

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ ПОБЛИЗУ ТОНКОГО ПРУЖНОГО ВКЛЮЧЕННЯ ПІД ДІЄЮ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ХВИЛІ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

Розв'язано нестационарну задачу про концентрацію напружень поблизу тонкого пружного включення у середовищі, яке знаходиться в умовах антиплоскої деформації. Припускається, що у початковий момент часу на включення набігає плоска нестационарна хвиля поздовжнього зсуву. Запропоновано метод розв'язування, який полягає у використанні інтегрального перетворення Лапласа за часом і поданні зображення переміщення у вигляді розривного розв'язку відповідного диференціального рівняння. Це дозволило звести початкову задачу до сингулярного інтегрального рівняння відносно зображення стрибка напружень. Оригінали визначених зображень відтворюються чисельно методом, який ґрунтується на заміні інтеграла Мелліна рядом Фур'є.

Наявність у пружних тілах дефектів або конструктивних елементів у вигляді тонких включень викликає концентрацію напружень, яка може призвести до їх руйнування. Тому розв'язання задач механіки деформованого тіла з такими включеннями має важливе практичне й теоретичне значення. При розгляді подібних задач часто включення припускаються жорсткими, що спрощує розв'язування задач, але не дозволяє враховувати вплив пружних властивостей включення на концентрацію напружень поблизу нього. Задачі для тіл з пружними включеннями розглядалися в основному у статичній постановці [1, 3, 5]. Слід відмітити роботу [9], де наведено розв'язок нестационарної задачі для тіла з м'яким включенням. У поданій роботі розв'язано задачу про дію нестационарної хвилі поздовжнього зсуву на включення у вигляді пружної пластини.

Постановка задачі. Нехай пружне середовище, яке знаходиться у стані антиплоскої деформації, містить тонке пружне включення у вигляді пластини товщини h . У площині xOy це включення займає область $|x| \leq a$, $-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}$. Припустимо, що у початковий момент часу $t = 0$ на включення діє хвиля поздовжнього зсуву, яка викликає переміщення

$$w_0 = A_0(c_2 t - (x + a) \cos \theta_0 - y \sin \theta_0) \times \\ \times H(c_2 t - (x + a) \cos \theta_0 - y \sin \theta_0), \quad (1)$$

$c_2^2 = \frac{\rho_1}{G_1}$ – швидкість розповсюдження хвилі поздовжнього зсуву; ρ_1, G_1 – густина та модуль зсуву середовища; θ_0 – кут між напрямком розповсюдження хвилі та додатним напрямком осі Ox . Тоді єдина відмінна від нуля z -компонента вектора переміщень задовольняє такі хвильове рівняння і початкові умови:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ w(x, y, 0) = w_0(x, y, 0), \quad \dot{w}(x, y, 0) = \dot{w}_0(x, y, 0). \quad (2)$$

До цього рівняння слід додати умови на включенні

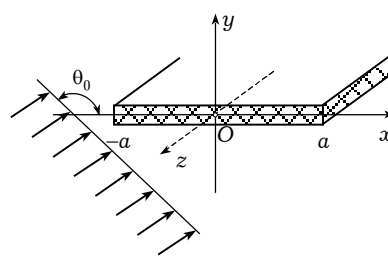


Рис. 1

$$\langle \tau_{zy} \rangle = \tau_{zy}(x, +0, t) - \tau_{zy}(x, -0, t) = \chi(x, t), \quad (3)$$

$$w(x, \pm 0, t) = u_0(x, t), \quad |x| \leq a, \quad (4)$$

де $\chi(x, t)$ – невідомий стрибок дотичних напружень; $u_0(x, t)$ – поздовжні вздовж осі Oz переміщення точок включення, які визначаються з рівняння [6]

$$u_0''(x, t) - \frac{1}{c_0^2} \ddot{u}_0(x, t) = -\frac{\chi(x, t)}{hG_0}, \quad c_0^2 = \frac{E_0}{2\rho_0(1 + \nu_0)}, \quad (5)$$

з такими початковими та граничними умовами:

$$u_0(x, 0) = 0, \quad \dot{u}_0(x, 0) = 0, \quad u_0'(\pm a, t) = 0. \quad (6)$$

Тут G_0, E_0, ν_0, ρ_0 – модуль зсуву, пружності, коефіцієнт Пуассона та густина матеріалу включення.

Подамо переміщення у середовищі у вигляді суми

$$w = w_0 + w_1, \quad (7)$$

w_1 – переміщення, викликані хвилею, відбитою від включення. Очевидно, функція w_1 задовольняє рівняння (2) і нульові початкові умови, а також граничну умову на включенні, яка випливає з (4):

$$w_1(x, \pm 0, t) = u_0(x, t) - w_0(x, \pm 0, t), \quad |x| \leq a. \quad (8)$$

Метод розв'язання. Для розв'язання сформульованої задачі застосуємо інтегральне перетворення Лапласа за часом

$$F(x, y, p) = \int_0^{\infty} f(x, y, t) e^{-pt} dt.$$

Тоді з (2)–(8) отримаємо рівності для зображень, позначених відповідними великими літерами:

$$W_0(x, p) = \frac{A_0 c_2}{p^2} \exp\left(-\frac{p}{c_2}(x+a) \cos \theta_0 - y \sin \theta_0\right), \quad (9)$$

$$\Delta W_1(x, p) - \frac{p^2}{c_2^2} W_1(x, p) = 0, \quad (10)$$

$$T_{zy}(x, +0, p) - T_{zy}(x, -0, p) = X(x, p), \quad (11)$$

$$W_1(x, 0, p) = U_0(x, p) - W_0(x, p), \quad (12)$$

$$U_0''(x, p) - q_0^2 U_0(x, p) = -\frac{X(x, p)}{hG_0}, \quad q_0 = \frac{p}{c_0}, \quad U_0'(\pm a, p) = 0. \quad (13)$$

Виразимо W_1 через розривний розв'язок рівняння Гельмгольца зі стрибком (11), побудованим у [7], поклавши там $x_2 = \frac{ip}{c_2}$:

$$W_1(x, y, p) = \int_{-a}^a \frac{X(\eta, p)}{G_0} \mathcal{K}(\eta - x, y) d\eta, \quad (14)$$

$$\mathcal{K}(\eta - x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha(\eta-x)} e^{-q|y|}}{2q} d\alpha, \quad q = \sqrt{\alpha^2 + \frac{p^2}{c_2^2}}.$$

Переміщення точок включення знайдемо, розв'язавши одновимірну крайову задачу (13). Для цього спочатку побудуємо функцію Гріна

$$G(\eta, x, q_0) = \frac{e^{-q_0|\eta-x|}}{2q_0} + \frac{e^{-q_0(a+x)} \operatorname{ch} q_0(\eta-a) + e^{-q_0(a-x)} \operatorname{ch} q_0(\eta+a)}{2q_0 \operatorname{sh} 2q_0}, \quad q_0 = \frac{p}{c_0}.$$

Після цього розв'язок задачі (13) запишемо у такому вигляді:

$$U_0(x, p) = - \int_{-a}^a \frac{X(\eta, p)}{hG_0} G(\eta, x, q_0) d\eta. \quad (15)$$

У формулах (14), (15) переміщення зовнішнього середовища виражаються через невідомий стрибок дотичних напружень. Для визначення останнього з граничної умови (12) виведемо інтегральне рівняння. З цією метою спочатку (12) продиференціюємо та додамо умову еквівалентності продиференційованого рівняння первісному:

$$\frac{\partial W_1}{\partial x}(x, 0, p) = - \frac{\partial W_0}{\partial x}(x, 0, p) + \frac{\partial U_0}{\partial x}(x, 0, p), \quad x \in [-a, a],$$

$$W_1(-a, 0, p) = -W_0(-a, 0, p) + U_0(-a, 0, p). \quad (16)$$

Тепер після підстановки (14) і (15) у (16) отримаємо шукане інтегральне рівняння відносно стрибка дотичних напружень і додаткову умову однозначності. Виділивши сингулярні складові в підінтегральних функціях і ввівши позначення

$$\eta = ax, \quad x = a\zeta, \quad t = \frac{a\tau}{c_2}, \quad p = \frac{c_2 q}{a},$$

$$\Phi(z, \tau) = \frac{1}{G_1} \chi\left(az, \frac{a}{c_2} \tau\right), \quad X\left(az, \frac{c_2}{a} q\right) = \frac{aG_1}{c_2} \Phi(z, q),$$

це рівняння і додаткову умову перетворимо до вигляду

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \Phi(z, q) \left(\frac{1}{z-\zeta} + \frac{m_0 \pi}{2\varepsilon} \operatorname{sgn}(z-\zeta) + F(q(z-\zeta)) + \frac{m_0 \pi}{\varepsilon} R(z, \zeta, q_0) \right) dz =$$

$$= - \frac{1}{q} A_0 \exp(-q_0(\zeta+1) \cos \theta_0) \cos \theta_0,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \Phi(z, q) \left(-\ln(1+z) + F_0(q(z+1)) + \frac{\pi m_0}{2\varepsilon} R_0(z, q) \right) dz = \frac{A_0}{q^2}. \quad (17)$$

При виведенні (17) використано такі співвідношення:

$$qK_1(qz) = \frac{1}{z} + F(qz), \quad K_0(qz) = -\ln|z| + F_0(qz),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} G(az, a\zeta, q) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(z-\zeta) + R(z, \zeta, q_0), \quad aG(az, a\zeta) = R_0(z, q_0),$$

$$R(z, \zeta, q_0) = \frac{\operatorname{sgn}(z-\zeta)}{2} (e^{-q|z-\zeta|} - 1) -$$

$$- \frac{e^{-q_0(1+\zeta)} \operatorname{ch} q_0(z-1) - e^{-q_0(1-\zeta)} \operatorname{ch} q_0(1+z)}{2 \operatorname{sh} 2q_0},$$

$$R_0(z, q_0) = \frac{e^{-q_0(z+1)}}{2q_0} + \frac{\operatorname{ch} q_0(z-1) + e^{-2q_0} \operatorname{ch} q_0(z+1)}{2q_0 \operatorname{sh} 2q_0}, \quad q_0 = \xi_0 q,$$

$$\xi_0^2 = \frac{c_0^2}{c_2^2} = \frac{e_0(1-\nu_0^2)}{2\bar{\rho}(1+\nu_1)}.$$

Наближений розв'язок інтегрального рівняння (17) будемо шукати у вигляді добутку інтерполяційного многочлена на відповідну вагову функцію [2]:

$$\Phi(z, q) = \frac{\Psi(z, q)}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \Psi(z, q) = \sum_{m=1}^n \Psi_m(q) \frac{T_n(z)}{(z-z_m)T_n'(z_m)}, \quad (18)$$

$T_n(z)$ – многочлени Чебишева; $z_m = \cos \frac{\pi(2m-1)}{2n}$, $m = 1, \dots, n$, – його корені; $\Psi_m(q) = \Psi(z_m, q)$.

Методом, викладеним у [4], із (17) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих значень $\Psi_m(q)$. Для цього, підставивши $\zeta_k = \cos \frac{k\pi}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, інтегралі замінимо відповідними квадратурними формулами. При цьому інтеграл з ядром Коші заміняємо спеціальною квадратурною формулою [4], а інтегралі з регулярними ядрами – квадратурними формулами Гаусса – Чебишева. Для інтегралів з логарифмічною особливістю і з функцією $\operatorname{sgn}(z-\zeta)$ у ядрі використаємо квадратурні формули, виведені в [7]:

$$\int_{-1}^1 \Phi(z, q) \ln(1+z) dz = \sum_{m=1}^n a_m B_m \Psi_m(q),$$

$$B_m = -\ln 2 - 2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j} \cos \frac{j\pi(2m-1)}{2n},$$

$$\int_{-1}^1 \Phi(z, q) \operatorname{sgn}(z-\zeta_k) dz = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n a_m A_{km} \Psi_m(q), \quad a_m = \frac{\pi}{n},$$

$$A_{km} = -\frac{(n-2k)\pi}{n} + 4 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \cos \frac{j\pi(2m-1)}{2n} \sin \frac{jk\pi}{n}.$$

Внаслідок цього одержимо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \Psi(z_m, q) \left(\frac{1}{z_m - \zeta_k} + \frac{\pi m_0}{\varepsilon} A_{km} + F_1(q(z_m - \zeta_k)) + \frac{\pi m_0}{\varepsilon} R(z_m, \zeta_k) \right) = f_k(q), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \Psi(z_m, q) \left(-B_m + F_0(q_0(1+z_m)) + \frac{\pi m_0}{\varepsilon} R_0(z_m, q_0) \right) = \frac{A_0}{q^2},$$

$$f_k(q) = -\frac{A_0 \exp(-q(\zeta_k + 1) \cos \theta_0) \cos \theta_0}{q}. \quad (19)$$

Після розв'язання системи (19) наближені значення невідомих функцій визначаємо за формулою (18).

Для дослідження напруженого стану поблизу включення введемо системи координат з центрами у точках $(\pm a, 0)$:

$$x = \pm a + r \cos \theta_0,$$

$$y = r \sin \theta_0, \quad 0 < r < +\infty, \quad -\pi < \theta_0 < \pi.$$

Тоді для напружень запишемо таке асимптотичне подання:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} = -G_1 \frac{\Psi(\pm 1, \tau)}{2\sqrt{2ar}} \begin{Bmatrix} \sin \frac{\theta_0}{2} \\ \cos \frac{\theta_0}{2} \end{Bmatrix}, \quad r \rightarrow 0,$$

$$\varphi(z, q) = \frac{\Psi(z, q)}{\sqrt{1 - \tau^2}}. \quad (20)$$

З формули (20) випливає, що концентрацію напружень поблизу включення можна охарактеризувати коефіцієнтами, які будемо називати коефіцієнтами інтенсивності напружень (КІН) для включення. Безрозмірні значення цих коефіцієнтів дорівнюють

$$k^\pm(\tau) = \Psi(\pm 1, \tau). \quad (21)$$

Зображення Лапласа цих коефіцієнтів можна виразити через розв'язок системи (19) за допомогою формули (18):

$$K^\pm(q) = \Psi(\pm 1, q), \quad \Psi(1, q) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} \Psi_m(q) \operatorname{ctg} \frac{\gamma_m}{2},$$

$$\Psi(-1, q) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \Psi_m(q) \operatorname{tg} \frac{\gamma_m}{2}, \quad \gamma_m = \frac{\pi(2m-1)}{2n}. \quad (22)$$

Для того щоб знайти їх оригінали, необхідно використати методи чисельного перетворення Лапласа. Найбільш стійкі результати отримано за допомогою методів, які ґрунтуються на заміні інтеграла Мелліна рядом Фур'є [8].

Результати розрахунків та їх аналіз. Результати чисельного аналізу залежності безрозмірного значення КІН від часу, проведені для значень відношення модулів зсуву середовища і включення $\frac{G_1}{G_0} = 0.01, 0.1, 0.5, 2.0$, пока-

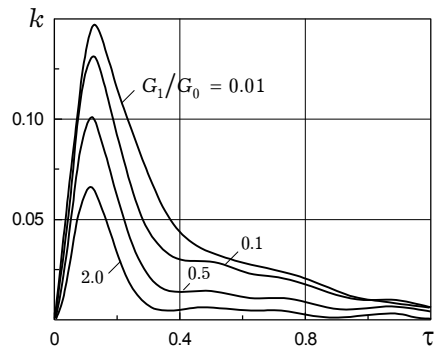


Рис. 2

зано на рис. 2. В усіх випадках характерна наявність різкого максимуму КІН на початку дії хвилі (1), а потім спадання до нуля. Концентрація напруження навколо включення зростає із збільшенням його жорсткості.

1. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – Москва: Наука, 1983. – 488 с.
2. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – Москва: Наука, 1985. – 253 с.
3. Грилицкий Д. В., Сулим Г. Т. Упругие напряжения в плоскости с тонкостенными включениями // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып 1. – С. 41-48.
4. Крылов В. И. Приближенные вычисления интегралов. – Москва: Наука, 1967. – 500 с.
5. Панасюк В. В., Стадник М. М., Силованюк В. П. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. – Киев: Наук. думка, 1986. – 216 с.
6. Перцев А. К., Платонов Э. Г. Динамика оболочек и пластин. – Ленинград: Судостроение, 1987. – 316 с.
7. Попов В. Г. Исследование полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на тонком жестком отслоившемся включении // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1992. – № 3. – С. 139-146.
8. Davies B., Martin B. Numerical inversion of the Laplace transform: A survey and comparison of methods // J. Comp. Phys. – 1979. – 33, No. 1. – P. 1-32.
9. Kit H. S., Kunets Ya. I., Yemets V. F. Elastodynamic scattering from a thin-walled inclusion of low rigidity // Int. J. Eng. Sci. – 1999. – 37. – P. 331-345.

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ ТОНКОГО УПРУГОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ВОЛНЫ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

Решена нестационарная задача о концентрации упругих напряжений вблизи тонкого упругого включения в среде, находящейся в условиях антиплоской деформации. Предполагается, что в начальный момент времени на включение набегают плоская нестационарная волна продольного сдвига. Предложен метод решения, который заключается в применении интегрального преобразования Лапласа по времени и представлении изображения перемещения разрывным решением соответствующего дифференциального уравнения. Это позволило свести исходную задачу к сингулярному интегральному уравнению относительно изображения скачка напряжений. Оригиналы по найденным изображениям восстанавливаются численно методом, основанным на замене интеграла Меллина рядом Фурье.

STRESS CONCENTRATION NEAR THIN ELASTIC INCLUSION UNDER THE ACTION OF NON-STATIONARY LONGITUDINAL SHEAR WAVE

The non-stationary problem about the elastic stress concentration in the medium, which is under the condition of anti-plane strain near a thin elastic inclusion, is solved. At the initial moment the plane, non-stationary longitudinal shear wave influences the inclusion. The method for solution consists in the Laplace time transformation application and presentation of displacement image by the discontinuous solution of the appropriate differential equation. It has allowed us to reduce the initial problem to the singular integral equation concerning the image of stress jump. The originals of the found images are restored numerically by the method based on the replacement of the Mellin integral by the Fourier series.

¹ Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, Одеса,

² Одес. нац. морська акад., Одеса

Одержано

25.12.04