УДК 621.3.01

В. Й. Чабан

УНІФІКОВАНІ РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

Запропоновано уніфіковані диференціальні рівняння електромагнітного поля в нерухомих і рухомих лінійних ізотропних середовищах. Результати одержано з відомих рівнянь електромагнітного поля в нерухомому середовищі на підставі формальних математичних перетворень. Запропоновану теорію опрацьовано для векторів і потенціалів електромагнітного поля. Вона дає можливість глибше зрозуміти природу електромагнітних явищ, зокрема при взаємодії з механічним рухом.

Електродинаміка нерухомих і рухомих середовищ на сьогодні представляє собою струнку математичну теорію, позбавлену практично внутрішніх протиріч. У її основу покладено рівняння Максвелла, над якими всі наступні математичні перетворення здійснюються за строгими правилами диференціального числення. До послуг дослідника-практика є широкий вибір диференціальних рівнянь у частинних похідних, записаних стосовно векторів і потенціалів електромагнітного поля. Аналіз цих рівнянь свідчить, що в переважній більшості їх можна уніфікувати щодо якогось абстрактного вектора $\mathbf{U}$, а при потребі – конкретизувати його залежно від розмірності цього вектора в тій чи іншій системі координат, а в окремих випадках і від можливості одержання необхідних крайових умов. У пропонованій роботі на підставі єдиного підходу розглядаються рівняння електродинаміки нерухомих і рухомих лінійних середовищ у просторі як векторів, так і потенціалів електромагнітного поля. Стаття є логічним продовженням роботи автора [2]. Одержані результати дають можливість подивитися на природу електромагнетизму під ще одним кутом зору, ближчим до дійсності.

1. Рівняння електромагнітного поля в нерухомому середовищі. Запишемо відомі рівняння Максвелла в нерухомому лінійному ізотропному середовищі

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \qquad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \delta, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0\,,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \qquad \mathbf{H} = \nu \mathbf{B}, \qquad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \qquad \delta = \gamma \mathbf{E}\,, \tag{1}$$

де $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ – вектори напруженостей магнітного й електричного поля; $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ – вектори магнітної й електричної індукції; ρ – об'ємна густина електричних зарядів; γ, ν^{-1}, ε – електропровідність, магнітна та електрична проникності середовища; ∇ – оператор набла; t – час.

У зв'язку з трудністю визначення крайових умов розрахункові рівняння (1) записують стосовно одного з векторів $\mathbf{H}$ або $\mathbf{E}$, найчастіше $\mathbf{H}$, оскільки для $\mathbf{E}$ знайти названі умови вдається в рідких випадках.

Якщо з (1) виключити всі вектори, крім $\mathbf{H}$, одержимо згадані рівняння вектора напруженості магнітного поля

$$\frac{\varepsilon}{\nu}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{\nu}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}\,. \tag{2}$$

Якщо з (1) виключити усі вектори, крім $\mathbf{E}$, одержимо згадані рівняння вектора напруженості електричного поля

$$\frac{\varepsilon}{\nu}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{\nu}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}\,. \tag{3}$$

Дещо складніші справи у просторі потенціалів – векторного $\mathbf{A}$ і скалярного φ. Вони, як відомо, поки що вважаються останньою інстанцією, і відповідно нам невідомі обмеження, що накладаються на їхній просторово-часовий розподіл, як, наприклад,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{4}$$

для вектора магнітного поля. Обмеження, подібні до калібровки поля, не розв'язують проблеми. Єдине, що про вектор $\mathbf{A}$ можна сказати з впевненістю, так це те, що він є фізичною субстанцією [1], а вектори поля є його похідними.

Основні вектори поля знаходимо за просторово-часовим розподілом потенціалів

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}, \qquad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{E} - \nabla\varphi. \tag{5}$$

До першого з виразів (5) приходимо безпосередньо з (4), оскільки той перетворює його в тотожність. До другого з виразів (5) приходимо в результаті підстановки $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ в друге рівняння Максвелла (1):

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \tag{6}$$

Підроторний вираз у (6) визначається з точністю до ґрадієнта деякої скалярної функції $\nabla\varphi$, яка й одержала назву скалярного потенціалу. Але, оскільки це не є строго визначена функція, то довелося накласти деяку додаткову умову на співвідношення між обома потенціалами, названу калібровкою поля. Її зазвичай вибирають з умови максимального спрощення основних рівнянь поля. Для лінійних середовищ відома калібровка Лоренца, яка уможливлює роторні операції замінити на лапласіан. Але вона виявилася непридатною для нелінійних середовищ, а в лінійних призводить до збільшення кількості диференціальних рівнянь (необхідних для обчислення φ). Тож у загальному випадку доцільно прийняти калібровку для нелінійних середовищ $\nabla\varphi = 0$ або ще простіше

$$\varphi = 0 \;. \tag{7}$$

Саме такою її прийнято в [3], виходячи з найпростішого вигляду рівнянь електромагнітного поля в нелінійних середовищах. Практика комп'ютерного моделювання квазістаціонарних електромагнітних полів переконливо довела, що без скалярного потенціалу можна обійтися в усіх без винятку випадках. Але це не означає, що в окремих задачах, наприклад, електростатики він не може спрощувати розрахунки.

Згідно з (7) вирази (5) набудуть вигляду

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{E}, \qquad \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}. \tag{8}$$

Замінивши в (1) згідно з (8) вектори поля на векторний потенціал, одержимо рівняння векторного потенціалу

$$\frac{\varepsilon}{\nu} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{\nu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}. \tag{9}$$

Порівнюючи між собою вирази (2), (3), (9), бачимо, що вони повністю ідентичні, тому запишемо їх у загальному вигляді стосовно обіцяного на початку абстрактного вектора $\mathbf{U}$:

$$\frac{\varepsilon}{\nu} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{\nu} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{U}, \tag{10}$$

де $\mathbf{U} = \{\mathbf{H}, \mathbf{E}, \mathbf{A}\}$.

Можна було б піддатися спокусі шукати для вектора $\mathbf{U}$ фізичного трактування, але, як буде показано в наступній праці, така уніфікація не завжди має місце. Це стосується, в першу чергу, нелінійних ізотропних, а особливо – анізотропних середовищ.

Рівняння (10) вважатимемо основним розрахунковим рівнянням електромагнітного поля в нерухомому лінійному ізотропному середовищі. Його уточнюємо стосовно того чи іншого вектора, виходячи з таких міркувань:
– з кількості просторових компонентів того чи іншого вектора в даній системі координат;
– зі способу одержання крайових умов (першого, другого чи третього роду).

2. Рівняння електромагнітного поля в рухомому середовищі. Диференціальне рівняння (10) дуже легко адаптувати на випадок рухомих середовищ. Для цього достатньо узалежнити просторові координати від часу. У нерухомому середовищі координати розглядуваної точки простору є фіксовані і не залежать від часу. Тоді частинні похідні за часом у (10) є вичерпні, а самі рівняння в нерухомому середовищі мають незмінний вигляд (2), (3), (9). У рухомому середовищі координати розглядуваної точки простору $\mathbf{r}(t)$ стосовно нерухомого спостерігача залежать від часу

$$\mathbf{r}(t) \qquad \text{або} \qquad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{11}$$

У такому разі частинні похідні за часом у (11) треба брати вже відносно як повні:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \to \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{U}, \tag{12}$$

де $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ – вектор швидкостей. Причому швидкість може бути як постійною, так і змінною в часі.

Скалярний добуток $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$ є порівняно простим виразом. Для прикладу розкриємо його в декартових координатах:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}, \tag{13}$$

де v_i – проекції вектора швидкостей на координатні вісі:

$$v_i = \frac{\partial i}{\partial t}, \qquad i = x, y, z. \tag{14}$$

Щоб переконатись, що (12) містить компоненту сили Лоренца $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (на відміну від класичних рівнянь), скористаємося однією з відомих теорем векторного аналізу, записаною для конкретних векторів, наприклад, $\mathbf{v}$ і $\mathbf{A}$:

$$-(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} = \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{v}) - \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}). \tag{15}$$

Перший доданок у правій частині цієї рівності згідно з (8) якраз репрезентує названу компоненту. Для інших векторів треба скористатися дещо іншими теоремами.

Якщо тепер похідні за часом в (10) замінити згідно з (12), одержимо [2]

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\nu \nabla \times \nabla \times \mathbf{U} - \gamma(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{U} - \varepsilon\big((\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{U} - (\ddot{\mathbf{v}} \cdot \ddot{\nabla})\mathbf{U}\big), \tag{16}$$

де $\mathbf{a}$ – вектор прискорень, причому його проекції

$$a_i = \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{\partial v_i}{\partial t}, \qquad i = x, y, z. \tag{17}$$

Щоб можна було записати (16) у символах операторів векторного аналізу, як це було зроблено в попередніх випадках, нам довелося ввести в розгляд деякий віртуальний вектор $\ddot{\mathbf{S}}$ щодо реального вектора $\mathbf{S}$ і віртуальний оператор $\ddot{\nabla}$ щодо відомого оператора ∇ [2]

$$\ddot{\mathbf{S}} = \mathbf{x}_0 S_x^2 + \mathbf{y}_0 S_y^2 + \mathbf{z}_0 S_z^2, \qquad \ddot{\nabla} = \mathbf{x}_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{18}$$

оскільки відповідних засобів векторного аналізу на цей випадок немає.

Диференціальне рівняння (16) описує один з найскладніших електромагнітних процесів, що відбуваються в лінійному ізотропному рухомому напівпровідному суцільному середовищі.

У квазістаціонарному наближенні (а цей випадок є найцікавіший з суто практичного боку) рівняння (16) суттєво спрощується:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{\nu}{\gamma}\nabla \times \nabla \times \mathbf{U} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{U}\,. \tag{19}$$

Одержані нами рівняння електромагнітного поля в рухомому середовищі, записані для векторів $\mathbf{A}$ і $\mathbf{H}$, у квазістаціонарному наближенні цілком збігаються з відомими, а в загальному випадку навіть узагальнюють їх. Це цілком відповідає фізиці електромагнітного процесу при швидкостях $v \ll c$. Переходячи до вектора електричного поля, ситуація докорінно змінюється. При загальноприйнятому підході взаємозв'язки через часові похідні між основними векторами поля знаходимо згідно з (1), (7), а в розглядуваному випадку – по-іншому, згідно з (12):

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{E} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}, \qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla\times\mathbf{E} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{B}\,,$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla\times\mathbf{H} - \gamma\mathbf{E} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{D}\,. \tag{20}$$

Розбіжність між виразами (1) і (8), з одного боку, і (20) – з іншого, пояснюється тим, що отримані тут рівняння записано для рухомого спостерігача, а відомі – для нерухомого. Інакше, рівняння (20) містять реальні фізичні величини, а відомі – перетворені з однієї системи координат в іншу.

Таким чином, отримані рівняння не є чисто математичною маніпуляцією диференціальними рівняннями електромагнітного поля. Компоненти, пов'язані з перетворенням координат з рухомої системи до нерухомої, як за нашими даними, так і за даними [8] зумовлюють значну жорсткість диференціальних рівнянь і призводять до погіршення стійкості обчислювального процесу, а йдеться про системи високого й надвисокого порядків. Саме так нами розв'язано в квазістаціонарному наближенні цілу низку практичних задач електродинаміки [4–7, 9].

Одержані результати проливають світло на багато питань теорії електромагнітного поля в нелінійних провідних, діелектричних і напівпровідних середовищах, але про це йтиметься мова в наступній публікації.

1. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. – Москва: Мир, 1977. – 350 с. – Т. 6.
2. *Чабан В.* Електродинаміка рухомих середовищ // Техн. вісті. – 2003. – 1(16), 2(17). – С. 33–36.
3. *Чабан В.* Методи нелінійної електротехніки. – Львів: Вища шк., 1990. – 168 с.
4. *Чабан В., Гущак Р., Чабан А.* Задачі механіки в теорії електромаґнетного поля // 4th Int. Model. School AMSE-UAPL, Crimea-2000. – Rzeszów, 2000. – P. 47–51.
5. *Чабан В., Ковівчак Я., Гущак Р.* Симуляція електромаґнетного поля рухомих зубчастих структур // Proc. 1st Int. Model. School, Krym'96. – Rzeszów, 1996. – P. 121–123.
6. *Чабан В. Й., Гущак Р. І.* Комп'ютація електромаґнетного поля зубчастих структур // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Енергетичні та електромеханічні системи. – 1997. – С. 134–136.
7. *Чабан В. Й., Ковивчак Я. В.* Полевая математическая модель турбогенератора в режиме холостого хода в фазных координатах // Электричество. – № 7. – С. 53-57.
8. *Schinnert M., Schoberl J., Kaltenbacher M.* Multigrid methods for three-dimensional simulation of nonlinear magnetomechanical systems // IEEE Trans. Magnet. – 2002. – **38**, No. 3.
9. *Tchaban V., Kovivchak Y., Tchaban O., Tymoshyk A.* 2D-field mathematical model of turbogenerator // Proc. Int. Conf. Model. and Simulation in Techn. and Soc. Sci., MS'2002, Girona, Catalonia, Spain, 25-27 June 2002. – P. 663–668.

УНИФИЦИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Предложены унифицированные дифференциальные уравнения электромагнитного поля в неподвижных и подвижных линейных изотропных средах, полученные из известных уравнений электромагнитного поля в неподвижной среде на основании формальных математических преобразований. Предложенная теория разработана для векторов и потенциалов электромагнитного поля. Она дает возможность глубже понять природу электромагнитных явлений, в том числе при взаимодействии с механическим движением.

UNIFIED EQUATIONS OF ELECTRODYNAMICS

In this paper we propose the unified electromagnetic field differential equations of electromagnetic interaction in the immovable and movable media. The results are obtained from differential equations of electromagnetic field in the immovable medium on the base of formal mathematical transformations. The proposed mathematical theory is developed for vectors and vector-potentials of electromagnetic field. The results obtained give the possibility to understand the physical essence of electromagnetic phenomena deeper, including the interaction with mechanical movement.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,
Ряшів. ун-т, Ряшів, Польща

Одержано
24.12.03