УДК 621.396:519.6

П. О. Савенко, М. Д. Ткач

НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДВОВИМІРНИХ ІНТЕҐРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ГАММЕРШТЕЙНА, ЩО ВИНИКАЮТЬ У ЗАДАЧАХ СИНТЕЗУ ВИПРОМІНЮЮЧИХ СИСТЕМ

Подається узагальнення методу вироджених ядер, який використовується при розв'язуванні лінійних інтеґральних рівнянь, на випадок нелінійних інтеґральних рівнянь типу Гаммерштейна, що виникають у задачах синтезу різних типів випромінюючих систем. Обґрунтовано збіжність розв'язків наближеного рівняння до розв'язків точного рівняння.

1. Задачі синтезу випромінюючих систем, у яких задані вимоги до просторової діаграми напрямленості (ДН), а розподіл сторонніх джерел електромагнітного поля має об'ємний характер, зводяться до розв'язування двовимірних чи тривимірних нелінійних інтеґральних рівнянь. Ядра таких рівнянь мають розмірність, що дорівнює чотирьом чи шести відповідно, що значною мірою ускладнює знаходження розв'язків чисельними методами. Одним із способів пониження розмірності задачі є застосування методу вироджених ядер, обґрунтованому для випадку лінійних рівнянь [2]. Цей метод нескладно поширюється на розв'язування нелінійних інтеґральних рівнянь типу Гаммерштейна, інтеґральний оператор у яких є суперпозицією нелінійного й лінійного операторів. При цьому ітераційні процеси для знаходження розв'язків чисельними методами будуються за принципом, де на кожному кроці ітерації розв'язується лінійне інтеґральне рівняння. Задача знаходження наближених розв'язків значно спрощується у випадку, коли є відомими власні функції лінійного оператора. Розвинення ядра в ряд Фур'є чи в білінійний ряд за системою власних функцій дозволяє зменшити розмірність задачі удвічі.

Нижче цей підхід застосовується для розв'язування задач синтезу антен із плоским випромінюючим розкривом за заданою амплітудною ДН чи ДН за потужністю.

2. Задача синтезу антени з плоским випромінюючим розкривом S за заданою амплітудною ДН F чи ДН за потужністю N зводиться до розв'язування нелінійних інтеґральних рівнянь типу Гаммерштейна [1, 6]

$$f(s_1,s_2) = \iint\limits_{\Omega} K(s_1,s_2,s_1',s_2')\,G\big[s_1',s_2',f(s_1',s_2')\big]\,ds_1'\,ds_2', \tag{1}$$

де

$$K(s_1,s_2,s_1',s_2') = \iint\limits_{S} e^{ik(x(s_1-s_1')+y(s_2-s_2'))}\,dx\,dy \tag{2}$$

– ядро, що залежить від форми розкриву;

$$G\big[s_1',s_2',f(s_1',s_2')\big] = F(s_1',s_2')\cdot\exp(i\arg f(s_1',s_2')) \tag{3}$$

для задачі синтезу за заданою амплітудною ДН F і

$$G\big[s_1',s_2',f(s_1',s_2')\big] = \big(N(s_1',s_2') - |f(s_1',s_2')|^2\big)\,f(s_1',s_2') \tag{4}$$

для задачі синтезу за заданою енергетичною ДН N; Ω – область визначення функцій $F(s_1,s_2)$ чи $N(s_1,s_2)$.

Зазначимо, що існування принаймні одного розв'язку рівняння (1) доведено у роботі [6].

У випадку прямокутного розкриву $S = \{(x,y)\in S : |x|\le a_1,\ |y|\le a_2\}$ з нормованими координатами $x = x/a_1$, $y = y/a_2$ ядро (2) набуває вигляду

$$K(s_1, s_2, s_1', s_2') = K_1(s_1, s_1')K_2(s_2, s_2') \equiv \frac{\sin c_1(s_1 - s_1')}{\pi(s_1 - s_1')} \cdot \frac{\sin c_2(s_2 - s_2')}{\pi(s_2 - s_2')}, \quad (5)$$

де $c_1 = ka_1$, $c_2 = ka_2$ – дійсні додатні параметри, які характеризують розміри розкриву, $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число у вакуумі. Для спрощення викладу будемо вважати також, що областю, у якій задана необхідна ДН, є деякий квадрат $\Omega = \{(s_1, s_2) \in \Omega : |s_1| \le 1, \ |s_2| \le 1\}$.

Подамо деякі характеристики ядра (5). Очевидно, що воно симетричне. Його квадратична форма задовольняє нерівність

$$(\mathbf{K}f, f) = \iint\limits_S \left| \iint\limits_\Omega \exp\left(i\left(c_1 x s_1 + c_2 y s_2\right)\right) \overline{f(s_1, s_2)}\, ds_1\, ds_2 \right|^2 dx\, dy > 0 \quad (6)$$

для довільної відмінної від тотожного нуля функції $f \in L^2(\Omega)$. Звідси випливає, що K – додатне ядро. Легко переконатися, що для K справджується оцінка

$$\iint\limits_\Omega \iint\limits_\Omega |K(s_1, s_2, s_1', s_2')|^2\, ds_1\, ds_2\, ds_1'\, ds_2' \le \frac{c_1 c_2}{\pi^2}, \quad (7)$$

тобто K – фредгольмове ядро.

Відомо [4], що власними функціями ядер $K_1(s_1, s_1')$ і $K_2(s_2, s_2')$ є витягнуті сфероїдні хвильові функції нульового порядку $S_{0n}(c_j, s_j)$, $n = 0, 1, 2$, $j = 1, 2$. Вони утворюють повну ортогональну систему функцій у просторі $L^2(\Omega_j)$, де $\Omega_j = \{|s_j| \le 1\}$. Отже [3], функції $\varphi_{nm}(s_1, s_2) = S_{0n}(s_1, s_2) \cdot S_{0m}(s_1, s_2)$ утворюють повну ортогональну систему в просторі $\mathbf{L}^2(\Omega) = L^2(\Omega_j) \oplus L^2(\Omega_j)$. Припустимо також, що вони є нормованими, зберігаючи при цьому їхні попередні позначення. Ядра $K_j(s_j, s_j')$ запишемо через білінійні ряди

$$K_j(s_j, s_j') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_{0n}(c_j, s_j) \cdot S_{0n}(c_j, s_j')}{\mu_n^{(j)}}, \qquad j = 1, 2, \quad (8)$$

які внаслідок додатності ядер збігаються рівномірно за обома змінними. Тут $\mu_n^{(j)}$ – характеристичні числа. Як наслідок цього одержуємо вираз

$$K(s_1, s_2, s_1', s_2') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_{0n}(c_1, s_1) \cdot S_{0n}(c_1, s_1')}{\mu_n^{(1)}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_{0m}(c_2, s_2) \cdot S_{0m}(c_2, s_2')}{\mu_m^{(2)}} \equiv$$

$$\equiv \sum_{n,m=0}^{\infty} \lambda_{nm} \varphi_{nm}(s_1, s_2) \cdot \varphi_{nm}(s_1', s_2'), \quad (9)$$

де $\varphi_{nm}(s_1, s_2) = S_{0n}(c_1, s_1) \cdot S_{0m}(c_2, s_2)$, $\lambda_{nm} = 1/\left(\mu_n^{(1)} \mu_m^{(2)}\right)$. Ряд (9) збігається рівномірно за усіма змінними в області Ω, як добуток рівномірно збіжних рядів (8). Зазначимо, що з рівномірної збіжності ряду (9) випливає його середньоквадратична збіжність. Позначимо скінченну частину ряду через

$$K_N(s_1, s_2, s_1', s_2') = \sum_{n,m=0}^{N} \lambda_{nm} \varphi_{nm}(s_1, s_2) \cdot \varphi_{nm}(s_1', s_2'). \quad (10)$$

Зі збіжності ряду (9) у середньоквадратичному випливає рівність

$$\lim_{N\to\infty}\iint_{\Omega}\iint_{\Omega}\Big| K(s_1, s_2, s_1', s_2') -$$

$$- \sum_{n,m=0}^{N} \lambda_{nm}\varphi_{nm}(s_1, s_2)\cdot\varphi_{nm}(s_1', s_2')\Big|^2 ds_1 ds_2 ds_1' ds_2' = 0 .$$

Розглянемо наближене до (1) рівняння

$$f(s_1, s_2) = \iint_{\Omega} K_N(s_1, s_2, s_1', s_2') G\big[s_1', s_2', f(s_1', s_2')\big]\, ds_1'\, ds_2' . \qquad (11)$$

Враховуючи (10), перетворимо його до вигляду

$$f(s_1, s_2) = \sum_{n,m=0}^{N} \lambda_{nm}\varphi_{nm}(s_1, s_2)\iint_{\Omega} G\big[s_1', s_2', f(s_1', s_2')\big]\, ds_1'\, ds_2' . \qquad (12)$$

Розв'язок цього рівняння запишемо так:

$$f(s_1, s_2) = \sum_{n,m=0}^{N} a_{nm}\varphi_{nm}(s_1, s_2) , \qquad (13)$$

де a_{nm} – невідомі коефіцієнти. Підставляючи вираз (13) у рівність (12) і перемножуючи скалярно обидві частини (12) на φ_{nm} та враховуючи ортонормованість системи функцій, одержуємо нелінійну систему трансцендентних рівнянь стосовно невідомих a_{nm}:

$$a_{nm} = \mu_{nm}\iint_{\Omega}\varphi_{nm}(s_1', s_2')\cdot G\Big[\, s_1', s_2', \sum_{i,j=0}^{N} a_{ij}\varphi_{ij}(s_1', s_2')\Big] ds_1'\, ds_2' . \qquad (14)$$

Отже, задача знаходження розв'язків інтеґрального рівняння (1) зведена до розв'язування системи трансцендентних рівнянь (14) порядку N.

Позначимо через $f_*(s_1, s_2)$, $f_*^{(N)}(s_1, s_2)$ розв'язки точного (1) і наближеного (11) рівнянь відповідно. Припустимо, що існує і є неперервною у деякому околі розв'язку $f_*(s_1, s_2)$ слабка похідна $G_c[f]$. Тоді на підставі формули скінчених приростів [3] маємо

$$\big\| G[f_*] - G[f_*^{(n)}] \big\| \le M \big\| f_* - f_*^{(n)} \big\| = \sup_{0\le\theta\le 1} \big\| G_s'[f_* + \theta\Delta f] \big\| \big\| f_* - f_*^{(n)} \big\| . \qquad (15)$$

Використовуючи цю нерівність, одержуємо таку оцінку:

$$\big\| f_* - f_*^{(N)} \big\| \le \frac{\| G(f_*) \| C_N^{\infty}}{\sqrt{1 - M^2 C_N^2}} , \qquad (16)$$

де

$$C_N = \left(\iint_{S}\iint_{\Omega} \big|K_N(s_1, s_2, s_1', s_2')\big|^2 ds_1'\, ds_2'\, ds_1\, ds_2 \right)^{1/2} ,$$

$$C_N^{\infty} = \left(\iint_{S}\iint_{\Omega} \Big| \sum_{n,m=N+1}^{\infty} \lambda_{nm}\varphi_{nm}(s_1, s_2)\varphi_{nm}(s_1', s_2') \Big|^2 ds_1'\, ds_2'\, ds_1\, ds_2 \right)^{1/2} .$$

Якщо $M^2 C_N^2 < 1$, то, беручи до уваги те, що $\lim_{N\to\infty} C_N^{\infty} = 0$, і переходячи до границі у нерівності (16), одержуємо

$$\lim_{N\to\infty} \big\| f_* - f_*^{(n)} \big\| \le \lim_{N\to\infty} \frac{\| G(f_*) \| C_N^{\infty}}{\sqrt{1 - M^2 C_N^2}} \le \frac{\| G(f_*) \|}{\sqrt{1 - M^2 C_N^2}} \cdot \lim_{N\to\infty} C_N^{\infty} = 0 ,$$

тобто розв'язок наближеного рівняння прямує до розв'язку точного рівняння при $N \to \infty$.

Тим самим доведено таке

Твердження. *Нехай ядро* K *у рівнянні* (1) *є додатним, причому його власні функції утворюють повну ортонормовану систему у просторі* $\mathbf{L}^2(\Omega) = L^2(\Omega) \oplus L^2(\Omega)$, *а функція* $G \in L^2(\Omega)$. *Тоді розв'язок* $f^{(N)}$ *наближеного рівняння* (11) *прямує при* $N \to \infty$ *до розв'язку* $f^{(*)}$ *точного рівняння* (1), *при цьому для їх різниці справджується оцінка* (16).

3. Зазначимо, що для рівняння (1) є характерними неєдиність і галуження розв'язків, залежні від властивостей функцій $F(s_1, s_2)$ та $N(s_1, s_2)$ і параметрів випромінюючої системи c_1, c_2. Ці питання частково досліджені в роботах [1, 5, 6]. У випадку, коли ядро K визначається за формулою (9), а функції $F(s_1, s_2)$ або $N(s_1, s_2)$ є парними за одним (або за двома) із аргументів, то нелінійний оператор в (1) є інваріантним відносно типу парності за цим же (або за двома) аргументом. Відповідно при певних значеннях параметрів c_1, c_2 [5, 6] існує розв'язок із певним типом парності за своїми аргументами. Цю властивість використовуємо для знаходження розв'язку того чи іншого типу, задаючи відповідним чином початкове наближення.

Чисельно система (14) розв'язується методом послідовних наближень за формулою

$$a_{nm}^{(p+1)} = \lambda_{nm} \iint\limits_{\Omega} \varphi_{nm}(s_1', s_2') \cdot G\left[s_1', s_2', \sum_{i,j=0}^{N} a_{nm}^{(p)} \varphi_{nm}(s_1', s_2') \right] ds_1' \, ds_2' ,$$

$$p = 0, 1, 2, \dots , \qquad (17)$$

де p − номер ітерації. Релаксаційні властивості ітераційного процесу (17) доведено в [6].

Розглянемо числовий приклад синтезу симетричної за аргументом s_1 заданої амплітудної ДН $F(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2) = \begin{cases} 1, & |\tilde{s}_1| \le 1, \quad |\tilde{s}_2| \le \sqrt{3}(1 - \tilde{s}_1)/3, \\ 0, & |\tilde{s}_1| \le 1, \; 1 > |\tilde{s}_2| > \sqrt{3}(1 - \tilde{s}_1)/3. \end{cases}$ Розкрив S має форму квадрата, а поле в ньому є лінійно поляризованим. Значення основних параметрів задачі $c_1 = c_2 = 10$.

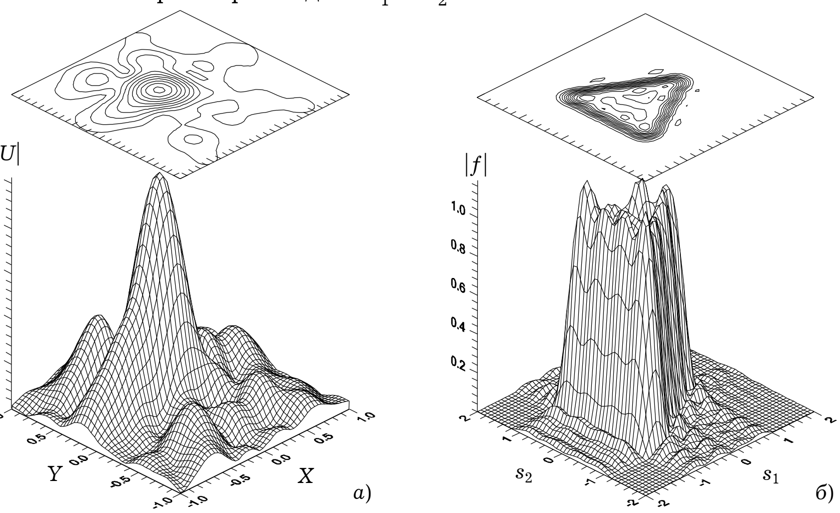

Рис. 1

Амплітуда синтезованої ДН зображена на рис. 1*а*. Фазова ДН є непарною за аргументом $\tilde{s}_2$. Оптимальний розподіл поля у розкриві (рис. 1*б*) є несиметричним відносно площини YOZ, водночас амплітудна ДН є симетричною відносно цієї площини. Початкове наближення в ітераційному процесі для фазової ДН вибрано таким: $\arg f_0(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2) = \tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^3$.

1. *Андрийчук М. И., Войтович Н. Н., Савенко П. А., Ткачук В. П.* Синтез антенн по амплитудной диаграмме направленности. Численные методы и алгоритмы. – Киев: Наук. думка, 1993. – 256 с.
2. *Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др.* Интегральные уравнения. – Москва: Наука, 1968. – 448 с.
3. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: Наука, 1968. – 496 с.
4. *Минкович Б. М., Яковлев В. П.* Теория синтеза антенн. – Москва: Сов. радио, 1969. – 296 с.
5. *Савенко П. А.* О ветвлении решений задач синтеза излучающих систем с плоским раскрывом по заданной амплитудной диаграмме направленности // Изв. вузов. Радиофизика. – 1986. – **29**, № 3. – С. 339–345.
6. *Савенко П. О.* Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем (теорія і методи розв'язування). – Львів: ІППММ НАН України, 2002. – 320 с.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА, ВОЗНИКАЮЩИХ В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА ИЗЛУЧАЮЩИХ СИСТЕМ

Приводится обобщение метода вырожденных ядер, который используется для решения линейных интегральных уравнений, на случай одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна, возникающих в задачах синтеза разных типов излучающих систем. Обоснована сходимость решений приближенного уравнения к решениям точного уравнения.

APPROXIMATE METHOD FOR SOLVING TWO-DIMENSIONAL HAMMERSTEIN TYPE INTEGRAL EQUATIONS ARISING IN THE RADIATING SYSTEMS SYNTHESIS PROBLEMS

The generalization of the degenerated kernels method, applied for solving the linear integral equations, on the case of one class of nonlinear integral Hammerstein type solutions, arising in the synthesis problems of various radiating systems, is considered. The convergence of solutions of approximate equation to solutions of exact equation is justified.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
22.06.04