УДК 534:539.3

П. І. Каленюк, О. Я. Мічуда

ВАРІАЦІЙНА МОДЕЛЬ НЕЛІНІЙНОЇ МЕХАНІКИ ІНЕРЦІЙНИХ ПРУЖНИХ СИСТЕМ

На основі повного функціонала Гамільтона сформульовано варіаційну постановку крайових задач нелінійної механіки деформівних пружних систем. Встановлено фізичні співвідношення локального стану, які враховують ефекти взаємовпливу поступальної, обертальної і деформівної форм руху та релаксаційні явища.

Проблема оптимального проектування та виготовлення елементів конструкцій і приладів, які працюють в умовах дії нестаціонарних періодично змінних в часі зовнішніх навантажень, тісно пов'язана з побудовою математичних моделей нелінійної механіки, які б найбільш адекватно враховували інерційні параметри характерних форм руху, а також релаксаційні ефекти процесу деформування. Постановка цієї проблеми та шляхи її вирішення на основі дифузійної теорії непружного деформування металевих тіл висвітлені у роботах Я. С. Підстригача [6, 7]. Тут, зокрема, вперше введено тензорні параметри інерційності: тензор густини та тензор хімічного потенціалу.

Енергетичні аспекти побудови математичних моделей нелінійної механіки наведено в роботах [2, 4]. За таким підходом у роботі [3] одержано визначальні фізичні співвідношення локального стану з урахуванням взаємозв'язку тензорних характеристик деформаційної та інерційної форм руху.

Варіаційні підходи та методику побудови математичних моделей нелінійної механіки пружних систем з використанням повних функціоналів Гамільтона відображено у роботах [1, 5].

У цій роботі в розвиток результатів, отриманих у статті [3], пропонується варіаційна постановка крайових задач нелінійної механіки інерційних пружних систем на основі повного функціонала Гамільтона.

Вихідні положення моделі. Розглядаємо замкнену (масоізольовану) термопружну систему $\mathcal{K}^*$ неперервно розподілених матеріальних елементів (точок) $k \in \mathcal{K}^*$, яка у відліковому (природному) стані ($t \le t_0$, де t − час), ненавантажена, однорідна та бієктивно відображається на область $X_0^* \cup \partial X_0^*$ евклідового простору. Термодинамічний стан у відліковій конфігурації характеризуємо температурою $T_{(0)}$ і густиною ентропії $s_{(0)}$, хімічним потенціалом $\mu_{(0)}$ і густиною маси $\rho_{(0)}$.

На проміжку часу $[t_1, t_2]$, $t_1 \ge t_0$, система $\mathcal{K}^*$ перебуває під дією статично та динамічно прикладеного зовнішнього силового навантаження, яке зумовлює термомеханічні процеси та зміну локального стану фізично малих підсистем $\delta\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^*$. Ідентифікацію довільної матеріальної точки $k \in \mathcal{K}^*$ реалізуємо за допомогою радіуса-вектора $\mathbf{r}_0$ місця цієї точки у відліковій конфігурації, а її розміщення в актуальний момент часу t − за допомогою радіуса-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}$, де $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)$ − вектор переміщення.

Адитивною мірою стану (ситуації) уявно виділеної підсистеми $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^*$ є енергія $E(\mathcal{K}, t)$. Лінійна частина приросту енергії на малому проміжку часу $(t, t + dt)$ дорівнює

$$dE(\mathcal{K},t) \equiv \int\limits_{X_0} dE\,\delta V_0 =$$

$$= \int\limits_{\partial X_0} \left\{ \left(\boldsymbol{\sigma}_n^+ + \left(\frac{\partial \mathbf{P}_n}{\partial t} \right)^+ \right) \cdot d\mathbf{u} - J_{Q_n}^+ \, dt \right\} \delta\Sigma_0 + \int\limits_{X_0} (\mathbf{f}^+ \cdot d\mathbf{u})\,\delta V_0 \,, \qquad (1)$$

де $E = E(\mathbf{r}_0, t)$ – густина енергії; $\boldsymbol{\sigma}_n^+ = \boldsymbol{\sigma}_n^+(\mathbf{r}_0, t)$ – вектор статично прикладеного поверхневого навантаження; $\mathbf{P}_n^+ = \mathbf{P}_n^+(\mathbf{r}_0, t)$ – вектор імпульсу динамічної складової зовнішнього навантаження; $\mathbf{f}^+ = \mathbf{f}^+(\mathbf{r}_0, t)$ – вектор густини масових сил; $J_{Q_n}^+ = J_{Q_n}^+(\mathbf{r}_0, t)$ – нормальна складова потоку тепла в систему.

У рівнянні (1) і надалі використовується матеріальний підхід. При цьому нормування адитивних параметрів фізично малих підсистем $\delta\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ проводиться за об’ємом δV_0 у відліковій конфігурації (область δX_0) та відповідно параметрів поверхневої дії за площею $\delta\Sigma_0$ фізично малої поверхні $\delta\partial X_0 \subset \partial X_0$ підсистеми $\mathcal{K}$ у цій самій конфігурації.

За ідеального механічного та теплового контакту на поверхні δX_0 виконуються такі граничні умови:

$$\boldsymbol{\sigma}_n^+ = \boldsymbol{\sigma}_n \equiv \mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \qquad J_{Qn}^+ = J_{Qn} \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_Q, \qquad \mathbf{P}_n^+ = \mathbf{P}_n \equiv \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{P}}\,. \qquad (2)$$

У записаних умовах (2) $\mathbf{J}_Q \equiv \mathbf{J}_Q(\mathbf{r}_0, t)$ – вектор теплового потоку, $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}_0, t)$ – тензор напружень Піоли – Кірхгофа першого роду, $\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{r}_0, t)$ – тензор імпульсу інерційного деформування, $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до поверхні.

Якщо у балансовому рівнянні (1) використати граничні умови (2) і перейти від поверхневого інтегралу по області ∂X_0 до об’ємного по області X_0, то базове енергетичне співвідношення набуває вигляду

$$\int\limits_{X_0} dE\,\delta V_0 = \int\limits_{X_0} \left\{ \boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \left[\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{d\hat{\mathbf{P}}}{dt} \right) \cdot d\mathbf{u} - \mathbf{J}_Q \, dt \right] + \mathbf{f}^+ \cdot d\mathbf{u} \right\} dV_0\,. \qquad (3)$$

При локальному описі теплових процесів у термомеханічних системах приймають, що потік тепла $\mathbf{J}_Q = T\mathbf{J}_s$, де $T = T(\mathbf{r}_0, t)$ – абсолютна температура, $\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_s(\mathbf{r}_0, t)$ – потік ентропії. Тоді рівняння балансу тепла можна трансформувати у рівняння балансу ентропії

$$\frac{ds}{dt} = -\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{J}_s + \sigma_s\,, \qquad \sigma_s = \left(-\frac{\boldsymbol{\nabla}_0 T}{T} \right) \cdot \mathbf{J}_s\,,$$

де $s = s(\mathbf{r}_0, t)$ – густина ентропії, $\sigma_s \geq 0$ – виникнення ентропії, $\boldsymbol{\nabla}_0 \equiv \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0}$ – диференціальний оператор Гамільтона. При цьому справджується рівність

$$(-\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{J}_Q)\,dt = T\,ds\,,$$

яка дозволяє подати рівняння балансу енергії (3) так:

$$\int\limits_{X_0} dE\,\delta V_0 = \int\limits_{X_0} \left\{ T\,ds + \boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \left[\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{d\hat{\mathbf{P}}}{dt} \right) \cdot d\mathbf{u} \right] + \mathbf{f}^+ \cdot d\mathbf{u} \right\} \delta V_0\,. \qquad (4)$$

Енергетичне співвідношення (4) виконується для довільної мисленно виділеної підсистеми $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^*$, у тому числі і для фізично малої області $\delta\mathcal{K} \subset$ $\subset \mathcal{K}^*$. На підставі цього одержуємо таку локальну диференціальну 1-форму для густини енергії $E = E(\mathbf{r}_0, t)$:

$$dE = \left[\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \left(\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{d\hat{\mathbf{P}}}{dt}\right) + \mathbf{f}^+\right] \cdot d\mathbf{u} + \left(\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{d\hat{\mathbf{P}}}{dt}\right) \cdot\cdot\, d(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^\top + T\,ds\,. \tag{5}$$

Введемо густину імпульсу поступального руху

$$\mathbf{p} = \int_{t_1}^{t} \left[\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \left(\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{d\hat{\mathbf{P}}}{d\tilde{t}}\right) + \mathbf{f}^+\right] d\tilde{t}$$

та використаємо тотожність

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot d\mathbf{u} + \frac{d\hat{\mathbf{P}}}{dt} \cdot\cdot\, d(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^\top \equiv \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} + (\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{v}) \cdot\cdot\, d\hat{\mathbf{P}}^\top .$$

Тоді рівняння (5) можна подати так:

$$dE = d'H + d'U\,,$$

$$d'H = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} + \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{v} \cdot\cdot\, d\hat{\mathbf{P}}^\top, \qquad d'U = T\,ds + \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot\cdot\, d(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^\top . \tag{6}$$

Тут $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$ – вектор швидкості; $\dfrac{d}{dt} \equiv \dfrac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}_0$ – оператор субстанціональної похідної за часом.

Складова $d'H$ характеризує зміну енергії інерційного руху фізично малої підсистеми, а складова $d'U$ – зміну енергії локального термодинамічного стану. При цьому базовими параметрами інерційного руху є густини імпульсів $\mathbf{p}$ і $\hat{\mathbf{P}}$ поступального та деформаційного руху, а спряженими до них – вектор швидкості $\mathbf{v}$ та тензор швидкостей деформацій $\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{v}$ відповідно. Базовими параметрами локального стану є густина ентропії s і тензор деформації $\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}$ (тензор ґрадієнта місця). Спряженими до них є температура T і тензор напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ (тензор Піоли – Кірхгофа першого роду).

Будемо вважати надалі, що інерційна пружна система $\mathcal{K}^*$ знаходиться під дією лише силового навантаження, тому термічними ефектами будемо нехтувати $T \approx T_0$. Тоді енергетичне співвідношення (6) набуває вигляду

$$dF = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} + \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{v} \cdot\cdot\, d\hat{\mathbf{P}} + \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot\cdot\, d(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^\top , \tag{7}$$

де $F = E - T_0 s$.

Приймаємо, що процеси деформування та інерційного руху є взаємозв'язаними та потенціальними. Тоді диференціальна 1-форма (7) є повним диференціалом на фазовому просторі параметрів $(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{P}}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})$.

Якщо пружний потенціал $F(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{P}}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})$ є заданим, то можна записати такі визначальні співвідношення локальної ситуації (стану):

$$\mathbf{v} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \equiv \hat{\boldsymbol{\Phi}}_1(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{P}}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}), \qquad \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{v} = \frac{\partial F}{\partial \hat{\mathbf{P}}} \equiv \hat{\boldsymbol{\Phi}}_2(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{P}}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}),$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}} \equiv \hat{\boldsymbol{\Phi}}_3(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{P}}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}). \tag{8}$$

Наведені результати покладені в основу запропонованої математичної моделі механіки інерційних пружних систем [3] і використовуються тут при варіаційному формулюванні крайових задач на основі повних енергетичних функціоналів.

Варіаційна постановка крайових задач. За вихідний приймаємо повний енергетичний функціонал Гамільтона, який записаний за підходом Лаґранжа для області тіла $X_0^* \cup \partial X_0^*$ на проміжку часу $[t_1, t_2)$:

$$H_*[\mathbf{p}, \hat{\mathbf{P}}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{X_0^*} \left[H(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{P}}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u}) + \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} - \mathbf{f}^+ \right) \cdot \mathbf{u} \right] dV_0 - \right.$$

$$\left. - \int_{\partial X_0^*} \left[\boldsymbol{\sigma}_n^+ + \left(\frac{d\mathbf{P}_n}{dt} \right)^+ \right] \cdot \mathbf{u}\, d\Sigma_0 \right\} dt - \int_{X_0^*} [\mathbf{u}_{(2)}^+ \cdot \mathbf{p}_{(2)} + (\nabla_0 \otimes \mathbf{u})_{(2)}^+ \cdot\cdot\, \hat{\mathbf{P}}_{(2)}^\top] dV_0 . \qquad (9)$$

Тут $H(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{P}}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u})$ – функція Гамільтона; $\boldsymbol{\sigma}_n^+ + \left(\frac{d\mathbf{P}_n}{dt} \right)^+ \equiv \boldsymbol{\sigma}_{n*}^+$ – вектор ефективного поверхневого навантаження; $\mathbf{u}_{(2)}^+$, $(\nabla_0 \otimes \mathbf{u})_{(2)}^+$ – задані в кінцевий момент часу $t = t_2$ вектор переміщення і тензор деформації. При цьому враховано, що в початковому стані $(t \le t_1)$ інерційна механічна система ненавантажена.

Перша варіація функціонала Гамільтона подається так:

$$\delta H_*[\mathbf{p}, \hat{\mathbf{P}}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{X_0^*} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \mathbf{v} \right) \cdot \delta\mathbf{p} + \left(\frac{\partial H}{\partial \hat{\mathbf{P}}} - \nabla_0 \otimes \mathbf{v} \right) \cdot\cdot\, \delta\hat{\mathbf{P}}^\top + \right. \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial H}{\partial \nabla_0 \otimes \mathbf{u}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}} \right) \cdot\cdot\, \delta(\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^\top \right] dV_0 +$$

$$\left. + \int_{\partial X_0^*} \left[\boldsymbol{\sigma}_n + \frac{d\mathbf{P}_n}{dt} - \boldsymbol{\sigma}_n^+ - \left(\frac{d\mathbf{P}_n}{dt} \right)^+ \right] \cdot \delta\mathbf{u}\, d\Sigma_0 \right\} dt +$$

$$+ \int_{X_0^*} \{ (\mathbf{u}_{(2)} - \mathbf{u}_{(2)}^+) \cdot \delta\mathbf{p}_{(2)} - \mathbf{u}_{(1)} \cdot \delta\mathbf{p}_{(1)} +$$

$$+ [(\nabla_0 \otimes \mathbf{u})_{(2)} - (\nabla_0 \otimes \mathbf{u})_{(2)}^+] \cdot\cdot\, \delta\hat{\mathbf{P}}_{(2)}^\top - (\nabla_0 \otimes \mathbf{u})_{(1)} \cdot\cdot\, \delta\hat{\mathbf{P}}_{(1)}^\top \} \, dV_0 .$$

З варіаційного рівняння математичної моделі інерційного пружного тіла

$$\delta H_*[\mathbf{p}, \hat{\mathbf{P}}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u}, \mathbf{u}] = 0$$

випливають такі співвідношення моделі у локальному формулюванні:

– *визначальні фізичні рівняння*

$$\mathbf{v} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{P}}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u}) ,$$

$$\nabla_0 \otimes \mathbf{v} = \frac{\partial H}{\partial \hat{\mathbf{P}}} \equiv (\nabla_0 \otimes \mathbf{v})(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{P}}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u}) ,$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial H}{\partial \nabla_0 \otimes \mathbf{u}} \equiv \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{P}}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u}) \qquad (10)$$

в області $X_0^* \cup [t_1, t_2]$;

– *граничні умови на поверхні тіла*

$$\boldsymbol{\sigma}_n + \frac{d\mathbf{P}_n}{dt} = \boldsymbol{\sigma}_n^+ + \left(\frac{d\mathbf{P}_n}{dt} \right)^+$$

в області $\partial X_0^* \cup [t_1, t_2]$;

– *часові граничні умови*

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t_1) = 0, \qquad \mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t_2) = \mathbf{u}^{+}_{(2)}(\mathbf{r}_0),$$

$$(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})(\mathbf{r}_0, t_1) = 0, \quad (\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})(\mathbf{r}_0, t_2) = (\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{+}_{(2)}(\mathbf{r}_0).$$

Сформульовані співвідношення (10) вказують на те, що функція Гамільтона $H(\mathbf{p},\hat{\mathbf{P}},\nabla\otimes\mathbf{u})$ є функцією локального стану інерційної пружної системи і відповідно диференціальна 1-форма

$$dH = \mathbf{v}\cdot d\mathbf{p} + (\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{v})\cdot\cdot\, d\hat{\mathbf{P}}^{\top} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\cdot\, d(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^{\top} \tag{11}$$

є повним диференціалом на фазовому просторі $(\mathbf{p},\hat{\mathbf{P}},\nabla\otimes\mathbf{u})$.

Зауважимо, що диференціальна 1-форма (11) для функції Гамільтона співпадає з диференціальною 1-формою (7) для пружного потенціалу вільної енергії Гельмгольца $F(\mathbf{p},\hat{\mathbf{P}},\nabla\otimes\mathbf{u})$. Тому можна прийняти, що

$$H(\mathbf{p},\hat{\mathbf{P}},\nabla\otimes\mathbf{u}) \equiv F(\mathbf{p},\hat{\mathbf{P}},\nabla\otimes\mathbf{u}).$$

Достатньою умовою мінімуму функціонала Гамільтона (9) є умова його опуклості, тобто умова додатної визначеності його другої варіації:

$$\delta^2 H_*\left[\mathbf{p},\hat{\mathbf{P}},\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u},\mathbf{u}\right] = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left\{\int\limits_{X_0^*}\left[\delta^2\left(H + \frac{d\mathbf{p}}{dt}\cdot\mathbf{u}\right)\right]dV_0\right\}dt > 0. \tag{12}$$

Якщо врахувати, що

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}) - \mathbf{p}\cdot\mathbf{v},$$

то варіаційну умову (12) можна подати так:

$$\delta^2 H_* = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\int\limits_{X_0^*}\delta^2(H - \mathbf{p}\cdot\mathbf{v})\,dV_0\right]dt + \int\limits_{X_0^*}\delta^2(\mathbf{p}_{(2)}\cdot\mathbf{u}_{(2)})\,dV_0 > 0.$$

Фізичні співвідношення. Ізотропні системи. В інерційних деформівних системах функцією локального стану (локальної ситуації) фізично малої підсистеми $\delta\mathcal{K}\in\mathcal{K}_*$ в ізотермічних умовах є потенціал вільної енергії $F(\mathbf{p},\hat{\mathbf{P}},\nabla\otimes\mathbf{u})$, який одночасно можна трактувати як відповідну моделі функцію Гамільтона $H(\mathbf{p},\hat{\mathbf{P}},\nabla\otimes\mathbf{u})$, для яких справджуються диференціальні 1-форми (7) і (11) відповідно. Для потенціального опису інерційної системи виконуються фізичні співвідношення (8) і (10).

Перші два з рівнянь (10) складають динамічну систему рівнянь деформаційної та поступальної форм руху фізично малої підсистеми з урахуванням ефектів їх взаємовпливу. Водночас третє рівняння є рівнянням локального рівноважного стану фізично малої підсистеми, який віддзеркалює врахування релаксаційних (дисипативних) ефектів.

Для ізотропних матеріалів пружний потенціал $F(\mathbf{p},\hat{\mathbf{P}},\nabla_0\otimes\mathbf{u})$ є функцією від скалярних інваріантів параметрів локального стану $(\mathbf{p},\hat{\mathbf{P}},\nabla_0\otimes\mathbf{u})$. При встановленні лінійної системи рівнянь локального стану (ситуації) (8) досить обмежитися скалярними інваріантами до другого порядку включно. За незалежні інваріанти фазових координат $(\mathbf{p},\hat{\mathbf{P}},\nabla_0\otimes\mathbf{u})$ можна прийняти, зокрема, такі:

$$I_1^{(2)} = I(\hat{\mathbf{P}}) \equiv \hat{\mathbf{P}}\cdot\cdot\,\hat{\mathbf{I}}, \qquad I_1^{(3)} = I(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u}),$$

$$I_2^{(1)} = I(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}), \qquad I_2^{(2)} = I(\hat{\mathbf{P}}^s\cdot\hat{\mathbf{P}}^s), \qquad I_2^{(3)} = I((\nabla_0\otimes\mathbf{u})^s\cdot(\nabla_0\otimes\mathbf{u})^s),$$

$$I_{21}^{(2)} = I(\hat{\mathbf{P}}^a\cdot(\hat{\mathbf{P}}^a)^\top), \qquad I_{21}^{(3)} = I((\nabla_0\otimes\mathbf{u})^a\cdot((\nabla_0\otimes\mathbf{u})^a)^\top).$$

Тут верхні індекси s, a вказують на те, що розглядаємо симетричну або антисиметричну складову тензора.

До наведених скалярних інваріантів необхідно долучити скалярні інваріанти, які характеризують енергію взаємовпливу локального інерційного руху та деформування

$$I_2^{(12)} = I(\mathbf{p}\times\hat{\mathbf{P}}), \qquad I_2^{(13)} = I(\mathbf{p}\times(\nabla_0\otimes\mathbf{u})),$$

$$I_2^{(23)} = I(\hat{\mathbf{P}}^s\cdot(\nabla_0\otimes\mathbf{u})^s), \qquad I_{2*}^{(23)} = I(\hat{\mathbf{P}}^a\cdot((\nabla_0\otimes\mathbf{u})^a)^\top).$$

Як наслідок одержимо такі фізичні рівняння моделі:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\left[\mathbf{p} - \beta_*\frac{\rho}{\rho_\ell}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}\cdot\cdot\hat{\mathbf{P}} - \alpha_*\rho\hat{\boldsymbol{\epsilon}}\cdot\cdot\nabla_0\otimes\mathbf{u}\right],$$

$$\nabla_0\otimes\mathbf{v} = \frac{1}{\rho_\ell}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\eta_0}P - \beta_0\rho_\ell e\right)\hat{\mathbf{I}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta_1}(\hat{\mathbf{P}}^s)^d - \beta_1\rho_\ell\hat{\mathbf{e}}^d\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta_1^*}\hat{\mathbf{P}}^a - \beta_1'\rho_\ell\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right) - \beta_*\frac{\rho_\ell}{\rho}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}\cdot\mathbf{p}\right], \tag{13}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = K(e - \alpha_0\varepsilon)\hat{\mathbf{I}} + 2G(\hat{\mathbf{e}}^d - \alpha_1\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^d) + 2G'(\hat{\boldsymbol{\varphi}} - \alpha_1'\hat{\boldsymbol{\omega}}) - \alpha_*\hat{\boldsymbol{\epsilon}}\cdot\mathbf{p}. \tag{14}$$

Тут

$$P = I(\hat{\mathbf{P}}), \qquad \hat{\mathbf{e}} = (\nabla_0\otimes\mathbf{u})^s, \qquad e = I(\hat{\mathbf{e}}), \qquad \hat{\mathbf{e}}^d = \hat{\mathbf{e}} - \frac{1}{3}e\hat{\mathbf{I}},$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = (\nabla_0\otimes\mathbf{u})^a, \qquad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\nabla_0\otimes\mathbf{v})^s, \qquad \varepsilon = I(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}), \qquad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^d = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{3}\varepsilon\hat{\mathbf{I}},$$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = (\nabla_0\otimes\mathbf{v})^a,$$

$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ – антисиметричний тензор Леві – Чивіта; ρ – об'ємна густина; ρ_ℓ – лінійна густина; K – модуль об'ємного стиску; G – модуль зсуву; G' – модуль пружного повороту; $\rho_\ell\eta_0 \equiv K_*$; $\rho_\ell\eta_1 \equiv G_*$; $\rho_\ell\eta_1^* \equiv G_*'$; (K_*, G_*, G_*') – інерційні модулі пружності; $(\beta_0, \beta_1, \beta_1', \beta_*)$ – коефіцієнти взаємовпливу параметрів локального інерційного руху, деформування та пружних поворотів; $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_1', \alpha_*)$ – коефіцієнти залежності складових інерційного руху від параметрів деформування.

Фізичні співвідношення (13), (14) механіки інерційних пружних систем дозволяють записати відповідні моделі балансові рівняння для поступальної, обертальної і деформаційних форм руху

$$\rho\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \alpha_*\nabla_0\otimes\mathbf{v}\right) = \nabla_0\cdot\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{d\hat{\mathbf{P}}}{dt}\right) - \beta_*\frac{\rho}{\rho_l}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}\cdot\cdot\frac{d\hat{\mathbf{P}}}{dt} + \mathbf{f}^+,$$

$$\rho_\ell\left(\frac{d(\nabla_0\otimes\mathbf{v})^a}{dt} + \frac{\beta_1'}{2}(\nabla_0\otimes\mathbf{v})^a\right) = \frac{1}{2\eta_1^*}\frac{d\hat{\mathbf{P}}^a}{dt} - \beta_*\frac{\rho_\ell}{\rho}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}\cdot\left(\nabla_0\cdot\frac{d\hat{\mathbf{P}}}{dt}\right),$$

$$\rho_\ell\left(\frac{d(\nabla_0\cdot\mathbf{v})}{dt} + \frac{\beta_0}{3}\nabla_0\cdot\mathbf{v}\right) = \frac{1}{3\eta_0}\frac{d\hat{\mathbf{P}}}{dt},$$

$$\rho_\ell\left(\frac{d(\nabla_0\otimes\mathbf{v})^d}{dt} + \frac{\beta_1}{2}(\nabla_0\otimes\mathbf{v})^d\right) = \frac{1}{2\eta_1}\frac{d(\hat{\mathbf{P}}^s)^d}{dt}. \tag{15}$$

Третє і четверте з рівнянь (15) сформульовано для складових тензора $\nabla_0 \otimes \mathbf{v}$, які характеризують зміну об'єму та форми фізично малої підсистеми.

Рівняння (15) разом з фізичними співвідношеннями (13), (14), а також з відповідними просторово-часовими умовами є вихідними для постановки і математичного формулювання відповідних просторово-часових крайових задач механіки інерційних пружних систем. Водночас, запропонована варіаційна постановка крайових задач на основі повного функціонала Гамільтона може бути ефективно використана для розробки алгоритмів і програм скінченно-елементного кількісного аналізу параметрів динамічних процесів.

Зауважимо також, що фізичні співвідношення (13) можна трактувати як перші інтеграли рівнянь руху (15) для динамічної інерційної пружної системи з урахуванням дисипативних ефектів.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень (проект № 01.07/128)

1. *Бурак Я. И., Мороз Г. И.* Вариационная постановка и исследование краевых задач нелинейной теории пластин с использованием энергетического подхода // Прикл. математика и механика. – 2003. – **67**, № 6. – С. 977–985.
2. *Бурак Я. Й.* Математична модель потенціального опису нелінійних пружних систем // Доп. НАН України. – 1995. – № 2. – С. 41–49.
3. *Бурак Я. Й., Каленюк П. І., Мічуда О. Я.* Про визначальні співвідношення в механіці інерційних пружних систем // Доп. НАН України. – 2004. – № 3. – С. 41–45.
4. *Бурак Я. Й., Чапля Є. Я.* Континуальні моделі механіки бінарних систем // Доп. НАН України. – 1995. – № 4. – С. 7–15.
5. *Бурак Я., Чапля Є., Нагірний Т. та ін.* Фізико-математичне моделювання складних систем. – Львів: СПОЛОМ, 2004. – 264 с.
6. *Підстригач Я. С.* Диференціальні рівняння дифузійної теорії деформації твердого тіла // Доп. АН УРСР. – 1963. – № 31. – С. 336–340.
7. *Подстригач Я. С.* Дифузионная теория неупругости металлов // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1965. – № 2. – С. 67–72.

ВАРИАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ ИНЕРЦИОННЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ

С использованием полного функционала Гамильтона сформулирована вариационная постановка краевых задач нелинейной механики деформируемых упругих систем. Получены физические соотношения локального состояния, учитывающие эффекты взаимосвязи поступательной, вращательной и деформационной форм движения, а также релаксационные явления.

VARIATIONAL MODEL OF NONLINEAR MECHANICS FOR INERTIAL ELASTIC SYSTEMS

On the basis of Hamilton functional the variational formulation of the boundary-value problems of nonlinear mechanics for deformable elastic systems is developed. Physical relations of local state, which take into account the interaction effects of translational, rotational and deformable motion forms and relaxation phenomena, are determined.

Ін-т прикл. математики та фундам. наук
нац. ун-ту «Львів. політехніка», Львів

Одержано
21.07.05