УДК 517.524

Р. І. Дмитришин

ПРО ЗБІЖНІСТЬ БАГАТОВИМІРНОГО g-ДРОБУ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ

Розглядається узагальнення неперервного g-дробу – багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними. Із використанням багатовимірних дробово-лінійних відображень встановлено, що такий дріб є парною частиною багатовимірного π-дробу з нерівнозначними змінними. На основі цього досліджено збіжність багатовимірного g-дробу з нерівнозначними змінними та встановлено оцінки похибок наближень таким дробом у деяких областях простору $\mathbb{C}^N$.

1. Неперервні g-дроби та їх узагальнення. В аналітичній теорії неперервних дробів вивчаються різні типи функціональних неперервних дробів, які використовуються для дослідження голоморфних і мероморфних функцій. Найбільш вивченим типом є g-дроби

$$\frac{s_0}{1} + \frac{g_1 z}{1} + \frac{g_2(1-g_1)z}{1} + \frac{g_3(1-g_2)z}{1} + \ldots, \tag{1}$$

де $s_0 > 0$, $0 < g_n < 1$, $n \ge 1$, $z \in \mathbb{C}$. Огляд досліджень таких дробів наведено в монографіях [5, 9–11]. Перші узагальнення неперервних g-дробів – багатовимірні g-дроби – розглянуто в [2], а їх подальші дослідження – у роботах [4, 7, 8]. Двовимірні неперервні g-дроби (відповідні двовимірні неперервні дроби [2]) розглянуто в [3].

Відомо [6], що одним із багатовимірних узагальнень неперервних дробів є гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними (ГЛДзНЗ), які за своєю структурою є аналогами кратних степеневих рядів. У цій роботі означено багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними

$$\frac{s_0}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{g_{i(2)}(1-g_{i(1)}) z_{i_2}}{1} + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{g_{i(3)}(1-g_{i(2)}) z_{i_3}}{1} + \ldots, \tag{2}$$

де $s_0 > 0$, $N \in \mathbb{N}$, $i(k) = i_1, i_2, \ldots, i_k$ – мультиіндекс, $0 < g_{i(k)} < 1$, $k \ge 1$, $1 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$, $i_0 = N$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$, та встановлено, що такий дріб є парною частиною ГЛДзНЗ вигляду

$$\frac{\pi_0}{1 + \sum_{i_1=1}^{N} z_{i_1}} - \sum_{i_1=1}^{N} \frac{z_{i_1}}{1} + \frac{\pi_{i(1)}}{1 + \sum_{i_2=1}^{i_1} z_{i_2}} - \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{z_{i_2}}{1} + \frac{\pi_{i(2)}}{1 + \sum_{i_3=1}^{i_2} z_{i_3}} - \ldots, \tag{3}$$

де всі $\pi_{i(k)} > 0$, $\sum_{p=1}^{n} z_p \ne -1$, $1 \le n \le N$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$, який за аналогією з одновимірним випадком називається багатовимірним π-дробом з нерівнозначними змінними [5]. Досліджено збіжність ГЛДзНЗ (2) в області

$$P = \bigcup_{\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)} P_\alpha, \tag{4}$$

де

$$P_\alpha = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{n=1}^{N} \left(|z_n| - \operatorname{Re}(z_n e^{-2i\alpha}) \right) < 2\cos^2 \alpha \right\}, \tag{5}$$

та встановлено, що такий дріб збігається до голоморфної функції $g(\mathbf{z})$ в області $P_\alpha \cap Q_\alpha$, де

$$Q_\alpha = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{n=1}^{N} |z_n| < 4\cos^2\alpha - 2T\sum_{n=1}^{N} \left(|z_n| - \mathrm{Re}\,(z_n e^{-2i\alpha})\right) \right\}, \tag{6}$$

$$T = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ 1 - \left(1 + \sum_{r=n}^{\infty} \mu_n \mu_{n+1} \dots \mu_r \right)^{-1} \right\}, \tag{7}$$

$$\mu_r = \max\left\{ \pi_{i(r)} : 1 \le i_p \le i_{p-1},\ 1 \le p \le r,\ i_0 = N \right\}, \tag{8}$$

для кожного $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, швидше, ніж геометричний ряд із знаменником q, $0 < q < 1$, $q = q(K)$, K – довільна компактна підмножина цієї області.

2. Парна частина ГЛДзНЗ. Нехай

$$J = \left\{ i(k) = i_1, i_2, \dots, i_k : k \ge 1,\ 1 \le i_p \le i_{p-1},\ 1 \le p \le k,\ i_0 = N \right\}$$

– множина мультиіндексів. Позначимо через $z^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, вектор із $\mathbb{C}^p$, $p = \mathrm{C}_{N+r-1}^{N}$, вигляду

$$z^{(r)} = (z_{\underbrace{11\dots1}_{r}}, z_{\underbrace{21\dots1}_{r}}, \dots, z_{\underbrace{N,1\dots1}_{r}}, z_{\underbrace{N,2\dots1}_{r}}, \dots, z_{\underbrace{N,N,\dots,N}_{r}}), \tag{9}$$

де компоненти $z_{i(r)}$, $1 \le i_s \le i_{s-1}$, $1 \le s \le r$, $i_0 = N$, упорядковані наступним чином: $z_{n(r)} < z_{m(r)}$, якщо $n(r) < m(r)$, і $n(r) < m(r)$, якщо $n_1 < m_1$ або існує такий індекс s, $1 \le s < r$, що $n_p = m_p$, $1 \le p \le s$, і $n_{s+1} < m_{s+1}$. Через $z_{i(k)}^{(r)}$, $i(k) \in J$, $r \in \mathbb{N}$, позначимо вектор із $\mathbb{C}^p$, $p = \mathrm{C}_{i_k+r-1}^{i_k}$, вигляду

$$z_{i(k)}^{(r)} = (z_{i(k)\underbrace{11\dots1}_{r}}, z_{i(k)\underbrace{21\dots1}_{r}}, \dots, z_{i(k)\underbrace{i_k, i_k, \dots, i_k}_{r}}), \tag{10}$$

де компоненти $z_{i(k)j(r)}$, $1 \le j_s \le j_{s-1}$, $1 \le s \le r$, $j_0 = i_k$, упорядковані аналогічно, як компоненти вектора (9).

Твердження 1. *Парною частиною ГЛДзНЗ*

$$\frac{1}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{1} + \frac{b_{i(1)}}{1} + \dots + \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1} + \frac{b_{i(k)}}{1} + \dots, \tag{11}$$

де $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$, $i(k) \in J$, *– комплексні числа, є ГЛДзНЗ вигляду*

$$\frac{1}{1 + \sum_{i_1=1}^{N} a_{i(1)}} - \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)} b_{i(1)}}{d_{i(1)}} - \dots - \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} b_{i(k)}}{d_{i(k)}} - \dots, \tag{12}$$

де $d_{i(k)} = 1 + b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} a_{i(k+1)}$, $i(k) \in J$.

Д о в е д е н н я. Нехай f_n, g_n – n-ні апроксиманти ГЛДзНЗ (11) і (12) відповідно. Розглянемо багатовимірні дробово-лінійні відображення

$$u_0(z_0) = z_0, \qquad v_0(z^{(1)}) = \frac{1}{1 + \sum_{i_1=1}^{N} a_{i(1)} z_{i(1)}},$$

$$\xi_{i(k)} = u_{i(k)}(z_{i(k)}) = \frac{1}{1 + b_{i(k)} z_{i(k)}},$$

$$\eta_{i(k)} = v_{i(k)}(z^{(1)}_{i(k)}) = \frac{1}{1 + \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k} a_{i(k+1)} z_{i(k+1)}}, \tag{13}$$

де $i(k) \in J$; $z^{(r)}$, $z^{(r)}_{i(k)}$ – вектори, означені в (9) і (10) відповідно. Використовуючи композиції дробово-лінійних відображень (13)

$$U_0(z_0) = u_0(z_0), \qquad V_0(z^{(1)}) = U_0(v_0(z^{(1)})),$$

$$U_k(z^{(k)}) = V_{k-1}(\xi^{(k)}), \qquad V_k(z^{(k+1)}) = U_k(\eta^{(k)}), \qquad k \ge 1,$$

для довільного n, $n \ge 0$, отримаємо, що $U_n(\mathbf{1}) = f_{2n+1}$, $V_n(\mathbf{1}) = f_{2n+2}$, де $\mathbf{1} = (11\ldots1)$ – вектор із відповідного простору. Нехай

$$\zeta_{i(k)} = s_{i(k)}(z^{(1)}_{i(k)}) = u_{i(k)}(v_{i(k)}(z^{(1)}_{i(k)})),$$

де $i(k) \in J$, і

$$S_0(z^{(1)}) = s_0(z^{(1)}), \qquad S_k(z^{(k+1)}) = S_{k-1}(\zeta^{(k)}), \qquad k \ge 1.$$

Тоді для довільного n, $n \ge 0$, маємо $S_n(\mathbf{1}) = V_n(\mathbf{1}) = f_{2n+2}$. Оскільки

$$s_{i(k)}(z^{(1)}_{i(k)}) = 1 - \frac{b_{i(k)}}{1 + b_{i(k)} + \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k} a_{i(k+1)} z_{i(k+1)}},$$

де $i(k) \in J$, то для довільного n, $n \ge 0$, отримуємо, що $S_n(\mathbf{1}) = g_{n+1}$. ◊

Твердження 2. *Парною частиною багатовимірного* π*-дробу з нерівнозначними змінними* (3) *є багатовимірний* g*-дріб з нерівнозначними змінними* (2), *де* $s_0 = \pi_0$, $g_{i(k)} = \pi_{i(k)}/(1 + \pi_{i(k)})$, $i(k) \in J$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$.

Д о в е д е н н я проводиться із використанням еквівалентних перетворень ГЛДзНЗ та твердження 1. ◊

3. Збіжність багатовимірного g**-дробу з нерівнозначними змінними.** Для залишків дробу (3) введемо позначення

$$F^{(s)}_{i(s)} = 1 + \sum_{i_{s+1}=1}^{i_s} z_{i_{s+1}},$$

$$F^{(s)}_{i(p)} = 1 + \sum_{i_{p+1}=1}^{i_p} z_{i_{p+1}} - \sum_{i_{p+1}=1}^{i_p} \frac{z_{i_{p+1}}}{1} + $$

$$+ \frac{\pi_{i(p+1)}}{1 + \sum\limits_{i_{p+2}=1}^{i_{p+1}} z_{i_{p+2}}} - \cdots - \sum_{i_{s-1}=1}^{i_{s-2}} \frac{z_{i_{s-1}}}{1} + \frac{\pi_{i(s-1)}}{1 + \sum\limits_{i_s=1}^{i_{s-1}} z_{i_s}} - \sum_{i_s=1}^{i_{s-1}} \frac{z_{i_s}}{1},$$

де $s \ge 0$, $0 \le p \le s-1$, $1 \le i_k \le i_{k-1}$, $1 \le k \le s$, $i_0 = N$, і

$$G^{(s)}_{i(s)} = 1,$$

$$G^{(s)}_{i(p)} = 1 + \frac{\pi_{i(p)}}{1 + \sum\limits_{i_{p+1}=1}^{i_p} z_{i_{p+1}}} - \sum_{i_{p+1}=1}^{i_p} \frac{z_{i_{p+1}}}{1} + \cdots + \frac{\pi_{i(s-1)}}{1 + \sum\limits_{i_s=1}^{i_{s-1}} z_{i_s}} - \sum_{i_s=1}^{i_{s-1}} \frac{z_{i_s}}{1},$$

де $s \ge 1$, $1 \le p \le s-1$, $1 \le i_k \le i_{k-1}$, $1 \le k \le s$, $i_0 = N$. При цьому отримаємо такі рекурентні співвідношення:

$$F_{i(p)}^{(s)} = 1 + \sum_{i_{p+1}=1}^{i_p} z_{i_{p+1}} - \sum_{i_{p+1}=1}^{i_p} \frac{z_{i_{p+1}}}{G_{i(p+1)}^{(s)}}, \tag{14}$$

де $s \ge 0$, $0 \le p \le s-1$, $1 \le i_k \le i_{k-1}$, $1 \le k \le s$, $i_0 = N$,

$$G_{i(p)}^{(s)} = 1 + \frac{\pi_{i(p)}}{F_{i(p)}^{(s)}}, \tag{15}$$

де $s \ge 1$, $1 \le p \le s-1$, $1 \le i_k \le i_{k-1}$, $1 \le k \le s$, $i_0 = N$.

Теорема 1. *Багатовимірний* g*-дріб з нерівнозначними змінними* (2) *збігається до функції* $g(z)$ *в області* (4), *причому збіжність є рівномірною на кожній компактній підмножині цього простору.*

Д о в е д е н н я. Нехай α − довільне число з інтервалу $(-\pi/2, \pi/2)$. Використовуючи співвідношення (14) і (15), покажемо, що справджуються нерівності

$$\operatorname{Re}(F_{i(n)}^{(r)} e^{-i\alpha}) \ge D_{n+1}^{r-1}(\mu, \mathbf{z}) \cos\alpha > 0, \tag{16}$$

де $r \ge 1$, $0 \le n \le r-1$, $1 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le n$, $i_0 = N$,

$$D_n^m(\mu, \mathbf{z}) = \begin{cases} 1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{r=n}^{m} \dfrac{-\mu_r \sum\limits_{k=1}^{N} \{(|z_k| - \operatorname{Re}(z_k e^{-2i\alpha}))/(2\cos^2\alpha)\}}{1+\mu_r}, & n \le m, \\ 1, & n > m, \end{cases}$$

μ_r означені співвідношенням (8).

При $n = r-1$ нерівності (16) очевидні. Припускаючи, що нерівності (16) справджуються при $n = p+1$, де $p+1 \le r-1$, при $n = p$ маємо

$$\operatorname{Re}(F_{i(p)}^{(r)} e^{-i\alpha}) = e^{-i\alpha} + \sum_{i_{p+1}=1}^{i_p} z_{i_{p+1}} e^{-i\alpha} - \sum_{i_{p+1}=1}^{i_p} \frac{z_{i_{p+1}} e^{-i\alpha}}{G_{i(p+1)}^{(r)}} =$$

$$= e^{-i\alpha} + \sum_{i_{p+1}=1}^{i_p} \frac{\pi_{i(p+1)} z_{i_{p+1}} e^{-2i\alpha}}{(\pi_{i(p+1)} + F_{i(p+1)}^{(r)}) e^{-i\alpha}}.$$

У доведенні леми 4.41 з [5] показано, що при $x \ge c > 0$ і $v^2 \le 4u + 4$

$$\min_{-\infty < y < +\infty} \operatorname{Re} \frac{u + iv}{x + iy} = -\frac{\sqrt{u^2 + v^2} - u}{2x}. \tag{17}$$

Використовуючи співвідношення (17), де

$$u = \operatorname{Re}(\pi_{i(p+1)} z_{i_{p+1}} e^{-2i\alpha}), \qquad v = \operatorname{Im}(\pi_{i(p+1)} z_{i_{p+1}} e^{-2i\alpha}),$$

$$x = \operatorname{Re}((\pi_{i(p+1)} + F_{i(p+1)}^{(r)}) e^{-i\alpha}), \qquad y = \operatorname{Im}((\pi_{i(p+1)} + F_{i(p+1)}^{(r)}) e^{-i\alpha}),$$

і припущення індукції, отримаємо

$$\operatorname{Re}(F_{i(p)}^{(r)} e^{-i\alpha}) \ge \cos\alpha - \sum_{i_{p+1}=1}^{i_p} \frac{\pi_{i(p+1)} (|z_{i_{p+1}}| - \operatorname{Re}(z_{i_{p+1}} e^{-2i\alpha}))}{2(\pi_{i(p+1)} \cos\alpha + \operatorname{Re}(F_{i(p+1)}^{(r)} e^{-i\alpha}))} \ge$$

$$\ge \left(1 - \sum_{k=1}^{N} \frac{\mu_{p+1}(|z_k| - \operatorname{Re}(z_k e^{-2i\alpha}))}{2(\mu_{p+1} + D_{p+2}^{r-1}(\mu, \mathbf{z}))\cos^2\alpha}\right) \cos\alpha = D_{p+1}^{r-1}(\mu, \mathbf{z}) \cos\alpha > 0.$$

Зі співвідношень (14)–(16) випливає, що всі $F_{i(n)}^{(r)} \neq 0$, $G_{i(n)}^{(r)} \neq 0$.

За допомогою еквівалентних перетворень дріб $D_1^{\infty}(\mu, \mathbf{z})$ зведемо до вигляду

$$1 + \mathop{\mathrm{D}}_{r=1}^{\infty} \frac{-d_r(1-d_{r-1})\sum_{k=1}^{N}\{(|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha}))/(2\cos^2\alpha)\}}{1}, \tag{18}$$

де $d_0 = 0$, $d_r = \mu_r/(1+\mu_r)$, $r \geq 1$. Із доведення теорем 11.1–11.3 з [11] доходимо висновку, що неперервний дріб (18) є безумовно збіжним, послідовність його апроксимант є монотонно спадною і значення цього дробу є не більше ніж

$$1 - T\sum_{k=1}^{N}\{(|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha}))/(2\cos^2\alpha)\},$$

де T означено в (7).

Оскільки згідно з твердження 2 ГЛДзНЗ (2) є парною частиною ГЛДзНЗ (3), то його n-ну апроксиманту $g_n(\mathbf{z})$ запишемо у вигляді $g_n(\mathbf{z}) = s_0/F_0^{(n)}$. Із нерівностей (16) випливає, що апроксиманти $g_n(\mathbf{z})$, $n \geq 1$, ГЛДзНЗ (2) утворюють послідовність функцій, голоморфних в області (4).

Нехай

$$P_{\alpha,C} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{n=1}^{N}(|z_n| - \mathrm{Re}\,(z_n e^{-2i\alpha})) < 2C\cos^2\alpha \right\}, \quad 0 < C < 1. \tag{19}$$

Враховуючи нерівності (16) і те, що $|D_n^m(\mu, \mathbf{z})| > 1 - CT$ для всіх можливих індексів m, n (див. доведення теорем 11.1–11.3 з [11]), для довільного $\mathbf{z} \in P_{\alpha,C}$, $P_{\alpha,C} \subset P_\alpha$, маємо

$$|g_n(\mathbf{z})| \leq \frac{s_0}{\mathrm{Re}\,(F_0^{(n)} e^{-i\alpha})} \leq \frac{s_0}{(1-CT)\cos\alpha} = M(P_{\alpha,C}), \quad n \geq 1,$$

де $M(P_{\alpha,C})$ – стала, що залежить лише від області $P_{\alpha,C}$, тобто послідовність $\{g_n(\mathbf{z})\}$ рівномірно обмежена в (19).

Нехай K – довільна компактна підмножина області (4). Покриємо K областями вигляду (19) і виберемо з цього покриття скінченне підпокриття $\{P_{\alpha_j,C_j}\}_{j=1}^{s}$. Нехай $M(K) = \max\{M(P_{\alpha_j,C_j}) : 1 \leq j \leq s\}$. Тоді для довільного $\mathbf{z} \in K$ отримаємо, що $|g_n(\mathbf{z})| \leq M(K)$, $n \geq 1$, тобто послідовність $\{g_n(\mathbf{z})\}$ рівномірно обмежена на кожній компактній підмножині області (4).

Згідно з теоремою 4 з [1] ГЛДзНЗ (2) збігається в області $\Delta_r = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{n=1}^{N}|z_n| < r < 1/(4N)\right\}$. Очевидно, що $\Delta_r \subset P$ для кожного r, $0 < r < 1/(4N)$, зокрема, $\Delta_{1/(8N)} \subset P$. З огляду на теорему 2.17 [2] доходимо висновку, що багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними (2) збігається на кожній компактній підмножині області (4). ◊

Зауважимо, що при $N = 1$ область (4) запишеться у вигляді $\{z \in \mathbb{C} : |\arg(1+z)| < \pi\}$, що є максимальною областю збіжності неперервного g-дробу (1).

Теорема 2. *Багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними* (2) *збігається до голоморфної функції* $g(z)$ *в області*

$$\bigcup_{\alpha\in(-\pi/2,\pi/2)} (P_\alpha \cap Q_\alpha),$$

де P_α, Q_α *означені в* (5) *і* (6) *відповідно, і для похибок наближень в області* $P_\alpha \cap Q_\alpha$ *для кожного* $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, *справджуються оцінки*

$$|g(\mathbf{z}) - g_k(\mathbf{z})| \le \frac{16 s_0 \mu_k \cos\alpha}{1 + \mu_k - \sum\limits_{n=1}^{N} \{(|z_n| - \operatorname{Re}(z_n e^{-2i\alpha}))/(2\cos^2\alpha)\}} \times$$

$$\times \frac{\left(\sum\limits_{n=1}^{N} |z_n|\right)^k}{\left[4\cos^2\alpha - 2T\sum\limits_{n=1}^{N} \{(|z_n| - \operatorname{Re}(z_n e^{-2i\alpha}))/(2\cos^2\alpha)\}\right]^{k+1}}, \quad k \ge 2,$$

де $g_k(\mathbf{z})$ – k*-та апроксиманта дробу* (2).

Д о в е д е н н я проводиться за схемою доведення швидкості збіжності багатовимірних g-дробів [7, теорема 2]. При цьому використовуються нерівності (16) і формула різниці двох підхідних дробів $f_{2k+2m}(\mathbf{z}) - f_{2k}(\mathbf{z})$ ГЛДзНЗ (3) при $k \ge 1$, $m \ge 1$ [1]:

$$f_{2k+2m}(\mathbf{z}) - f_{2k}(\mathbf{z}) =$$

$$= \frac{\pi_0}{F_0^{(k+m)} F_0^{(k)}} \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{i_1} \ldots \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{\prod\limits_{r=1}^{k} \pi_{i(r)} z_{i_r}}{\prod\limits_{r=1}^{k} (\pi_{i(r)} + F_{i(r)}^{(k+m)}) \prod\limits_{r=1}^{k-1} (\pi_{i(r)} + F_{i(r)}^{(k)})}.$$

4. Висновки. Визначений у роботі багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними (2) можна використовувати для дослідження голоморфних і мероморфних функцій багатьох змінних. Залишаються відкритими питання відповідності багатовимірного g-дробу з нерівнозначними змінними кратному степеневому ряду та швидкості збіжності такого дробу в його області визначення (4).

1. *Баран О. Є.* Деякі ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». – 1998. – № 341. – С. 18–23.
2. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
3. *Возна С. М.* Збіжність двовимірного неперервного g-дробу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 3. – С. 28–32.
4. *Дмитришин Р. І.* Багатовимірні аналоги g-дробів, їх властивості, ознаки збіжності: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 1998. – 128 с.
5. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
6. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и её применение в вычислительной математике. – Москва: Мир, 1983. – 312 с.
7. *Bodnar D. I., Dmytryshyn R. I.* On the convergence of multidimensional g-fraction // Мат. студії. – 2001. – **15**, № 2. – С. 115–126.
8. *Dmytryshyn R. I.* The multidimensional generalization of g-fractions and their application // J. Comp. and Appl. Math. – 2004. – **164-165**. – P. 265–284.
9. *Gragg W. B.* Truncation error bounds for g-fractions // Numer. Math. – 1968. – **11**. – P. 370–379.
10. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions with applications. – Amsterdam: North-Holland, 1992. – 606 p.
11. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions. – New York: Van Nostrand, 1948. – 433 p.

О СХОДИМОСТИ МНОГОМЕРНОЙ g-ДРОБИ С НЕРАВНОЗНАЧНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Рассматривается обобщение непрерывной g-дроби – многомерная g-дробь с неравнозначными переменными. С использованием многомерных дробно-линейных преобразований установлено, что такая дробь является парной частью многомерной π-дроби с неравнозначными переменными. На этой основе исследована сходимость многомерной g-дроби с неравнозначными переменными и установлены оценки погрешности приближения такой дроби в некоторых областях пространства $\mathbb{C}^N$.

ON CONVERGENCE OF MULTIDIMENSIONAL g-FRACTION WITH NON-EQUIVALENT VARIABLES

We consider the generalization of continued g-fraction, namely the multidimensional g-fraction with non-equivalent variables. By multidimensional fraction-linear reflection, we establish that such fraction is an even part of multidimensional π-fraction with nonequivalent variables. And, besides, we investigate the convergence of the multidimensional g-fraction with non-equivalent variables and establish the truncation errors for such fraction in the same regions of the space $\mathbb{C}^N$.

Прикарпат. нац. ун-т
ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
30.11.04