УДК 517.5

Є. В. Дерець

АСИМПТОТИЧНО ОПТИМАЛЬНІ ВАГОВІ КУБАТУРНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ФУНКЦІЙ ВІД БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Побудовано послідовність асимптотично оптимальних вагових кубатурних формул на класах $H^{\omega}_{G,\rho}$, визначених мажорантою ω модуля неперервності стосовно метрики ρ. При цьому область інтегрування $G \subset \mathbb{R}^n$ вимірна за Жорданом, вагова функція інтегровна за Лебегом, невід'ємна, обмежена та відокремлена від нуля, а метрика ρ задовольняє умову щільного укладання.

1. Вступ. У різних питаннях обчислювальної математики широко використовуються формули наближеного інтегрування. Оптимізація формул наближеного інтегрування розглядалася у багатьох роботах теоретичного та прикладного характеру (див., наприклад, [3, 8, 9] і бібліографію у них). Однак, як правило, при вирішенні питання встановлення оптимальних кубатурних формул виникають значні труднощі як технічного, так і принципового характеру, і для багатьох класів функцій розв'язки таких задач на сьогодні не є відомі. Тому задачі, пов'язані з побудовою асимптотично оптимальних послідовностей кубатурних формул і оцінкою похибки, також є актуальними.

У цій роботі розглядаються класи функцій $H^{\omega}_{G,\rho}$, визначених на вимірній за Жорданом множині $G \subset \mathbb{R}^n$ і таких, що $\forall\, f \in H^{\omega}_{G,\rho}$, $\forall\, x, y \in G$ $|f(x) - f(y)| \le \omega(\rho(x,y))$, де $\omega(t)$ – заданий модуль неперервності, а метрика $\rho(x,y)$ індукована деякою нормою, тобто $\rho(x,y) = \| x - y \|$, де $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, \ldots, y^n)$.

Нехай $X_m = \{x_\nu\}_{\nu=1}^m \subset G$, $C_m = \{c_\nu\}_{\nu=1}^m \subset \mathbb{R}^1$ – відповідно множина вузлів і коефіцієнтів кубатурної формули вигляду

$$\int_G P(x) f(x)\, dx \approx \sum_{\nu=1}^m c_\nu f(x_\nu)\,, \tag{1}$$

де $f \in H^{\omega}_{G,\rho}$, функція $P(x)$ невід'ємна та інтегровна за Лебегом на G.

Покладемо

$$R(H^{\omega}_{G,\rho}, P, X_m, C_m) = \sup_{f \in H^{\omega}_{G,\rho}} \left| \int_G P(x) f(x)\, dx - \sum_{\nu=1}^m c_\nu f(x_\nu) \right|,$$

$$R(H^{\omega}_{G,\rho}, P, X_m) = \inf_{C_m} R(H^{\omega}_{G,\rho}, P, X_m, C_m)\,,$$

$$R_m(H^{\omega}_{G,\rho}, P) = \inf_{X_m} R(H^{\omega}_{G,\rho}, P, X_m)\,.$$

Послідовність кубатурних формул (1), визначених наборами вузлів X_m^* і коефіцієнтів C_m^*, називається асимптотично оптимальною, якщо

$$\lim_{m \to \infty} \frac{R(H^{\omega}_{G,\rho}, P, X_m^*, C_m^*)}{R_m(H^{\omega}_{G,\rho}, P)} = 1\,.$$

Задача відшукання асимптотично точного значення $R_m(H^{\omega}_{G,\rho}, P)$ при $m \to \infty$ вивчалася багатьма авторами та розв'язана для деяких конкретних метрик у випадку $P \equiv 1$ для будь-якого модуля неперервності [1, 13] і у випадку $\omega(t) = t^{\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$, − при деяких обмеженнях на вагову функцію [2, 7, 8].

Оптимальну для класу $H^{\omega}_{G,\rho}$ квадратурну формулу побудовано в роботі [4] для $n = 1$, $G = [a, b]$, $P \equiv 1$ і довільного модуля неперервності $\omega(t)$. У випадку $n = 1$, $G = [a, b]$ отримано [6] квадратурну формулу вигляду (1), оптимальну за коефіцієнтами при фіксованому наборі вузлів $X_m \subset G$. Узагальнення цього результату в багатовимірному випадку наведено в [1] для деяких конкретних метрик, породжених відповідними нормами.

Послідовність асимптотично оптимальних кубатурних формул для деяких конкретних метрик побудовано в [1, 13] у випадку, коли множина G вимірна за Жорданом, $P \equiv 1$, $\omega(t)$ − довільний модуль неперервності, а також за умови, що $\omega(t) = t^{\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$, а вагова функція $P(x)$ вимірна за Жорданом і приймає скінченне число значень [1, 2].

Результати роботи [12] дозволяють будувати асимптотично оптимальні кубатурні формули для класів $H^{\omega}_{G,\rho}$ за умови, що $\omega(t) = t$, а метрика ρ задовольняє таку умову:

(**A**) попарно неперетинними зсувами кулі $\{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, \theta) < 1\}$, де $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$, можна покрити весь простір $\mathbb{R}^n$, крім множини міри 0.

У цій роботі побудуємо послідовність асимптотично оптимальних кубатурних формул вигляду (1), коли функція ρ задовольняє умову (**A**), а функції P і ω відповідно задовольняють умови (**B**) і (**C**):

(**B**) $P(x)$ інтегровна за Лебегом на множині G, обмежена і відокремлена від нуля, тобто $\forall x \in G \quad 0 < a_1 \le P(x) \le a_2 < \infty$;

(**C**) для кожного $c > 0$ існує границя

$$g(c) = \lim_{x \to +0} \left(\int_0^{cx} t^{n-1} \omega(t)\, dt \right) \cdot \left(\int_0^{x} t^{n-1} \omega(t)\, dt \right)^{-1}.$$

2. Допоміжні результати.

Лема 1. *Якщо виконується умова* (**C**), *то справджуються такі твердження*:

(***i***) $g(c) = c^{n+\beta}$, *де* $\beta \in [0, 1]$ − *деяке число*;

(***ii***) *для будь-якого проміжку* $[a, b] \subset (0, +\infty)$ *і будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує* $\delta > 0$ *таке, що для всіх* $x \in (0, \delta]$ *і* $c \in [a, b]$ *виконується нерівність*

$$1 - \varepsilon < \left(\int_0^{cx} t^{n-1} \omega(t)\, dt \right) \cdot \left(c^{n+\beta} \int_0^{x} t^{n-1} \omega(t)\, dt \right)^{-1} < 1 + \varepsilon.$$

Д о в е д е н н я. Покладемо $\beta = \log_2 g(2) - n$, тоді $g(2) = 2^{n+\beta}$, при цьому з напівадитивності та монотонності $\omega(t)$ випливає, що $\beta \in [0, 1]$. Неважко показати, що $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\forall q \in \mathbb{N}$ $g(2^{p/q}) = (2^{p/q})^{n+\beta}$, звідки з урахуванням монотонності $g(c)$ негайно випливає (***i***). Твердження (***ii***) є очевидним наслідком (***i***). ◊

Надалі будуть потрібні також такі твердження, отримані автором.

Теорема 2 [14]. *Нехай метрика* ρ *індукована довільною нормою, модуль неперервності* $\omega(t)$ *задовольняє умову* (**C**), *а* G *є одиничним кубом, тобто* $G = G_0$, $G_0 \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \le x^i \le 1,\ i = 1, \ldots, n\}$. *Тоді*

$$\lim_{m\to\infty}\left(R_m(H^{\omega}_{G,\rho},1)\right)\cdot\left(m\int\limits_0^{m^{-1/n}} t^{n-1}\omega(t)\,dt\right)^{-1}=E,\qquad 0<E<\infty .$$

Якщо, крім того, виконується умова (**A**), *то*

$$E=n\left(\operatorname{mes}\{x\in\mathbb{R}^n:\rho(x,\theta)\le 1\}\right)^{-\beta/n}.$$

Теорема 2 [14]. *Нехай* $P(x)$ *− вимірна за Лебегом невід'ємна функція, визначена на вимірній за Жорданом множині* $G\subset\mathbb{R}^n$, *модуль неперервності* $\omega(t)$ *задовольняє умову* (**C**). *Тоді*

$$\lim_{m\to\infty}\left(R_m(H^{\omega}_{G,\rho},P)\right)\cdot\left(E\,\|P\|\,m\int\limits_0^{m^{-1/n}} t^{n-1}\omega(t)\,dt\right)^{-1}=1,$$

де $\|P\|=\left(\int\limits_G (P(x))^{n/(n+\beta)}\,dx\right)^{(n+\beta)/n}$; E *− стала, визначена в теоремі* 1.

Для будь-якої непорожньої множини $W\subset\mathbb{R}^n$ покладемо

$$F(W,x)=\omega(\inf_{y\in W}\rho(x,y)) .$$

Лема 2. *Нехай метрика* $\rho(x,y)$ *індукована довільною нормою, функція* $P(x)$ *невід'ємна та інтегровна за Лебегом на множині* G. *Для будь-якого набору вузлів* $X_m=\{x_i\}_{i=1}^m\subset G$ *відповідні їм оптимальні коефіцієнти визначаються за формулою* $c_i=\int\limits_{A_i}P(x)\,dx$, *де* $A_i=\{x\in G:\rho(x,X_m)=\rho(x,x_i)\}$, $i=1,2,\dots,m$, *при цьому*

$$R(H^{\omega}_{G,\rho},P,X_m)=\int\limits_G P(x)F(X_m,x)\,dx . \tag{2}$$

Твердження леми 2 для деяких конкретних ρ отримано в [1], однак доведення майже дослівно переноситься на випадок довільної метрики (одновимірний аналог (2) встановлено в [6]).

Нехай виконуються умови (**A**) і (**C**). Побудуємо асимптотично оптимальну послідовність вузлів X_m для випадку, коли $P\equiv 1$, G − куб.

Зауваження. Усі куби, які будемо розглядати надалі, є замкненими, невиродженими та розміщеними в просторі $\mathbb{R}^n$ так, що їхні ребра є паралельними до координатних осей.

Введемо позначення: $B[x_0,r]=\{x\in\mathbb{R}^n:\rho(x,x_0)\le r\}$, $B=B[\theta,1]$, $\gamma = \max_{x,y\in B}\rho(x,y)$, $r_m=(\operatorname{mes}G/(m\operatorname{mes}B))^{1/n}$. Кількість елементів будь-якої скінченної множини $Y\subset\mathbb{R}^n$ позначимо через $|Y|$. Розглянемо покриття простору $\mathbb{R}^n$ зсувами кулі $B[\theta,r_m]$ без перетинів додатної міри. Нехай Z_m − множина центрів усіх куль у цьому покритті, що є підмножинами G. Якщо $|Z_m|<m$, то додамо до нього $m-|Z_m|$ точок, вибираючи їх у множині G так, щоб кожна куля покриття містила не більше однієї точки. Отриману як наслідок множину позначимо через Y_m. Оцінюючи знизу функцію розподілу функції $F(X_m,x)$, де $X_m\subset G$ − довільний набір вузлів, так само, як у роботі [1], отримуємо нерівність

$$\int\limits_G F(Y_m,x)\,dx\ge R_m(H^{\omega}_{G,\rho},1)\ge m\int\limits_{B[\theta,r_m]}\omega(\rho(x,\theta))\,dx . \tag{3}$$

Позначимо $\delta = \max\limits_{x,y \in B}(\sum\limits_{i=1}^{n}(x^i - y^i)^2)^{1/2}$. Очевидно, якщо $(\mathrm{mes}\, G)^{1/n} > 3\delta r_m$, то $\forall x \in G \quad \rho(x, Y_m) \le 2\gamma r_m$ і

$$\int\limits_G F(Y_m, x)\, dx < m \int\limits_{B[\theta, r_m]} \omega(\rho(x,\theta))\, dx + 2n(\mathrm{mes}\, G)^{(n-1)/n}\, \delta r_m \omega(2\gamma r_m). \quad (4)$$

Згідно з лемою С. Б. Стєчкіна про опуклу мажоранту модуля неперервності [5], для будь-якого модуля неперервності $\omega(t)$ існує опуклий модуль неперервності $\omega_*(t)$, для якого $\omega(t) \le \omega_*(t) < 2\omega(t)$. Отже,

$$m \int\limits_{B[\theta, r_m]} \omega(\rho(x,\theta))\, dx = mn\, \mathrm{mes}\, B \int\limits_0^{r_m} t^{n-1}\omega(t)\, dt >$$

$$> \frac{1}{2} mn\, \mathrm{mes}\, B\, (\omega_*(r_m)/r_m) \int\limits_0^{r_m} t^n dt \ge \frac{1}{2(n+1)} mn\, \mathrm{mes}\, B\, r_m^n \omega(r_m). \quad (5)$$

Крім того, з властивостей модуля неперервності випливає, що

$$\forall x > 0, \quad \forall c > 0 \qquad \omega(cx)/\omega(x) \le \omega((1+[c])x)/\omega(x) \le 1 + [c], \quad (6)$$

де $[\,a\,]$ − ціла частина числа a.

З оцінок (4)−(6) отримуємо

$$\frac{\int\limits_G F(Y_m, x)\, dx}{m \int\limits_{B[\theta, r_m]} \omega(\rho(x,\theta))\, dx} < 1 + (1 + [2\gamma])4(n+1)\,\delta(\mathrm{mes}\, B)^{-1/n} m^{-1/n} =$$

$$= 1 + Am^{-1/n}, \quad (7)$$

де $A = \mathrm{const}$ не залежить від куба G, при цьому нерівність (7) справджується при $(\mathrm{mes}\, G)^{1/n} > 3\delta r_m$, тобто при $m > (3\delta)^n (\mathrm{mes}\, B)^{-1}$.

Зі співвідношень (3) і (7) випливає

Теорема 3. *Нехай множина* $G \subset \mathbb{R}^n$ *є кубом,* $P \equiv 1$, *функції* ρ *і* ω *задовольняють умови* (**A**) *і* (**C**) *відповідно. Тоді послідовність кубатурних формул вигляду* (1) *з вузлами* Y_m *і відповідними їм оптимальними коефіцієнтами є асимптотично оптимальною.*

3. Основні результати. Нехай $G \subset \mathbb{R}^n$ − деякий куб, а функція $P(x)$ задовольняє умови (**B**). Для кожного $m \in \mathbb{N}$ покладемо $s = [m^{1/(2n)}]$ і подамо куб G у вигляді об'єднання s^n однакових кубів, що не мають спільних внутрішніх точок: $G = \bigcup\limits_{i=1}^{s^n} G_{i,s}$. Для кожного $i = 1, 2, \ldots, s^n$ введемо такі позначення

$$a_{i,s} = \frac{1}{\mathrm{mes}\, G_{i,s}} \int\limits_{G_{i,s}} P(x) dx,$$

$$b_{i,s} = \left(\frac{1}{\mathrm{mes}\, G_{i,s}} \int\limits_{G_{i,s}} (P(x))^{n/(n+\beta)} dx \right)^{(n+\beta)/n},$$

$$g_{i,s}(t) = \left| b_{i,s}^{n/(n+\beta)} - t^{n/(n+\beta)} \right| + \left| t - a_{i,s} \right|.$$

Насамперед зазначимо, що $a_{i,s} \ge b_{i,s}$, оскільки

$$a_{i,s} = \frac{1}{\operatorname{mes} G_{i,s}} \int\limits_0^{\operatorname{mes} G_{i,s}} \bar{P}_{i,s}(x)\, dx \ge$$

$$\ge \left(\frac{1}{\operatorname{mes} G_{i,s}} \int\limits_0^{\operatorname{mes} G_{i,s}} \left(\bar{P}_{i,s}(x)\right)^{n/(n+\beta)} dx \right)^{(n+\beta)/n} = b_{i,s},$$

де $\bar{P}_{i,s}(x)$ − перестановка функції $P(x)$ на множині $G_{i,s}$ у спадному порядку (див., наприклад, [11]), нерівність випливає з опуклості функції $h(x) = x^{n/(n+\beta)}$ (див. [10, розд. 2, задача 71]). Використовуючи отриману нерівність, легко довести, що функція $g_{i,s}$ досягає мінімуму на множині $[0,+\infty)$ в одній із точок $a_{i,s}, b_{i,s}$. Якщо $g_{i,s}(a_{i,s}) \le g_{i,s}(b_{i,s})$, то покладемо $q_{i,s} = a_{i,s}$, у протилежному випадку покладемо $q_{i,s} = b_{i,s}$.

Введемо функції

$$Q_m(x) = \begin{cases} q_{i,s}, & x \in G_{i,s} \backslash \partial G_{i,s}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \\ 0 & \text{в інших точках } G, \end{cases}$$

$$\tilde{Q}_m(x) = \begin{cases} \tilde{q}_{i,s}, & x \in G_{i,s} \backslash \partial G_{i,s}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \\ 0 & \text{в інших точках } G, \end{cases}$$

де $\tilde{q}_{i,s}$ − деякі невід'ємні числа, $\partial G_{i,s}$ − границя множини $G_{i,s}$. З побудови функції $Q_m(x)$ випливає, що при будь-якому виборі чисел $\tilde{q}_{i,s}$ справджується нерівність

$$\sum_{i=1}^{s^n} \left| \int\limits_{G_{i,s}} \left(\left(Q_m(x)\right)^{n/(n+\beta)} - \left(P(x)\right)^{n/(n+\beta)} \right) dx \right| + \sum_{i=1}^{s^n} \left| \int\limits_{G_{i,s}} \left(Q_m(x) - P(x)\right) dx \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{s^n} \left| \int\limits_{G_{i,s}} \left(\left(\tilde{Q}_m(x)\right)^{n/(n+\beta)} - \left(P(x)\right)^{n/(n+\beta)} \right) dx \right| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s^n} \left| \int\limits_{G_{i,s}} \left(\tilde{Q}_m(x) - P(x)\right) dx \right|. \tag{8}$$

Оскільки $\operatorname{diam} G_{i,s} \to 0$ при $m \to \infty$, числа $\tilde{q}_{i,s}$ можна вибрати так, щоб сума в правій частині (8) наближалася до нуля при $m \to \infty$, отже,

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_G \left(Q_m(x)\right)^{n/(n+\beta)} dx = \int\limits_G \left(P(x)\right)^{n/(n+\beta)} dx,$$

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_G Q_m(x)\, dx = \int\limits_G P(x)\, dx. \tag{9}$$

Покладемо

$$m_{i,s} = \left[\frac{m q_{i,s}^{n/(n+\beta)} \operatorname{mes} G_{i,s}}{\int\limits_G \left(Q_m(x)\right)^{n/(n+\beta)} dx} \right], \qquad i = 1,2,\ldots,s^n. \tag{10}$$

Оскільки $P(x) \ge a_1 > 0$ для усіх $x \in G$, то $N(m) \overset{\text{def}}{=} \min\limits_{1 \le i \le s^n} m_{i,s} \to \infty$, якщо $m \to \infty$.

Розмістимо в кожному кубі $G_{i,s}$ по $m_{i,s}$ вузлів так, як зазначено вище, отриману множину позначимо через X_m. Очевидно, існує константа $\lambda > 0$ така, що

$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in G \qquad \rho(x, X_m) \le \lambda m^{-1/n}. \tag{11}$$

На підставі (7), якщо $N(m) > (3\delta)^n / \operatorname{mes} B$, то

$$\int\limits_G P(x) F(X_m, x)\, dx \le \left(1 + A(N(m))^{-1/n}\right) \cdot \sum_{i=1}^{s^n} m_{i,s} q_{i,s} \int\limits_{B[\theta, r_{i,s}]} \omega(\rho(x,\theta))\, dx +$$

$$+ \int\limits_G \left(P(x) - Q_m(x)\right) F(X_m, x)\, dx, \tag{12}$$

де $r_{i,s} = \left(\operatorname{mes} G_{i,s} / (m_{i,s} \operatorname{mes} B)\right)^{1/n}$. Оскільки, починаючи з деякого m, $r_{i,s} m^{1/n} \in [h_1, h_2]$, $i = 1, \ldots, s^n$, де числа $h_1, h_2 > 0$ залежать тільки від ρ і $P(x)$, і $\int\limits_{B[\theta, r_{i,s}]} \omega(\rho(x,\theta))\, dx = n \operatorname{mes} B \int\limits_0^{r_{i,s}} t^{n-1} \omega(t)\, dt$, то згідно з лемою 1 $\forall \varepsilon > 0$, починаючи з деякого m, для всіх $i = 1, 2, \ldots, s^n$ справджується нерівність

$$\int\limits_0^{r_{i,s}} t^{n-1} \omega(t)\, dt \le (1 + \varepsilon) \| P \| q_{i,s}^{-1} (\operatorname{mes} B)^{-(n+\beta)/n} \int\limits_0^{m^{-1/n}} t^{n-1} \omega(t)\, dt. \tag{13}$$

Зі співвідношень (9)–(13) і теореми 2 випливає, що послідовність наборів вузлів X_m є асимптотично оптимальною.

Нехай тепер множина $G \subset \mathbb{R}^n$ вимірна за Жорданом. Виберемо куб $\tilde{G}$ так, щоб $G \subset \tilde{G}$, для кожного $m \in \mathbb{N}$ покладемо $s = [m^{1/(2n)}]$ і подамо куб $\tilde{G}$ у вигляді об'єднання s^n однакових кубів, що не мають спільних внутрішніх точок: $\tilde{G} = \bigcup\limits_{i=1}^{s^n} \tilde{G}_{i,s}$. Покладемо

$$J_l = \{1, 2, \ldots, s^n\}, \qquad J_{l,s} = \{i \in J_l : \tilde{G}_{i,s} \subset G\},$$

$$J_{2,s} = \left\{i \in J_l : \tilde{G}_{i,s} \cap G \ne \varnothing,\ i \notin J_{1,s}\right\}, \quad T_s = G \cap \left\{ \bigcup_{i \in J_{2,s}} \tilde{G}_{i,s} \right\}.$$

Визначимо величину $q_{i,s}$ для всіх $i \in J_{1,s}$ так само, як і вище, для кожного $i \in J_{2,s}$ покладемо $q_{i,s} = a_1$. Уведемо функцію

$$\tilde{Q}_m(x) = \begin{cases} q_{i,s}, & x \in \tilde{G}_{i,s} \setminus \partial \tilde{G}_{i,s},\ i \in J_{1,s} \cup J_{2,s}, \\ 0 & \text{в інших точках } \tilde{G}. \end{cases}$$

Покладемо

$$m_{i,s} = \left[\frac{m q_{i,s}^{n/(n+\beta)} \operatorname{mes} \tilde{G}_{i,s}}{\int\limits_G (\tilde{Q}_m(x))^{n/(n+\beta)}\, dx} \right], \qquad i \in J_{1,s} \cup J_{2,s}.$$

У кожному кубі $\tilde{G}_{i,s}$ при $i \in J_{1,s}$ побудуємо множину вузлів $\tilde{X}_{i,s}$ так, як зазначено вище ($\left|\tilde{X}_{i,s}\right| = m_{i,s}$), а для кожного $i \in J_{2,s}$ побудуємо покриття простору $\mathbb{R}^n$ зсувами кулі $B\left[\theta, 2(\operatorname{mes}\tilde{G}_{i,s}/(\operatorname{mes}B\, m_{i,s}))^{1/n}\right]$ без перерізів додатної міри і виберемо з кожної кулі в цьому покритті, що перетинає $G \cap \tilde{G}_{i,s}$, по одній точці, що належить $G \cap \tilde{G}_{i,s}$, отриману множину також позначимо $\tilde{X}_{i,s}$. Покладемо $\tilde{X}_m = \bigcup\limits_{i \in J_{1,s} \cup J_{2,s}} \tilde{X}_{i,s}$. З побудови множини $\tilde{X}_m$ випливає, що $\rho(\tilde{X}_m, x) \le \tilde{c} \max\limits_{1 \le i \le s^n} (\operatorname{mes}\tilde{G}_{i,s}/(m_{i,s}\operatorname{mes}B))^{1/n}$, де $\tilde{c}$ – стала, яка не залежить від m і G, звідки випливає, що $\rho(\tilde{X}_m, x) \le \tilde{c}_2 m^{-1/n}$ для всіх $x \in G$ і $m \in \mathbb{N}$, $\tilde{c}_2$ – стала, яка не залежить від m.

Маємо

$$\int_G P(x)F(\tilde{X}_m, x)\,dx \le \sum_{i \in J_{i,s}} \int_{\tilde{G}_{i,s}} q_{i,s}F(\tilde{X}_{i,s}, x)\,dx +$$

$$+ \int_G (P(x) - Q_m(x))F(\tilde{X}_m, x)\,dx + \int_{T_s} \tilde{Q}_m(x)F(\tilde{X}_m, x)\,dx.$$

Оцінюючи зверху перший і другий доданок у правій частині аналогічно до описаного вище і беручи до уваги нерівність

$$\int_{Ts} \tilde{Q}_m(x)F(\tilde{X}_m, x)\,dx \le a_1 \operatorname{mes}T_s\omega(\tilde{c}_2 m^{-1/n}),$$

умову (**C**), рівність $\lim\limits_{m\to\infty} \operatorname{mes}T_s = 0$ і теорему 2, отримуємо, що виконується така

Теорема 4. *Нехай множина $G \subset \mathbb{R}^n$ вимірна за Жорданом, функції ρ, P і ω задовольняють умови* (**A**), (**B**), (**C**) *відповідно. Тоді послідовність кубатурних формул, визначена вузлами $\tilde{X}_m$ і відповідними їм оптимальними коефіцієнтами, є асимптотично оптимальною.*

3. Висновки. Ця робота є продовженням циклу робіт Н. П. Корнійчука, В. Ф. Бабенко, В. П. Моторного та ін., пов'язаних з оптимізацією багатовимірних квадратур. Основна її відмінність полягає в тому, що при побудові асимптотично оптимальних квадратур розглядається довільна відокремлена від нуля обмежена й інтегровна за Лебегом вагова функція. Описаний спосіб побудови послідовності асимптотично оптимальних квадратурних формул може бути застосований також у випадку $n = 2$ для евклідової метрики на площині, при цьому при побудові множини вузлів слід розглянути покриття простору $\mathbb{R}^2$ без перерізів додатної міри зсувами правильного шестикутника.

1. *Бабенко В. Ф.* Асимптотически точная оценка остатка наилучших для некоторых классов функций кубатурных формул // Мат. заметки. – 1976. – **19**, вып. 3. – С. 313–322.
2. *Бабенко В. Ф.* Точная асимптотика остатков оптимальных для некоторых классов функций весовых кубатурных формул // Мат. заметки. – 1976. – **20**, вып. 4. – С. 589–596.
3. *Женсыкбаев А. А.* Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, № 4. – С. 107–159.
4. *Корнейчук Н. П.* Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных // Мат. заметки. – 1968. – **3**, вып. 5. – С. 565–576.
5. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений. – Москва: Наука, 1976. – 320 с.

6. *Лебедь Г. К.* О квадратурных формулах с наименьшей оценкой остатка на некоторых классах функций // Мат. заметки. − 1968. − **3**, № 5. − С. 577−586.
7. *Маунг Чжо Ньюн, Шарыгин И. Ф.* Оптимальные кубатурные формулы на классах $D_2^{1,c}$ и D_2^{1,l_1} // Вопросы вычисл. и прикл. математики. − Ташкент: Ин-т кибернетики АН УзССР, 1971. − С. 22−27.
8. *Моторный В. П.* Исследования Днепропетровских математиков по оптимизации квадратурных формул // Укр. мат. журн. − 1990. − **42**, № 1. − С. 18−33.
9. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. − Москва: Наука, 1974. − 223 с.
10. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: В 2 ч. − Москва: Наука, 1978. − Ч. 1. − 431 с.
11. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. − Москва: Мир, 1973.
12. *Сухарев А. Г.* К вопросу о построении оптимальных квадратур для функций многих переменных // Кибернетика. − 1982. − № 1. − С. 7−11.
13. *Babenko V. F.* On the optimal error bound for cubature formulae on certain classes of continuous functions // Anal. Math. − 1977. − **3**, No. 1. − P. 3−9.
14. *Chornaya E. V.* On the optimization of weighted cubature formulae on certain classes of continuous functions // East J. approxim. − 1995. − **1**, No. 1. − P. 47−60.

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ ВЕСОВЫЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Построена последовательность асимптотически оптимальных весовых кубатурных формул на классах $H^{\omega}_{G,\rho}$, определенных мажорантой ω модуля непрерывности относительно метрики ρ. При этом область интегрирования $G \subset \mathbb{R}^n$ измерима по Жордану, весовая функция интегрируема по Лебегу, неотрицательна, ограничена и отделена от нуля, а метрика ρ удовлетворяет условию плотного вложения.

ASYMPTOTICALLY OPTIMAL WEIGHT CUBIC FORMULAS FOR SOME CLASSES OF FUNCTIONS OF MANY VARIABLES

A sequence of asymptotically optimal weight cubic formulas on the $H^{\omega}_{G,\rho}$ classes is constructed. The classes are defined by the majorant ω of the continuity modulus concerning the metric ρ. In addition the integration region $G \subset \mathbb{R}^n$ is Jordan measurable, the weight function is Lebesgue integrable, bounded and separated from zero, and metric ρ satisfies the conditions of dense imbedding.

Дніпродзерж. держ. техн. ун-т, Дніпродзержинськ

Одержано
04.04.05