

ВЗАЄМОДІЯ ДОВІЛЬНО РОЗМІЩЕНИХ ТРІЩИН З КУТОВИМ ВИРІЗОМ ЗА АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

Розглянуто антипласкі задачі теорії пружності для нескінченного клина з криволінійними тріщинами. Крайові задачі зведено до сингулярного інтегрального рівняння на контурах розрізів. Числові розв'язки отримано для внутрішніх прямолінійної тріщини і тріщини вздовж дуги еліпса, а також крайових радіальних тріщин, які виходять з вершини клина. Досліджено вплив куткового вирізу та розташування і орієнтації тріщин на коефіцієнти інтенсивності напружень у вершинах тріщин і клина.

Розв'язування двовимірних задач теорії пружності для багатозв'язних областей можна значно спростити, якщо отримати їх загальні розв'язки, які тотожно задовольняють крайові умови на одному чи декількох контурах. У випадку антипласкої деформації на основі відомих результатів для системи розрізів у площині за циклічної симетрії [3] отримано загальне зображення комплексного потенціалу напружень через стрибки напружень і переміщень на криволінійних контурах, які тотожно задовольняють крайові умови (нульові напруження або переміщення) на гранях клина [5]. Це зображення використано для побудови сингулярних інтегральних рівнянь антипласкої задачі для клина з тріщинами та отворами довільної форми. Запропоновано [7] також дещо інший метод розв'язування подібних задач для клина з прямолінійними тріщинами з використанням перетворення Мелліна. Нижче з використанням вищезгаданого підходу, проаналізовано взаємодію куткового вирізу з довільно орієнтованими тріщинами (внутрішніми та крайовими).

Сингулярне інтегральне рівняння. Розглянемо (рис. 1) пружний клин із системою внутрішніх криволінійних тріщин L_k , $k = 1, \dots, N$. Нехай грані клина вільні від напружень, а на берегах тріщин задано навантаження $\tau(t)$:

$$\tau_{nz}^{\pm} = G \frac{\partial w^{\pm}}{\partial n} = \tau(t), \quad t \in L, \quad L = \bigcup L_k, \quad (1)$$

де L – сукупність контурів L_k . Вважатимемо, що на нескінченності поле напружень визначається потенціалом

$$F_0(z) = -\frac{iK_{III}^0}{(2\pi z)^{\lambda}}, \quad (2)$$

де K_{III}^0 – коефіцієнт інтенсивності напружень у вершині суцільного клина; $\lambda = 1 - \pi/(2\beta)$ – показник особливості напружень у вершині куткового вирізу з кутом розхилу 2β , $\beta > \pi/2$.

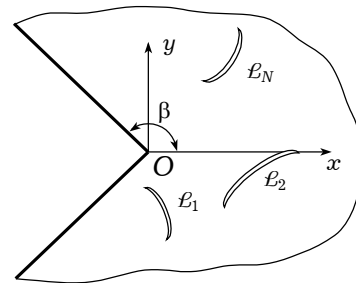


Рис. 1

Розв'язок задачі шукатимемо методом суперпозиції. Тоді комплексний потенціал напружень матиме вигляд [5]

$$F_0(z) = -\frac{iK_{III}^0}{(2\pi z)^{\lambda}} + \frac{1-\lambda}{\pi i z^{1-\lambda}} \sum_{k=1}^N \int \left(\frac{1}{\tau^{1-\lambda} - z^{1-\lambda}} + \frac{1}{\tau^{1-\lambda} + z^{1-\lambda}} \right) \gamma'_k(\tau) d\tau, \quad (3)$$

де шукані функції $\gamma'_k(t)$ – похідні від стрибка переміщень на контурі L_k .

Задовольнивши крайові умови (1), отримасмо сингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \int_{L_k} \mathcal{K}(\tau, t) \gamma'_k(\tau) d\tau = p(t), \quad t \in L, \quad (4)$$

де

$$\mathcal{K}(\tau, t) = \operatorname{Re} \left[\left(\frac{1}{\tau^{1-\lambda} - t^{1-\lambda}} + \frac{1}{\tau^{1-\lambda} + t^{1-\lambda}} \right) \frac{1-\lambda}{t^\lambda} \frac{dt}{ds} \right],$$

$$p(t) = -\tau(t) - \frac{K_{III}^0}{(2\pi)^\lambda} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{t^\lambda} \frac{dt}{ds} \right].$$

Розв'язок рівняння (4) повинен задовольняти умови однозначності переміщень при обході кожного з контурів \mathcal{L}_k :

$$\int_{\mathcal{L}_k} \gamma'(\tau) d\tau = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (5)$$

За допомогою формули (3) знайдемо вираз для коефіцієнта інтенсивності напружень у вершині кутового вирізу

$$\tilde{K}_{III}^0 = K_{III}^0 + \frac{2(1-\lambda)(2\pi)^\lambda}{\pi} \sum_{k=1}^N \int_{\mathcal{L}_k} \operatorname{Re} [\tau^{\lambda-1}] \gamma'_k(\tau) d\tau, \quad (6)$$

де другий доданок дає поправку, що враховує наявність у клині тріщини.

Коефіцієнти інтенсивності напружень у вершинах тріщин $t = \ell_k^-$ і $t = \ell_k^+$ знайдемо за формулою [3]

$$K_{III}(\ell_k^\pm) = \mp \lim_{t \rightarrow \ell_k^\pm} \left[\sqrt{2\pi |t - \ell_k^\pm|} \gamma'_k(t) \frac{dt}{ds} \right], \quad k = 1, \dots, N. \quad (7)$$

Нехай параметричне рівняння контуру \mathcal{L} визначається рівністю

$$t = R\omega(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad (8)$$

де R – деякий параметр, що має розмірність довжини.

Враховуючи заміну (8), зведемо рівняння (4) та умову (5) до вигляду

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{\mathcal{K}}(\xi, \eta) \gamma(\xi) d\xi = \tilde{p}(\eta), \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad (9)$$

$$\int_{-1}^1 \gamma(\xi) d\xi = 0. \quad (10)$$

Тут введено безрозмірні змінні

$$\gamma(\xi) = \frac{\gamma'(\omega(\xi))\omega'(\xi)R^\lambda}{K_{III}^0}, \quad \tilde{p}(\eta) = -\frac{\tau(\omega(\eta))|\omega'(\eta)|R^\lambda}{K_{III}^0} - \frac{1}{(2\pi)^\lambda} \operatorname{Re} \left[\frac{\omega'(\eta)}{\omega^\lambda(\eta)} \right],$$

$$\tilde{\mathcal{K}}(\xi, \eta) = (1-\lambda) \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{1}{\omega^{1-\lambda}(\xi) - \omega^{1-\lambda}(\eta)} + \frac{1}{\omega^{1-\lambda}(\xi) + \omega^{1-\lambda}(\eta)} \right) \frac{\omega'(\eta)}{\omega^\lambda(\eta)} \right\}.$$

Застосовуючи до рівностей (9) і (10) квадратурні формули Гаусса – Чебишева, отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь [3]

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{\mathcal{K}}(\xi_k, \eta_m) u(\xi_k) = \tilde{p}(\eta_m), \quad m = 1, \dots, n-1, \quad (11)$$

$$\sum_{k=1}^n u(\xi_k) = 0, \quad (12)$$

де

$$u(\xi) = \gamma(\xi) \sqrt{1 - \xi^2}, \quad \xi_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\eta_m = \cos \frac{\pi m}{n}, \quad m = 1, \dots, n-1.$$

Таким чином, крайову задачу про взаємодію нескінченного пружного клина з криволінійними тріщинами зведено до системи лінійних алгебричних рівнянь.

Внутрішня прямолінійна тріщина у клині. Нехай прямолінійний розріз \mathcal{L} з центром на дійсній осі Ox розміщений під кутом α до неї (рис. 2). Грані клина та береги тріщини вільні від навантаження, а на нескінченності поле напружень визначається комплексним потенціалом (2).

Тоді

$$\tilde{p}(\eta) = -(2\pi)^{-\lambda} \operatorname{Re}[\omega'(\eta)\omega(\eta)^{-\lambda}]. \quad (13)$$

Параметричне рівняння контуру \mathcal{L} запишемо у вигляді

$$\omega(\xi) = \xi \exp(i\alpha) + \varepsilon, \quad R = \ell, \quad \varepsilon = d/\ell.$$

Отже, задача зводиться до системи n лінійних алгебричних рівнянь (11) і (12) для знаходження n невідомих величин $u(\xi_k)$, $k = 1, \dots, n$. Враховуючи формули (6) і (7), отримаємо вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершинах тріщини та кутового вирізу:

$$K_{III}^{\pm} = K_{III}(\ell^{\pm}) = \mp \frac{\sqrt{\pi} K_{III}^0}{R^{\lambda-0.5}} \frac{u(\pm 1)}{\sqrt{|\omega'(\pm 1)|}}, \quad \ell^- = a, \quad \ell^+ = b,$$

$$\tilde{K}_{III}^0 = K_{III}^0 \left\{ 1 + \frac{2(2\pi)^{\lambda}(1-\lambda)}{n} \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}[\omega^{\lambda-1}(\xi_k)] u(\xi_k) \right\}.$$

Значення $u(\pm 1)$ визначають за допомогою інтерполяційного полінома Лагранжа [3]

$$u(1) = -\frac{1}{n} \sum_{r=1}^n (-1)^r u(\xi_r) \cot \frac{2r-1}{4n} \pi,$$

$$u(-1) = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n (-1)^{r+n} u(\xi_r) \tan \frac{2r-1}{4n} \pi.$$

На рис. 3 подано залежності відносних коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершинах тріщини

$$F_3^{\pm} = \frac{K_{III}^{\pm}}{\sqrt{\pi} K_{III}^0 R^{0.5-\lambda}} = \mp \frac{u(\pm 1)}{\sqrt{|\omega'(\pm 1)|}} \quad (14)$$

та кутового вирізу

$$F_3^0 = \frac{\tilde{K}_{III}^0}{K_{III}^0} = 1 + \frac{2(2\pi)^{\lambda}(1-\lambda)}{n} \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}[\omega^{\lambda-1}(\xi_k)] u(\xi_k) \quad (15)$$

від величини ℓ/d .

Для $\ell/d < 0.25$ наявність тріщини практично не впливає на КІН у вершині клина. Коли $\ell \rightarrow d$, коефіцієнти інтенсивності напружень у вершині клина (рис. 3b) і вершині тріщини $t = a$ (пунктирні лінії на рис. 3a) прямують до нескінченності, а у вершині $t = b$ (суцільні лінії на рис. 3a) – до скінченного значення, яке відповідає крайовій тріщині довжини 2ℓ , що виходить з вершини клина [5]

$$F_3^+ = \frac{2}{(4\pi)^{\lambda} \sqrt{2(1-\lambda)}}.$$

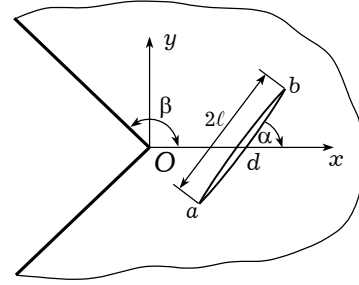


Рис. 2

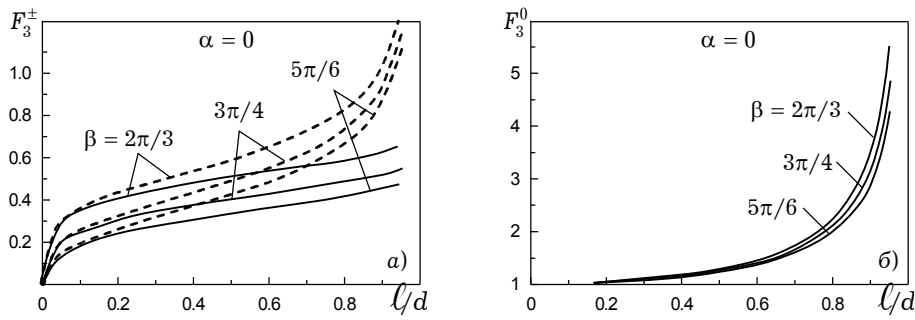


Рис. 3

При $\lambda = 1/2$ отримані дані узгоджуються з відомими [4, 9] для граничного випадку, коли клин вироджується у площину з напівнескінченною тріщиною.

Залежність від кута α коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершині $t = b$ тріщини F_3^+ (суцільні лінії) і клина F_3^0 (пунктирні лінії) для різних значень величини l/d наведено на рис. 4 при $\beta = 3\pi/4$. Найбільші значення вони приймають при $\alpha = 0$ (тріщина лежить на бісектрисі клина). Коли розріз перпендикулярний до бісектриси клина ($\alpha = \pi/2$), КІН F_3^+ практично дорівнюють нулеві.

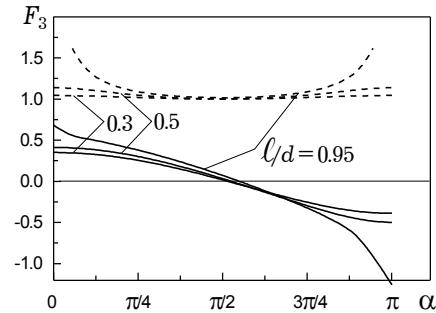


Рис. 4

Тріщина вздовж дуги еліпса. Розглянемо нескінченний пружний клин з розрізом уздовж дуги еліпса (рис. 5). Припустимо, що грані клина та береги тріщини вільні від навантаження, а на нескінченності поле напружень визначається комплексним потенціалом (2). Тоді має місце співвідношення (13).

Записавши параметричне рівняння у вигляді

$$\omega(\xi) = \cos(\alpha\xi) + i\varepsilon \sin(\alpha\xi), \quad R = a, \quad \varepsilon = b/a,$$

отримуємо систему n лінійних алгебричних рівнянь (11), (12) для визначення n невідомих величин $u_n(\xi_k)$, $k = 1, \dots, n$.

Коефіцієнти інтенсивності напружень у вершинах тріщини та клина знайдемо за формулами (14) і (15).

На рис. 6 зображено залежність відносних КІН у вершині $t = b$ тріщини (суцільні лінії) F_3^+ та клина (штрихові лінії) F_3^0 від кута φ для значень $a/b = 0.5, 1.0, 2.0$.

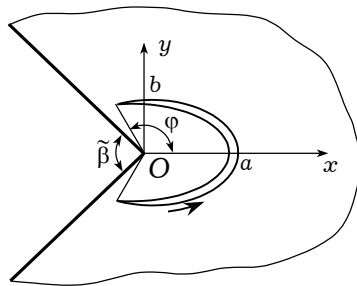


Рис. 5

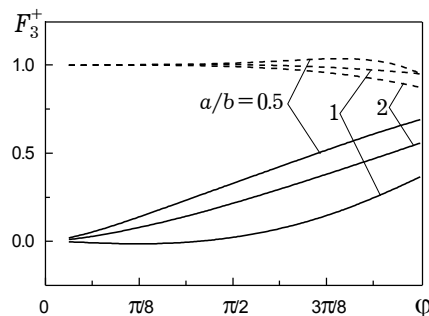


Рис. 6

Поклавши $\varphi = \beta$, отримаємо граничний випадок, коли у клині з кутом розхилу $2\beta > \pi$ є розвантажувальний еліптичний виріз. Числовий розв'язок шукаємо у тому ж класі функцій, що й у випадку внутрішньої тріщини, але при цьому умову однозначності переміщень при обході контуру тріщини (10) замінюємо умовою рівності нулеві коефіцієнта інтенсивності напружень у лівій

$$F_3^- = \frac{u(-1)}{\sqrt{|\omega'(-1)|}} = 0$$

чи правій

$$F_3^+ = -\frac{u(1)}{\sqrt{|\omega'(1)|}} = 0$$

вершині тріщини. При цьому числові розрахунки показали, що не має значення, яку з умов використовувати.

Враховуючи формули Сохоцького – Племеля [2], запишемо граничне значення функції $F(z)$ при підході до контуру \mathcal{L} справа

$$F^+(t_0) = -\frac{iK_{III}^0}{(2\pi t_0)^\lambda} - \gamma'(t_0) + \frac{1-\lambda}{\pi i t_0^{1-\lambda}} \int_{\mathcal{L}} \left(\frac{1}{\tau^{1-\lambda} - t_0^{1-\lambda}} + \frac{1}{\bar{\tau}^{1-\lambda} + t_0^{1-\lambda}} \right) \gamma'(\tau) d\tau.$$

Тепер напруження на контурі вирізу знайдемо за формулою

$$\tau_{sz} = \operatorname{Re} \left[F^+(t_0) \frac{dt_0}{ds} \right].$$

На рис. 7 зображено залежність від кута θ , $-\beta \leq \theta \leq \beta$, відносного напруження $\tau_{\theta z} a^\lambda / K_{III}^0$ на контурі вирізу для $\beta = 3\pi/4$.

Для кругового отвору $a/b = 1$ ці результати збігаються з аналітичним розв'язком [5]

$$\frac{\tau_{\theta z} a^\lambda}{K_{III}^0} = \frac{2}{(2\pi)^\lambda} \cos[(1-\lambda)\theta].$$

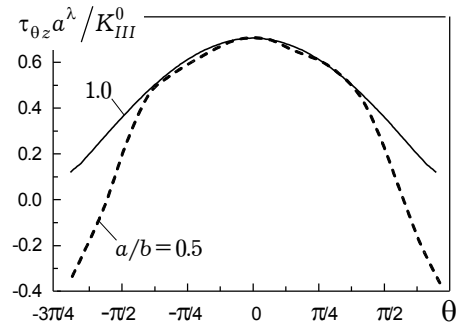


Рис. 7

При $\lambda = 1/2$, $a = b$ отримуємо розвантажувальний круговий виріз із центром у вершині напівнескінченної тріщини [1].

Крайові тріщини. Нехай розріз \mathcal{L}_1 виходить з вершини клина під кутом α до осі Ox (рис. 8). Грані клина та береги тріщини вільні від навантаження, а на нескінченності задано напруження (2).

Задача для такої області зводиться до сингулярного інтегрального рівняння (9). Умову однозначності переміщень замінюємо умовою рівності нулеві коефіцієнта інтенсивності напружень на початку тріщини.

На рис. 9 наведено залежність відносного коефіцієнта інтенсивності напружень F_3^+ у вершині тріщини $t = a$ від кута α для значень кута розхилу клина $\beta = \pi/2, \pi, 3\pi/4, 5\pi/6$. Для $\beta = \pi$ відносний коефіцієнт інтенсивності F^+ у кінці тріщини добре узгоджується з чис-

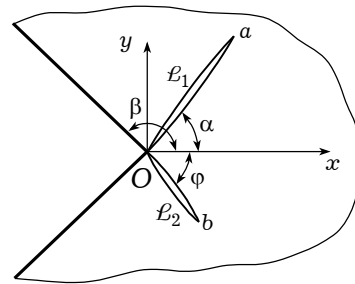


Рис. 8

ловими результатами [6] та аналітичним розв'язком [8]

$$F^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\pi - \alpha}{\pi + \alpha} \right]^{\alpha/2\pi}.$$

При $\alpha = 0$ отримаємо відомий результат [4] для прямолінійної тріщини, що виходить з вершини клина.

Розглянемо випадок, коли з вершини клина виходять дві крайові тріщини вздовж прямолінійних контурів \mathcal{L}_1 та \mathcal{L}_2 під кутом $\theta = \alpha$ і $\theta = -\alpha$ до осі Ox (рис. 8).

Параметричні рівняння контурів \mathcal{L}_k , $k = 1, 2$, запишемо у вигляді

$$\omega_1(\xi) = (\xi + 1) \exp(i\alpha), \quad \omega_2(\xi) = (\xi + 1) \exp(-i\alpha), \quad -1 \leq \xi \leq 1.$$

Задача зводиться до сингулярного інтегрального рівняння (9). При цьому умови однозначності переміщень при обході контурів \mathcal{L}_1 та \mathcal{L}_2 замінюємо умовами рівності нулеві коефіцієнтів інтенсивності напружень на початку тріщин

$$F_3^-(1) = \frac{u_1(-1)}{\sqrt{|\omega_1'(-1)|}} = 0, \quad F_3^-(2) = \frac{u_2(-1)}{\sqrt{|\omega_2'(-1)|}} = 0.$$

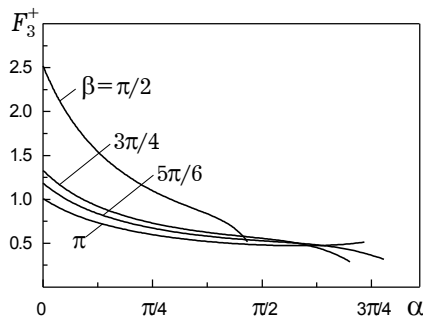


Рис. 9

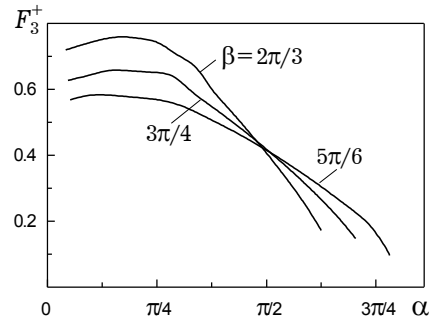


Рис. 10

На рис. 10 зображено залежність відносного КІН F_3^+ у вершині $t = b$ тріщини від величини α при $\varphi = \alpha$, $\ell_1 = \ell_2$ для значень кута $\beta = 2\pi/3$, $3\pi/4$, $5\pi/6$. При $\alpha = \pi/4$ коефіцієнт інтенсивності напружень досягає максимального значення.

Висновки. Антиплоскі задачі теорії пружності для нескінченного клина з криволінійними розрізами зведено до сингулярних інтегральних рівнянь на контурах розрізів. Досліджено вплив кутового вирізу та розташування і орієнтації тріщин на коефіцієнти інтенсивності напружень у вершинах тріщини та клина. Отримано числові розв'язки для внутрішніх прямолінійної тріщини і тріщини вздовж дуги еліпса та крайових радіальних тріщин, які виходять з вершини клина. Як граничний випадок отримано також розподіл напружень на контурі еліптичного вирізу з центром у вершині клина. Отримані результати можуть бути використані для наближеної оцінки взаємодії кутового вирізу та тріщини (чи розвантажувальних отворів) у скінченному тілі.

1. *Мирсалимов В. М.* Влияние разгружающих отверстий на развитие трещин // Проблемы прочности. – 1971. – № 4. – С. 18–19.
2. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – Москва: Наука, 1968. – 512 с.
3. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 323 с.
4. *Саврук М. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с. – (Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. – Т. 2).

5. Саврук М. П. Поздовжній зсув пружного клина з тріщинами та вирізами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – **38**, № 5. – С. 57–66.
6. Саврук М. П., Осечко А. М. Поздовжній зсув пружного тіла з дволанковою ламаною тріщиною // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій / За заг. ред. О. Є. Андрейківа, Й. Й. Лучка, В. В. Божидарника. – Львів: Каменяр, 2002. – С. 182–188.
7. Faal R. T., Fotuhi A. R., Fariborz S. J., Daghyani H. R. Antiplane stress analysis of an isotropic wedge with multiple cracks // Int. J. Solids and Struct. – 2004. – **41**, No. 16-17. – P. 4535–4550.
8. Smith E. A note on crack-forking in antiplane strain deformation // Int. J. Fract. – 1973. – **9**, No. 2. – P. 181–183.
9. Turska-Kłębek E., Sokolowski M. On the influence of defects upon stress concentration at the crack // Arch. mech. stosow. – 1984. – **36**, No. 1. – P. 121–126.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ ТРЕЩИН С УГЛОВЫМ ВЫРЕЗОМ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотрены антиплоские задачи теории упругости для бесконечного клина с криволинейными трещинами. Краевые задачи сведены к сингулярным интегральным уравнениям на контурах разрезов. Получены численные решения для клина с внутренними прямолинейной трещиной и трещиной вдоль дуги эллипса, а также для краевых радиальных трещин, выходящих из вершины клина. Исследовано влияние углового выреза и положения, а также ориентации трещин на коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещин и клина.

INTERACTION OF ARBITRARILY PLACED CRACKS WITH WEDGE CUT UNDER ANTIPLANE STRAIN

The antiplane problems of elasticity theory for an infinite wedge with curvilinear cracks are considered. The boundary-value problems are reduced to singular integral equations on contours of cuts. Numerical solutions for the wedge with an internal rectilinear crack or a crack along an arc of ellipse as well as for the edge cracks originating from the wedge tip are obtained. Influence of a wedge cut and crack positions on the stress intensity factors in the crack and the wedge tips is investigated.

¹ Бялист. політехніка, Бялисток, Польща,

² Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Одержано

15.03.05