

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН І МІЦНІСТЬ ЛОКАЛЬНО НЕОДНОРІДНОГО ШАРУ В ПРОЦЕСІ НАГРІВАННЯ

Запропоновано підхід і вивчено вплив температури на межу міцності та її розмірний ефект для шару в процесі його нагрівання (охолодження). За базові прийнято співвідношення моделі локально-градієнтного термопружного тіла та критерій першої класичної теорії міцності.

Реальні елементи конструкцій звичайно перебувають у складних умовах комплексної взаємодії з оточенням, яке значною мірою може змінювати їхні експлуатаційні, у тому числі міцнісні, характеристики. Тому важливого значення набуває розвиток модельних уявлень з метою врахування внутрішньої структури та адекватного опису поведінки реальних тіл. У роботах [1, 2, 5, 8] показано, що локально-градієнтний підхід у термомеханіці дозволяє описувати залежність міцності від температури та домішок. У рамках цього підходу вивчено [1, 8] залежність межі міцності від постійної в часі температури та встановлено узгодженість одержаних результатів з відомими експериментальними даними. Значний практичний і науковий інтерес мають дослідження впливу змінної у часі та за просторовими координатами температури тіла на його міцність. Такий інтерес зумовлений також тим, що проведення відповідних експериментальних досліджень є практично неможливим.

У цій роботі за локально-градієнтного підходу в термомеханіці вивчено напружено-деформований стан шару у процесі його нагрівання (охолодження). На цій основі з використанням першого критерію міцності досліджено вплив температури на межу міцності та її розмірний ефект.

1. Постановка задачі. Розглянемо термопружний шар, який у декартовій системі координат $\{x, y, z\}$ займає область $|x| \leq \ell$ простору та навантажений на нескінченності розтягувальними зусиллями інтенсивності p у напрямку осі Oy . Вважаємо, що на вільних від силового навантаження поверхнях $x = \pm \ell$ тіла задано значення збурення хімічного потенціалу $\eta_a \neq 0$. У початковий момент часу $\tau = 0$ температура шару є однорідною і дорівнює температурі навколишнього середовища T_* . Для $\tau > 0$ на поверхнях шару $x = \pm \ell$ задано відмінне від T_* значення температури T_a ($T_a \neq T_*$).

За розглядуваної зовнішньої дії у тілі реалізується одновимірною за просторовою координатою x ситуація

$$\sigma = \sigma(x, \tau), \quad \eta = \eta(x, \tau), \quad \theta = \theta(x, \tau),$$

де σ – тензор напружень; $\theta = T - T_*$ – збурення температури T відносно початкового значення T_* .

Приймаючи за ключові функції ненульові компоненти тензора напружень σ , хімічний потенціал η і температуру θ , лінійну систему рівнянь локально-градієнтної термопружності, що описує квазістатичну поведінку розглядуваного шару, запишемо у вигляді [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} &= b_m \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \alpha_1^2 \eta - \alpha_2^2 \sigma - \alpha_3^2 \theta &= 0, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \end{aligned} \tag{1}$$

де σ_{yy}, σ_{zz} – компоненти тензора напружень; $\sigma = \sigma : \mathbf{I}$, \mathbf{I} – одиничний тензор; $b_m, a, x_i, i = 1, 2, 3$, – сталі.

2. Побудова та аналіз розв'язку. З аналізу системи рівнянь (1) випливає, що вивчення поведінки шару зводиться до послідовного визначення температури та подальшого дослідження хімічного потенціалу й напружень. Відповідно до фізичної постановки задачі початкові та граничні умови для температури приймаємо у вигляді

$$\theta(x, 0) = 0, \quad \theta(\pm \ell, \tau) = \theta_a.$$

Згідно з [3] температура у шарі описується формулою

$$\theta(x, \tau) = \theta_a \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(v_n x) \exp(-v_n^2 a \tau) \right),$$

де $\alpha_n = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$, $v_n = \frac{\pi}{\ell} \left(n - \frac{1}{2} \right)$, $n = 1, 2, \dots$

На рис. 1 показано зміну за часом $\tau^* = \frac{a\tau}{\ell^2}$

зведеної температури $\theta^* = \frac{\theta}{\theta_a}$ на серединній поверхні шару (при $x = 0$) як на такій, що характеризує процес нагрівання (охолодження).

За відомої температури хімічний потенціал і ненульові компоненти тензора напруження визначаємо на основі перших трьох рівнянь системи (1) і таких умов:

$$\eta \Big|_{x=\pm\ell} = \eta_a \tag{2}$$

на поверхнях $x = \pm \ell$ шару та

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sigma_{yy} dx = 2\ell p, \quad \int_{-\ell}^{\ell} x \sigma_{yy} dx = 0, \quad \int_{-\ell}^{\ell} \sigma_{zz} dx = 0, \quad \int_{-\ell}^{\ell} x \sigma_{zz} dx = 0 \tag{3}$$

у довільних поперечних перерізах тіла $y = \text{const}$, $z = \text{const}$.

Хімічний потенціал і напруження, що задовольняють систему співвідношень (1)–(3), мають вигляд

$$\begin{aligned} \eta(x, \tau) &= \eta_a + \frac{x_1^2 \eta_a + x_2^2 p + x_3^2 \theta_a}{\xi^2 \chi(\xi \ell)} \left(\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi \ell)} - 1 \right) + \\ &+ \theta_a x_3^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\xi^2 + v_n^2} \left(\frac{(-1)^n}{v_n \ell} \frac{D}{\chi(\xi \ell)} \left(\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi \ell)} - 1 \right) + \cos(v_n x) \right) \exp(-v_n^2 a \tau), \\ \sigma_{zz}(x, \tau) &= \frac{b_m}{2} \frac{x_1^2 \eta_a + x_2^2 p + x_3^2 \theta_a}{\xi^2 \chi(\xi \ell)} \left(\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi \ell)} - \frac{\text{th}(\xi \ell)}{\xi \ell} \right) + \\ &+ \theta_a x_3^2 \frac{b_m}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\xi^2 + v_n^2} \left[\frac{(-1)^n D}{v_n \ell \chi(\xi \ell)} \left(\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi \ell)} - \frac{\text{th}(\xi \ell)}{\xi \ell} \right) + \right. \\ &\left. + \cos(v_n x) + \frac{(-1)^n}{v_n \ell} \right] \exp(-v_n^2 a \tau), \\ \sigma_{yy}(x, \tau) &= p + \sigma_{zz}(x, \tau), \end{aligned} \tag{4}$$

де $\xi^2 = x_1^2 + b_m x_2^2$, $D = \frac{b_m x_2^2}{\xi^2}$, $\chi(\xi \ell) = 1 - D \left(1 - \frac{\text{th}(\xi \ell)}{\xi \ell} \right)$.

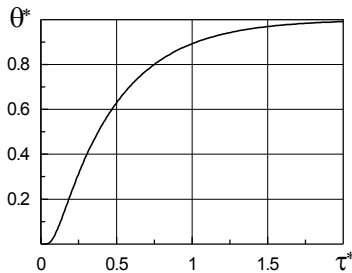


Рис. 1

Хімічний потенціал і напруження у розглядуваній точці (безрозмірна координата x/ℓ) залежать від товщини шару (безрозмірного параметра $\xi\ell$), тому їм властивий розмірний ефект [3, 7]. При збільшенні товщини шару ($\xi\ell \rightarrow +\infty$) ці величини прямують до таких значень:

$$\begin{aligned}\eta(x, \tau) &= \eta_a + \frac{x_1^2 \eta_a + x_2^2 p + x_3^2 \theta_a}{x_1^2} \left(\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi \ell)} - 1 \right) + \\ &+ \theta_a x_3^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\xi^2 + v_n^2} \left(\frac{(-1)^n}{v_n \ell} \frac{D}{1-D} \left(\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi \ell)} - 1 \right) + \cos(v_n x) \right) \exp(-v_n^2 a \tau), \\ \sigma_{zz}(x, \tau) &= \frac{b_m}{2} \frac{x_1^2 \eta_a + x_2^2 p + x_3^2 \theta_a}{x_1^2} \frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi \ell)} + \\ &+ \theta_a x_3^2 \frac{b_m}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\xi^2 + v_n^2} \left[\frac{(-1)^n D}{v_n \ell (1-D)} \frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi \ell)} + \right. \\ &\left. + \cos(v_n x) + \frac{(-1)^n}{v_n \ell} \right] \exp(-v_n^2 a \tau).\end{aligned}\quad (5)$$

У початковий момент часу $\tau = 0$ і при $\tau \rightarrow \infty$ стан шару є рівноважним. Тоді напруження описуються формулами

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}(x, 0) &= \frac{b_m}{2} \frac{x_1^2 \eta_a + x_2^2 p}{\xi^2 \chi(\xi \ell)} \left(\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi \ell)} - \frac{\text{th}(\xi \ell)}{\xi \ell} \right), \\ \sigma_{zz}(x, \infty) &= \frac{b_m}{2} \frac{x_1^2 \eta_a + x_2^2 p + x_3^2 \theta_a}{\xi^2 \chi(\xi \ell)} \left(\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi \ell)} - \frac{\text{th}(\xi \ell)}{\xi \ell} \right).\end{aligned}$$

Ненульовий напружено-деформований стан тіла в рівновазі за відсутності зовнішнього силового навантаження зумовлений приповерхневою неоднорідністю, спричиненою різними умовами взаємодії частинок у приповерхневих і внутрішніх областях тіла. При цьому параметр ξ^{-1} є характерним розміром області приповерхневої неоднорідності. З аналізу наведених вище формул випливає, що температура не впливає на характерний розмір області приповерхневої неоднорідності, однак може змінювати кількісні значення розглядуваних полів.

Поведінку полів зведених хімічного потенціалу $\eta^* = (\eta - \eta_a)/\eta^{(x)}$ і напружень $\sigma^* = 2\sigma_{zz}/(\eta^{(x)} b_m)$, де $\eta^{(x)} = (x_1^2 \eta_a + x_2^2 p + x_3^2 \theta_a)/\xi^2$, для значень параметрів $D = 0.5$, $\xi\ell = 5$, $\xi^2 \ell^2 x_3^2 \theta_a / (x_1^2 \eta_a + x_2^2 p + x_3^2 \theta_a) = 10$ зображено на рис. 2, 3. Криві 1-3 на рис. 2 відповідають значенням зведеного часу $\tau^* = 0, 0.25, 2$, криві 1, 2 на рис. 3 – значенням зведеного часу $\tau^* = 0, 2$.

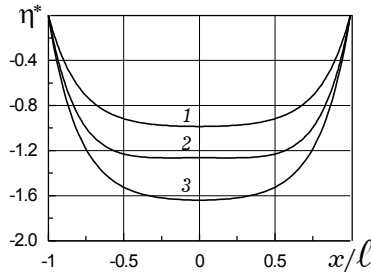


Рис. 2

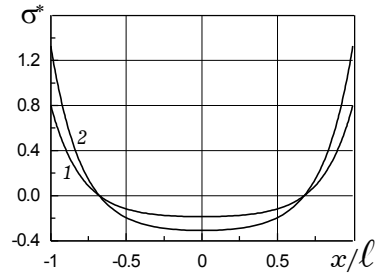


Рис. 3

У випадку силового навантаження розтягу ($p > 0$) найбільшими напруженнями у тілі є поверхневі напруження $\sigma_{yy}(\pm \ell, \tau)$, які змінюються від значення

$$\sigma_{yy}(\pm \ell, 0) = p + \frac{1}{2} \frac{x_1^2 \eta_a + x_2^2 p}{x_2^2} \cdot \frac{1 - \chi(\xi \ell)}{\chi(\xi \ell)}$$

у початковий момент часу $\tau = 0$ до значення

$$\sigma_{yy}(\pm \ell, \infty) = p + \frac{1}{2} \frac{x_1^2 \eta_a + x_2^2 p + x_3^2 \theta_a}{x_2^2} \cdot \frac{1 - \chi(\xi \ell)}{\chi(\xi \ell)}$$

при $\tau \rightarrow \infty$ за формулою

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(\pm \ell, \tau) = p + \frac{1}{2} \frac{x_1^2 \eta_a + x_2^2 p + x_3^2 \theta_a}{x_2^2} \cdot \frac{1 - \chi(\xi \ell)}{\chi(\xi \ell)} + \\ + \theta_a x_3^2 \frac{b_m}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{v_n \ell} \frac{\alpha_n}{\xi^2 + v_n^2} \exp(-v_n^2 a \tau). \end{aligned} \quad (6)$$

3. Міцність шару в процесі його нагрівання. Використаємо ці співвідношення для вивчення міцності шару в процесі його нагрівання ($\theta_a > 0$) чи охолодження ($\theta_a < 0$). За критерій крихкого руйнування тіла приймемо критерій першої класичної теорії міцності [6]. Вважаємо, що тіло зруйнується миттєво, якщо найбільші головні напруження хоча би в одній точці тіла досягають критичного для матеріалу значення σ^{cr} . Враховуючи співвідношення (6), для критичного значення інтенсивності силового навантаження p^{cr} , що призводить до руйнування шару, одержуємо

$$\begin{aligned} p^{cr} = \frac{2\chi(\xi \ell)}{1 + \chi(\xi \ell)} \sigma^{cr} - \frac{x_1^2 \eta_a + x_3^2 \theta_a}{x_2^2} \frac{1 - \chi(\xi \ell)}{1 + \chi(\xi \ell)} - \\ - \theta_a x_3^2 \frac{b_m}{1 + \chi(\xi \ell)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{v_n \ell} \frac{\alpha_n}{\xi^2 + v_n^2} \exp(-v_n^2 a \tau). \end{aligned} \quad (7)$$

Якщо через σ_+ позначити інтенсивність критичного навантаження, що призводить до руйнування товстих шарів ($\xi \ell \gg 1$) при початковій температурі ($\theta = 0$), то формулу (7) запишемо як

$$\begin{aligned} p^{cr}(\tau) = \frac{2-D}{1-D} \frac{\chi(\xi \ell)}{1 + \chi(\xi \ell)} \sigma_+ + \left(\frac{\chi(\xi \ell)}{1 + \chi(\xi \ell)} \cdot \frac{D}{1-D} - \frac{1 - \chi(\xi \ell)}{1 + \chi(\xi \ell)} \right) \frac{x_1^2}{x_2^2} \eta_a - \\ - \left\{ \frac{1 - \chi(\xi \ell)}{1 + \chi(\xi \ell)} \frac{x_3^2}{x_2^2} + x_3^2 \frac{b_m}{1 + \chi(\xi \ell)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{v_n \ell} \frac{\alpha_n}{\xi^2 + v_n^2} \exp(-v_n^2 a \tau) \right\} \theta_a. \end{aligned} \quad (8)$$

Для товстих шарів, для яких розмірний ефект є нехтувально малим, це співвідношення спрощується:

$$p^{cr}(\tau) = \sigma_+ - \left\{ \frac{D}{2-D} \frac{x_3^2}{x_2^2} + x_3^2 \frac{b_m}{2-D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{v_n \ell} \frac{\alpha_n}{\xi^2 + v_n^2} \exp(-v_n^2 a \tau) \right\} \theta_a. \quad (9)$$

Праву сторону співвідношень (8), (9) можна трактувати як таку, що описує міцність шару при його нагріванні (охолодженні) з урахуванням і без урахування розмірного ефекту відповідно. При $\tau \rightarrow \infty$ інтенсивність критичного навантаження для тонких плівок прямує до значення

$$p^{cr}(\infty) = \frac{2-D}{1-D} \cdot \frac{\chi(\xi\ell)}{1+\chi(\xi\ell)} \sigma_+ + \left(\frac{\chi(\xi\ell)}{1+\chi(\xi\ell)} \cdot \frac{D}{1-D} - \frac{1-\chi(\xi\ell)}{1+\chi(\xi\ell)} \right) \frac{x_1^2}{x_2^2} \eta_a - \frac{1-\chi(\xi\ell)}{1+\chi(\xi\ell)} \frac{x_3^2}{x_2^2} \theta_a,$$

а для товстих шарів, товщина яких є значно більшою від характерного розміру області приповерхневої неоднорідності, – до

$$p^{cr}(\infty) = \sigma_+ - \frac{D}{2-D} \frac{x_3^2}{x_2^2} \theta_a.$$

Праві сторони цих співвідношень можна трактувати як такі, що описують міцність шару, температура якого є однорідною.

На рис. 4 показано залежність від часу зведеного критичного значення зовнішнього силового навантаження шару ($p^* = p^{cr}/\sigma^{cr}$) у процесі його нагрівання для $\xi\ell=10$, $D=0.75$, $\theta_a x_3^2 \ell^2 b_m / \sigma^{cr} = 1, 2, 3$ (криві 1–3), $(x_1^2 \eta_a + x_3^2 \theta_a) / (x_2^2 \sigma^{cr}) = 0.25, 0.5$ (відповідно суцільні та штрихові лінії).

Бачимо, що значення силового навантаження, що призводить до крихкого руйнування шару, монотонно зменшується з часом. Співвідношення (9) можна використати для знаходження часу τ руйнування шару при

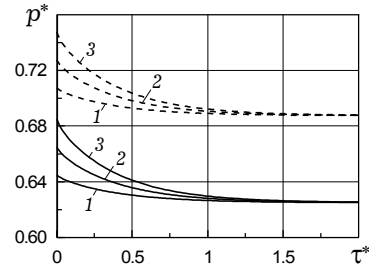


Рис. 4

заданому силовому навантаженні. Приймаючи, що $p^{cr}(\tau) = p$, з (9) одержуємо таке трансцендентне рівняння:

$$\sigma_+ - \left\{ \frac{D}{2-D} \frac{x_3^2}{x_2^2} + x_3^2 \frac{b_m}{2-D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{v_n \ell} \frac{\alpha_n}{\xi^2 + v_n^2} \exp(-v_n^2 a \tau) \right\} \theta_a = p.$$

Якщо розв'язок τ цього рівняння існує, то він є моментом часу, коли шар зруйнується. В іншому випадку (коли рівняння не має розв'язку) межа міцності не досягається.

4. Висновки. На основі виконаних досліджень можна стверджувати, що:

- Значення силового навантаження, що призводить до руйнування тіла, визначається напружено-деформованим станом, спричиненим силовою і температурною зовнішніми діями, та напружено-деформованим станом, зумовленим різними умовами взаємодії частинок у внутрішній області тіла та на його поверхні.
- У рамках розглядуваної моделі локально неоднорідного термопружного тіла температура змінює значення приповерхневих напружень, впливаючи таким чином на величину критичного значення силового навантаження і розмірний ефект межі міцності.
- При заданому силовому навантаженні одержані формули описують залежність межі міцності шару та її розмірного ефекту від температури (збільшення міцності при охолодженні та зменшення при нагріванні). Отримано трансцендентне рівняння, яке може бути використано для знаходження часу руйнування шару в процесі його нагрівання.

Робота частково підтримана Державним фондом фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки України (проект № 01.07/128).

1. Бурак Я. И., Нагирный Т. С., Грицина О. Р., Червинка К. А. Поверхностные напряжения в слое. Влияние температуры и примесей на прочность // Проблемы прочности. – 2000. – № 6. – С. 35–43.
2. Бурак Я., Чапля Є., Нагирний Т. та ін. Фізико-математичне моделювання складних систем. – Львів: СПОЛОМ, 2004. – 264 с.
3. Иголкин Б. И. О природе масштабного эффекта // Проблемы прочности. – 1978. – № 3. – С. 50–52.
4. Лыков А. Д. Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1967. – 599 с.
5. Нагирний Т. С., Червинка К. А. Поверхневi напруження в шарі. Вплив температури на приповерхневий натяг та міцність // Доп. НАН України. – 2000. – № 10. – С. 57–62.
6. Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Партон В. С. Основы механики разрушения материалов: Справ. пособие. – Киев: Наук. думка, 1988. – 488 с. – (Механика разрушения и прочность материалов: В 4 т. – Т. 1.)
7. Писаренко Г. С., Троценко В. Т. Статистичні теорії міцності та їх застосування до металокерамічних матеріалів. – Київ: Вид-во АН УРСР, 1964. – 106 с.
8. Nagirny T., Burak Y. Thermodynamical models of continual description of the coupled processes in thin-film systems // Trends in Continuum Phys. – Poznań: Word Sci., 1999. – P. 263–276.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПРОЧНОСТЬ ЛОКАЛЬНО НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ В ПРОЦЕССЕ НАГРЕВА

Предложен подход и изучено влияние температуры на границу прочности и ее размерный эффект для слоя в процессе его нагрева (охлаждения). В качестве базовых приняты соотношения модели локально-градиентного термоупругого тела и критерий первой классической теории упругости.

STRESSED-STRAINED STATE AND STRENGTH OF LOCALLY INHOMOGENEOUS LAYER DURING HEATING PROCESS

An approach is proposed and temperature influence on the strength limit and its size effect are investigated for a layer during its heating (cooling). The relations of locally-gradient thermoelastic solid model and the first classical criterion of strength are taken as the base for consideration.

¹ Центр мат. моделювання
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

² Зеленогур. ун-т, Зелена Гура, Польща,

³ Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
02.12.04