \in [0, T_4]. \tag{35}$$

При наявності оцінок (20), (22), (34), (35) перевірка виконання умов теореми Шаудера проводиться аналогічно, як у роботі [4], якщо позначити $T_0 = \min\{T_3, T_4\}$. Теорему доведено. ◊

Знайдемо довжину проміжку $[0, T_1]$. Число T_1, $0 < T_1 \le T$, повинно задовольняти умову (18), що забезпечується виконанням такої нерівності:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\min_{\bar{D}} \varphi_x(x,y) \int_0^\ell G_1(y_0, t, \eta, 0)\, d\eta \ge \Bigg| \int_0^t \int_0^\ell G_{21}(0, y_0, t, 0, \eta, \tau)\big[\mu_{1\tau}(\eta,\tau) - \\
&\quad - f(0,\eta,\tau) - a(\tau)\mu_{1\eta\eta}(\eta,\tau)\big]\, d\eta\, d\tau - \int_0^t \int_0^\ell G_{21}(0, y_0, t, h, \eta, \tau)\big[\mu_{2\tau}(\eta,\tau) - \\
&\quad - f(h,\eta,\tau) - a(\tau)\mu_{2\eta\eta}(\eta,\tau)\big]\, d\eta\, d\tau - \int_0^t \int_0^h \big[G_{21\eta}(0, y_0, t, \xi, 0, \tau)\, \mu_{3\xi}(\xi,\tau) - \\
&\quad - G_{21\eta}(0, y_0, t, \xi, \ell, \tau)\, \mu_{4\xi}(\xi,\tau)\big]\, a(\tau)\, d\xi\, d\tau - \\
&\quad - \int_0^t \int_0^\ell \int_0^h \big\{ G_{21}(0, y_0, t, \xi, \eta, \tau) f_\xi(\xi,\eta,\tau) + G_{11x}(0, y_0, t, \xi, \eta, \tau) \times \\
&\quad \times \big[b_1(\xi,\eta,\tau)\, u_\xi(\xi,\eta,\tau) + b_2(\xi,\eta,\tau)\, u_\eta(\xi,\eta,\tau) + \\
&\quad + c(\xi,\eta,\tau)\, u(\xi,\eta,\tau)\big]\big\} d\xi\, d\eta\, d\tau \Bigg|,
\end{aligned} \tag{36}$$

де $G_1(y, t, \eta, \tau)$ – функція Ґріна першої крайової задачі для одновимірного рівняння теплопровідності. Оцінивши зверху праву частину нерівності (36) і використавши оцінки (22), (34), (35), отримаємо оцінку для T_1.

3. Єдиність розв'язку. Перейдемо до питання про єдиність розв'язку задачі (1)−(5).

Теорема. *Нехай виконується умови*

(А5): $b_i(x,y,t) \in C(\bar{\Omega}_T)$, $i = 1,2$, $c(x,y,t) \in C(\bar{\Omega}_T)$; $b_i(x,y,t)$, $i = 1,2$, $c(x,y,t)$ *задовольняють умову Гельдера в* $\bar{\Omega}_T$ *за просторовими змінними з показником* β, $0 < \beta < 1$;

(А6): $\nu(t) > 0$, $t \in [0,T]$.

Тоді розв'язок задачі (1)−(5) *єдиний.*

Д о в е д е н н я. Припустимо, що існує два розв'язки задачі (a_i, u_i), $i = 1,2$. Позначимо $A(t) = a_1(t) - a_2(t)$, $U(x,y,t) = u_1(x,y,t) - u_2(x,y,t)$. Тоді пара функцій $(A,\ U)$ задовольняє умови

$$U_t = a_1(t)\,\Delta U + A(t)\Delta u_2 + b_1(x,y,t)U_x + b_2(x,y,t)U_y +$$

$$+ c(x,y,t)U, \qquad (x,y,t) \in \Omega_T, \tag{37}$$

$$U|_{t=0} = U|_{x=0} = U|_{x=h} = U|_{y=0} = U|_{y=\ell} = 0, \tag{38}$$

$$a_1(t)U_x(0,y_0,t) = -\,A(t)u_{2x}(0,y_0,t), \qquad t \in [\,0,T\,]. \tag{39}$$

Використовуючи функцію Ґріна G_{11}^* задачі (37), (38), її розв'язок зобразимо таким чином:

$$U(x,y,t) = \int_0^t \int_0^\ell \int_0^h G_{11}^*(x,y,t,\xi,\eta,\tau)A(\tau)\,\Delta u_2\,d\xi\,d\eta\,d\tau.$$

Підставляючи його в умову перевизначення (39), отримуємо рівняння відносно невідомої $A(t)$:

$$A(t)u_{2x}(0,y_0,t) = -\,a_1(t)\int_0^t \int_0^\ell \int_0^h G_{11x}^*(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)A(\tau)\,\Delta u_2\,d\xi\,d\eta\,d\tau.$$

Оскільки $(a_2(t), u_2(x,y,t))$ − розв'язок задачі (1)−(5), то

$$a_2(t)u_{2x}(0,y_0,t) = \nu(t)$$

і з умови **(А6)** випливає, що $u_{2x}(0,y_0,t) > 0$, $t \in [0,T]$. Тоді з властивостей інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду отримуємо $A(t) \equiv 0$, $t \in [0,T]$.

Внаслідок єдиності розв'язку прямої задачі (37), (38) отримуємо, що $U(x,y,t) \equiv 0$, $(x,y,t) \in \bar{\Omega}_T$. Отже, розв'язок задачі (1)−(5) єдиний.

Теорему доведено. ◊

Зауважимо, що подібні теореми можна довести у випадку умов перевизначення вигляду

$$a(t)\left[u_x(0,y_0,t) + u_y(x_0,0,t)\right] = \nu(t),$$

де x_0, y_0 − довільні фіксовані точки з проміжків $(0,h)$, $(0,\ell)$ відповідно.

1. *Иванчов Н. И.* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. – 1998. – **39**, № 3. – С. 539–550.
2. *Иванчов Н. И., Пабыривска Н. В.* Об определении двух зависящих от времени коэффициентов в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. – 2002. – **43**, № 2. – С. 406–413.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
4. *Ковальчук С. М.* Визначення коефіцієнта температуропровідності прямокутної пластини // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 45. – С. 96–103.
5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
6. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 428 с.
7. *Cannon J., Rundell W.* Recovering a time dependent coefficient in a parabolic differential equation // J. Math. Anal. Appl. – 1991. – **160.** – P. 572–582.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАРШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА В ДВУМЕРНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Установлены условия существования и единственности решения обратной задачи, которая заключается в отыскании неизвестного старшего коэффициента в двумерном параболическом уравнении. Предполагается, что этот коэфициент зависит только от времени.

INVERSE PROBLEM OF DETERMINATION OF LEADING COEFFICIENT IN TWO-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION

We establish the existence and uniqueness conditions for solution of the inverse problem, which consists in finding the unknown leading coefficient in two-dimensional parabolic equation. It is assumed that this coefficient depends only on time.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
28.12.02