УДК 517.956

Р. В. Андрусяк

ГЛОБАЛЬНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ОБЕРНЕНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ СТЕФАНА

Розглянуто задачу Стефана для лінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку з невідомими коефіцієнтами в правій частині. Із застосуванням теореми Банаха про нерухому точку та методу покрокової побудови розв'язку, доведено існування єдиного узагальненого розв'язку задачі на як завгодно великому часовому інтервалі.

Задачі з невідомими границями описують широкий клас процесів, що виникають у механіці твердого тіла та рідини, фізиці, хімії, оптимальному керуванні тощо. Такі задачі для параболічних та еліптичних рівнянь називають задачами Стефана. Детальний огляд літератури з цього питання наведено в [2, 11]. Однак багато математичних моделей проблем газової динаміки, аеропружності, електродинаміки, геофізики, теплопровідності (гіперболічна модель теплопереносу) зводиться до розв'язання задач з невідомими границями для гіперболічних рівнянь і систем [6, 9–11].

Різні варіанти обернених гіперболічних задач розглядались багатьма авторами. Загальна методологія та конкретні постановки, огляд літератури наведені, зокрема, в [7].

У цій роботі розглядаємо задачу про визначення розв'язку гіперболічної системи рівнянь із частинними похідними, в якій невідомими також є коефіцієнти правої частини системи та межа області. При доведенні теорем існування і єдиності локального та глобального розв'язків задачі використовуємо методику досліджень, наведених у [4, 8]. Деякі питання локальної розв'язності обернених гіперболічних задач Стефана вивчались у роботах [1, 3, 5].

1. Формулювання задачі. У статті використано такі позначення:

$$u(x,t) := (u_1(x,t),\dots,u_n(x,t)) \in \mathbb{R}^n, \qquad a^u(t) := (a_1^u(t), a_2^u(t)) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(a^u(t),t) := \big(u(a_1^u(t),t),\ u(a_2^u(t),t)\big) \in \mathbb{R}^{2n}, \qquad g(x) := (g_1(x),\dots,g_n(x)) \in \mathbb{R}^n,$$

$$a^0 := (a_1^0, a_2^0) \in \mathbb{R}^2, \qquad g(a^0) := (g(a_1^0), g(a_2^0)) \in \mathbb{R}^{2n}, \qquad \zeta := (\zeta_1,\zeta_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\omega^k := (\omega_1^k,\dots,\omega_n^k) \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1,2, \qquad \omega := (\omega^1,\omega^2) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

В області $G_T^u = \{(x,t)\in\mathbb{R}^2 : 0 < t < T,\ a_1^u(t) < x < a_2^u(t),\ a_1^u(t) < a_2^u(t)\}$ розглядаємо лінійну систему рівнянь із частинними похідними

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x,t)u_j + f_i(t)b_i(x,t) + c_i(x,t), \quad i = 1,\dots,n. \tag{1}$$

При цьому множники $f_i(t)$ і межі $a_k^u(t)$ області G_T^u не є наперед визначені, але $a_k^u(t)$ задовольняють систему диференціальних рівнянь

$$\frac{da_k^u(t)}{dt} = h_k(t, a^u(t), u(a^u(t),t)), \qquad k = 1,2. \tag{2}$$

Накладемо початкові, граничні умови та додаткову умову перевизначення

$$a_k^u(0) = a_k^0, \qquad k = 1,2, \qquad a_1^0 < a_2^0, \tag{3}$$

$$u_i(x,0) = g_i(x), \qquad i = 1,\dots,n, \qquad a_1^0 \le x \le a_2^0, \tag{4}$$

$$u_i(a_k^u(t),t) = H_k^i(a^u(t),t), \qquad k = 1,2, \qquad i \in I_k, \tag{5}$$

$$u_i(\psi(t),t) = \beta_i(t), \qquad i = 1,\dots,n,$$

$$(\psi(t),t) \in G_T^u, \qquad 0 \le t \le T, \qquad \psi(0) \in (a_1^0, a_2^0), \tag{6}$$

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2005. – 48, № 4. – С. 100-112.

де $I_1 = \{i : \lambda_i(a_1^0, 0) > h_1(0, a^0, g(a^0))\}$, $I_2 = \{i : \lambda_i(a_2^0, 0) < h_2(0, a^0, g(a^0))\}$.

Припускаємо, що

$$\lambda_i(a_k^0, 0) \neq h_k(0, a^0, g(a^0)), \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad k = 1, 2. \tag{7}$$

2. Узагальнений розв'язок. Нехай $\varphi_i(\tau; x, t)$, $i = 1, \ldots, n$, – характеристики системи (1), які отримуємо як розв'язки задач Коші $\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi, \tau)$, $\xi(t) = x$. Припускаючи, що

$$\lambda_i(a_k^u(t), t) \neq h_k(t, a^u(t), u(a^u(t), t)), \quad k = 1, 2, \quad i = 1, \ldots, n, \quad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

й інтегруючи рівняння (1) уздовж відповідних характеристик, отримуємо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i(x, t) = \vartheta_i(x, t; u) + \int\limits_{\chi_i(x,t;u)}^{t} \Big(\sum_j a_{ij}(\varphi_i(\tau; x, t), \tau) u_j(\varphi_i(\tau; x, t), \tau) +$$

$$+ f_i(\tau) b_i(\varphi_i(\tau; x, t), \tau) + c_i(\varphi_i(\tau; x, t), \tau) \Big) \, d\tau, \tag{9}$$

де $\chi_i(x, t; u) = \min\{\tau : (\varphi_i(\tau; x, t), \tau) \in G_T^u\}$,

$$\vartheta_i(x, t; u) = \begin{cases} g_i(\varphi_i(0; x, t)), & \chi_i(x, t; u) = 0, \\ H_k^i(a^u(\chi_i(x, t; u)), \chi_i(x, t; u)), & \chi_i(x, t; u) > 0, \\ & \varphi_i(\chi_i(x, t; u); x, t) = a_k^u(\chi_i(x, t; u)). \end{cases}$$

Інтегруючи (2), отримуємо систему інтегральних рівнянь

$$a_k^u(t) = a_k^0 + \int\limits_0^t h_k(\tau, a^u(\tau), u(a^u(\tau), \tau)) \, d\tau. \tag{10}$$

Припускаючи, що

$$\chi_i(\psi(t), t; u) = 0, \tag{11}$$

$$b_i(\psi(t), t) \neq 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

врахувавши умову перевизначення (6), виводимо систему інтегральних рівнянь

$$f_i(t) = \frac{1}{b_i(\psi(t), t)} \Big\{ \beta_i'(t) - \sum_j a_{ij}(\psi(t), t) \beta_j(t) - c_i(\psi(t), t) +$$

$$+ g_i'(\varphi_i(0; \psi(t), t)) \big[\lambda_i(\psi(t), t) - \psi'(t)\big] \exp\Big(- \int\limits_0^t \lambda_{ix}'(\varphi_i(\sigma; \psi(t), t), \sigma) \, d\sigma \Big) +$$

$$+ \int\limits_0^t \Big(\sum_j \Big[a_{ijx}'(\varphi_i(\tau; \psi(t), t), \tau) \, u_j(\varphi_i(\tau; \psi(t), t), \tau) + a_{ij}(\varphi_i(\tau; \psi(t), t), \tau) \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial x} u_j(\varphi_i(\tau; \psi(t), t), \tau) \Big] + f_i(\tau) b_{ix}'(\varphi_i(\tau; \psi(t), t), \tau) + c_{ix}'(\varphi_i(\tau; \psi(t), t), \tau) \Big) \times$$

$$\times \big[\lambda_i(\psi(t), t) - \psi'(t)\big] \exp\Big(- \int\limits_\tau^t \lambda_{ix}'(\varphi_i(\sigma; \psi(t), t), \sigma) \, d\sigma \Big) \, d\tau \Big\}. \tag{13}$$

Продиференціювавши рівність (9) за x, отримаємо

$$\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x} = \vartheta_i'(x,t;u,f) + \int\limits_{\chi_i(x,t;u)}^{t} \Bigg(\sum_j \Big[a_{ijx}'(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) u_j(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) +$$

$$+ a_{ij}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) \frac{\partial}{\partial x} u_j(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) \Big] + f_i(\tau) b_{ix}'(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) +$$

$$+ c_{ix}'(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) \Bigg) \exp\Bigg(-\int\limits_{\tau}^{t} \lambda_{ix}'(\varphi_i(\sigma;x,t),\sigma)\, d\sigma \Bigg) d\tau\,, \qquad (14)$$

де

$$\vartheta_i'(x,t;u,f) = g_i'(\varphi_i(0;x,t)) \exp\Bigg(-\int\limits_0^t \lambda_{ix}'(\varphi_i(\sigma;x,t),\sigma)\, d\sigma \Bigg),$$

якщо $\chi_i(x,t;u) = 0$;

$$\vartheta_i'(x,t;u,f) = \Bigg(\sum_\ell H_{ka_\ell}^{i\prime}(a^u(\eta),\eta) h_\ell(\eta, a^u(\eta), u(a^u(\eta),\eta)) + H_{kt}^{i\prime}(a^u(\eta),\eta) -$$

$$- \sum_j a_{ij}(a_k^u(\eta),\eta) u_j(a_k^u(\eta),\eta) - f_i(\eta) b_i(a_k^u(\eta),\eta) - c_i(a_k^u(\eta),\eta) \Bigg) \times$$

$$\times \frac{1}{h_k(\eta, a^u(\eta), u(a^u(\eta),\eta)) - \lambda_i(a_k^u(\eta),\eta)} \Bigg|_{\eta=\chi_i(x,t;u)} \times$$

$$\times \exp\Bigg(-\int\limits_{\chi_i(x,t;u)}^{t} \lambda_{ix}'(\varphi_i(\sigma;x,t),\sigma)\, d\sigma \Bigg),$$

якщо $\chi_i(x,t;u) > 0$, $\varphi_i(\chi_i(x,t;u);x,t) = a_k^u(\chi_i(x,t;u))$.

Враховуючи співвідношення (9), (13), (14), виводимо умови погодження 0-го та 1-го порядків між початковими умовами (3), (4), граничною умовою (5) та умовою перевизначення (6):

$$g_i(a_k^0) = H_k^i(a^0,0), \qquad k = 1,2, \qquad i \in I_k\,,$$

$$g_i(\psi(0)) = \beta_i(0), \qquad i = 1,\ldots,n\,,$$

$$g_i'(a_k^0)\big[h_k(0,a^0,g(a^0)) - \lambda_i(a_k^0,0)\big] + \sum_j a_{ij}(a_k^0,0) g_j(a_k^0) + f_i(0) b_i(a_k^0,0) +$$

$$+ c_i(a_k^0,0) = \sum_\ell H_{ka_\ell}^{i\prime}(a^0,0) h_l(0,a^0,g(a^0)) + H_{kt}^{i\prime}(a^0,0), \quad k = 1,2, \ i \in I_k\,,$$

$$g_i'(\psi(0))[\psi'(0) - \lambda_i(\psi(0),0)] + \sum_j a_{ij}(\psi(0),0)\beta_j(0) +$$

$$+ f_i(0) b_i(\psi(0),0) + c_i(\psi(0),0) = \beta_i'(0), \qquad i = 1,\ldots,n\,. \qquad (15)$$

Введемо S_T – метричний простір, що складається з трійок (u, u_x, f) таких, що $u_i(x,t)$, $u_{xi}(x,t) \in C(G_T^u)$, $i = 1,\ldots,n$; $a_k^u(t) \in C[0,T]$, $k = 1,2$, $a_1^u(t) < a_2^u(t)$; $f_i(t) \in C[0,T]$, $i = 1,\ldots,n$. Відстань між елементами простору означимо таким чином:

$$\rho((u^1,u_x^1,f^1),(u^2,u_x^2,f^2)) = \max\Big\{ \max_{k,t} \big| a_k^{u^1}(t) - a_k^{u^2}(t) \big|, \ \max_{i,x,t} \big| \bar u_i^1(x,t) -$$

$$- \bar u_i^2(x,t) \big|, \ \max_{i,x,t} \big| \bar u_{xi}^1(x,t) - \bar u_{xi}^2(x,t) \big|, \ \max_{i,t} \big| f_i^1(t) - f_i^2(t) \big| \Big\}\,,$$

де для довільного $u : G_T^u \to \mathbb{R}$ через $\overline{u}$ позначаємо функцію, що продовжує u на $\mathbb{R} \times [0,T]$ за правилом

$$\overline{u}(x,t) = u(a_1^u(t),t), \quad x < a_1^u(t); \qquad \overline{u}(x,t) = u(a_2^u(t),t), \quad x > a_2^u(t).$$

Означення. *Узагальненим розв'язком* задачі (1)–(6) називатимемо трійку ліпшицевих за всіма аргументами функцій $(u, u_x, f) \in S_T$ таких, що задовольняють рівності (9), (10), (13), (14) та умови (8), (11).

3. Локальна розв'язність задачі.

Теорема 1. *Нехай*

1°) $\lambda_i(x,t)$, $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$, $c_i(x,t) \in C^{1,0}(\mathbb{R} \times [0,T])$ *локально ліпшицеві за всіма змінними, а* λ'_{ix}, a'_{ijx}, b'_{ix}, c'_{ix} – *за змінною* x;

2°) $h_k(t,\zeta,\omega) \in C([0,T] \times \mathbb{R}^{2+2n})$ *локально ліпшицеві за всіма змінними*;

3°) $g_i(x) \in C^1([a_1^0, a_2^0])$ *разом із похідною задовольняють умову Ліпшиця з деякою спільною сталою* r;

4°) $H_k^i(\zeta,t) \in C^1(\mathbb{R}^2 \times [0,T])$ *разом із похідними локально ліпшицеві за всіма змінними*;

5°) $\psi(t)$, $\beta_i(t) \in C^1([0,T])$ *разом із похідною задовольняють умову Ліпшиця з деякими сталими* ψ_0 *і* β_0 *відповідно*;

6°) *виконуються припущення* (7), (12) *та умови узгодження* (15).

Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)–(6), *визначений на часовому проміжку* $[0,\varepsilon]$ *для* ε *достатньо малого.*

Д о в е д е н н я. Введемо $S = S(\varepsilon, \alpha, \beta, p, F, f_0, U, p^1)$ – підпростір простору S_ε, $\varepsilon \in (0,T]$, наклавши на його елементи такі обмеження:

(I) функції $(a_k^u(t) - h_k(0, a^0, g(a^0))t)$, $k = 1,2$, ліпшицеві зі сталою α;

(II) $|u_i(x,t) - \overline{g}_i(x)| \le \beta$, $i = 1,\ldots,n$, $(x,t) \in G_\varepsilon^u$;

(III) функції u_i, $i = 1,\ldots,n$, ліпшицеві за змінною x зі сталою p;

(IV) $|f_i(t)| \le F$, $i = 1,\ldots,n$, $t \in [0,\varepsilon]$;

(V) функції f_i, $i = 1,\ldots,n$, ліпшицеві зі сталою f_0;

(VI) $|u_{xi}| \le U$, $i = 1,\ldots,n$, $(x,t) \in G_\varepsilon^u$;

(VII) функції u_{xi}, $i = 1,\ldots,n$, ліпшицеві за змінною x зі сталою p^1.

На S означимо оператор A. Нехай $(u, u_x, f) \in S$, тоді $A : (u, u_x, f) \mapsto$ $\mapsto (Au, Au_x, Af)$, де $Au = (A_i u)_{i=1}^n$, $Au_x = (A_i u_x)_{i=1}^n$, $Af = (A_i f)_{i=1}^n$, $A_i u$, $A_i u_x : G_\varepsilon^{Au} \to \mathbb{R}$, $A_i f : [0,\varepsilon] \to \mathbb{R}$, а значення $A_i u$, $A_i u_x$, a_k^{Au}, $A_i f$ обчислюються за такими формулами:

$$(A_i u)(x,t) =$$
$$= \vartheta_i(x,t;\tilde{A}u) + \int\limits_{\chi_i(x,t;\tilde{A}u)}^{t} \Bigg(\sum_j a_{ij}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)(\tilde{A}_j u)(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) +$$
$$+ f_i(\tau) b_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) + c_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) \Bigg) d\tau,$$

$$a_k^{Au}(t) = a_k^0 + \int_0^t h_k(\tau, a^u(\tau), u(a^u(\tau), \tau))\, d\tau\,,$$

$$(A_i f)(t) = \frac{1}{b_i(\psi(t), t)} \left\{ \beta_i'(t) - \sum_j a_{ij}(\psi(t), t)\beta_j(t) - c_i(\psi(t), t) + \right.$$

$$+ g_i'(\varphi_i(0; \psi(t), t))[\lambda_i(\psi(t), t) - \psi'(t)] \exp\left(- \int_0^t \lambda_{ix}'(\varphi_i(\sigma; \psi(t), t), \sigma)\, d\sigma \right) +$$

$$+ \int_0^t \left(\sum_j \left[a_{ijx}'(\varphi_i(\tau; \psi(t), t), \tau)(\tilde{A}_j u)(\varphi_i(\tau; \psi(t), t), \tau) + \right.\right.$$

$$\left. + a_{ij}(\varphi_i(\tau; \psi(t), t), \tau)(\tilde{A}_j u_x)(\varphi_i(\tau; \psi(t), t), \tau) \right] +$$

$$\left. + f_i(\tau) b_{ix}'(\varphi_i(\tau; \psi(t), t), \tau) + c_{ix}'(\varphi_i(\tau; \psi(t), t), \tau) \right) \times$$

$$\left. \times [\lambda_i(\psi(t), t) - \psi'(t)] \exp\left(- \int_\tau^t \lambda_{ix}'(\varphi_i(\sigma; \psi(t), t), \sigma)\, d\sigma \right) d\tau \right\},$$

$$(A_i u_x)(x, t) = \vartheta_i'(x, t; Au, Af) +$$

$$+ \int_{\chi_i(x,t;\tilde{A}u)}^t \left(\sum_j \left[a_{ijx}'(\varphi_i(\tau; x, t), \tau)(\tilde{A}_j u)(\varphi_i(\tau; x, t), \tau) + \right.\right.$$

$$\left. + a_{ij}(\varphi_i(\tau; x, t), \tau)(\tilde{A}_j u_x)(\varphi_i(\tau; x, t), \tau) \right] + f_i(\tau) b_{ix}'(\varphi_i(\tau; x, t), \tau) +$$

$$\left. + c_{ix}'(\varphi_i(\tau; x, t), \tau) \right) \exp\left(- \int_\tau^t \lambda_{ix}'(\varphi_i(\sigma; x, t), \sigma)\, d\sigma \right) d\tau\,.$$

Тут $\tilde{A}u = (\tilde{A}_i u)_{i=1}^n$, $\tilde{A}u_x = (\tilde{A}_i u_x)_{i=1}^n$, а $\tilde{A}_i u$ та $\tilde{A}_i u_x$ є звуженнями відповідно $\bar{u}_i$ та $\bar{u}_{xi}$ на G_ε^{Au}.

Встановимо умови на параметри, за яких простір S буде інваріантним відносно дії оператора A, тобто $(Au, Au_x, Af) \in S$, якщо $(u, u_x, f) \in S$.

Нехай (u, u_x, f) – довільний елемент з S. З умови ***2***°) теореми 1 та обмежень (I), (II) простору S випливає існування сталої Ліпшиця функції $h_k(t, a^u(t), u(a^u(t), t))$ за змінними t, ζ та ω, яку позначимо через h_0. Увівши позначення $h_k^0 := h_k(0, a^0, g(a^0))$, $k = 1, 2$, $h^0 := \max_k \{|h_k^0|\}$, запишемо

$$\left| \frac{d}{dt}(a_k^{Au}(t) - h_k(0, a^0, g(a^0))t) \right| \le h_0 \max_{k'} \{\varepsilon, (|h_{k'}^0| + \alpha)\varepsilon, \beta + r(|h_{k'}^0| + \alpha)\varepsilon\}\,.$$

Тому, вимагаючи виконання нерівностей

$$\varepsilon \le \min\left\{ \beta, \frac{\beta}{r(h^0 + \alpha)} \right\}, \qquad \beta \le \frac{\alpha}{2h_0}, \qquad r \ge 1\,, \tag{16}$$

отримуємо інваріантність обмеження (I) простору S.

З припущень ***1***°), ***3***°)–***5***°) теореми та оцінок (16) отримуємо існування сталих Λ, A, B, C, H, G, Ψ та Φ таких, що $|\lambda_i(x, t)| \le \Lambda$, $|\lambda_{ix}'(x, t)| \le \Lambda$, $|a_{ij}(x, t)| \le A$, $|a_{ijx}'(x, t)| \le A$, $|b_i(x, t)| \le B$, $|b_{ix}'(x, t)| \le B$, $|c_i(x, t)| \le C$, $|c_{ix}'(x, t)| \le C$, $(x, t) \in G_\varepsilon^{Au}$, $|H_k^i(a^{Au}(t), t)| \le H$, $|H_{ka_\ell}^{i\prime}(a^{Au}(t), t)| \le H$, $\ell = 1, 2$, $|H_{kt}^{i\prime}(a^{Au}(t), t)| \le H$, $|g_i(x)| \le G$, $|g_i'(x)| \le G$, $|\psi(t)| \le \Psi$, $|\psi'(t)| \le \Psi$, $|\beta_i(t)| \le$

$\leq \Phi$, $|\beta_i'(t)| \leq \Phi$, а також сталих $\lambda_0, a_0, b_0, c_0, H_0$ таких, що $\lambda_i(x,t), a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$, $c_i(x,t)$, $(x,t) \in G_\varepsilon^{Au}$, – ліпшицеві за всіма змінними, λ_{ix}', a_{ijx}', b_{ix}', c_{ix}' – за змінною x, а $H_k^i(a^{Au}(t),t)$ разом з похідними $H_{ka_\ell}^{i\prime}(a^{Au}(t),t)$, $\ell = 1,2$, та $H_{kt}^{i\prime}(a^{Au}(t),t)$ – за змінними ζ, t з відповідними константами.

Вважаючи параметри ε та β достатньо малими, виводимо оцінку

$$\left|h_k(t, a^u(t), u(a^u(t),t)) - \lambda_i(a_k^{Au}(t),t)\right| \geq \gamma > 0, \;\; k = 1,2, \quad i = 1,\ldots,n, \quad (17)$$

яка забезпечує коректність означення оператора A.

Розглянемо обмеження (II). Нехай $(x,t) \in G_\varepsilon^{Au}$, $\chi_i(x,t;\tilde{A}u) = 0$, тоді

$$|(A_i u)(x,t) - \bar{g}_i(x)| \leq [A(G+\beta)n + FB + C]\varepsilon + r\Lambda\varepsilon.$$

Якщо ж $\chi_i(x,t;\tilde{A}u) > 0$, то

$$|(A_i u)(x,t) - \bar{g}_i(x)| \leq [A(G+\beta)n + FB + C]\varepsilon + \max\{1, h^0 + \alpha, \Lambda\}(H_0 + r)\varepsilon.$$

Підсумовуючи, для збереження властивості (II) достатньо, щоб

$$\left[A(G+\beta)n + FB + C + \max\{1, h^0 + \alpha, \Lambda\}(H_0 + r)\right]\varepsilon \leq \beta. \quad (18)$$

Розглянемо обмеження (III). Нехай $(x_s,t) \in G_\varepsilon^{Au}$, $\chi_i(x_s,t;\tilde{A}u) = 0$, $s = 1,2$. Позначимо різницю за індексом s символом Δ. Використавши лему Ґронуолла – Беллмана, виводимо оцінку

$$|\Delta(A_i u)(x_s,t)| \leq \left[a_0(G+\beta)n + Apn + Fb_0 + c_0\right]|\Delta x_s| e^{\lambda_0\varepsilon}\varepsilon + r|\Delta x_s| e^{\lambda_0\varepsilon}.$$

Якщо ж $\chi_i(x_s,t;\tilde{A}u) > 0$, $s = 1,2$, то за умови

$$(h^0 + \alpha + \Lambda)\varepsilon \leq \frac{\gamma}{2\lambda_0}, \quad (19)$$

справджується оцінка

$$|\Delta(A_i u)(x_s,t)| \leq \left[a_0(G+\beta)n + Apn + Fb_0 + c_0\right]|\Delta x_s| e^{\lambda_0\varepsilon}\varepsilon +$$

$$+ \left[A(G+\beta)n + FB + C + H_0 \max\{h^0 + \alpha, 1\}\right]\frac{2}{\gamma}|\Delta x_s| e^{\lambda_0\varepsilon}.$$

Вважаючи r достатньо великим і зменшивши ε згідно з нерівностями

$$\left[a_0(G+\beta)n + Apn + Fb_0 + c_0\right]\varepsilon \leq 1, \qquad \varepsilon \leq 1, \quad (20)$$

отримуємо умову інваріантності властивості (III)

$$e^{\lambda_0}(1 + r) \leq p. \quad (21)$$

Перейдемо до властивості (IV) простору S. Щоб задовольнити умову (11), обмежимо ε співвідношенням

$$(h^0 + \alpha + \Lambda + \Psi)\varepsilon \leq \min\{\psi(0) - a_1^0, a_2^0 - \psi(0)\}. \quad (22)$$

З припущення (12) випливає існування сталої $b > 0$ такої, що $|b_i(\psi(t),t)| \geq$ $\geq b$, $i = 1,\ldots,n$. Запишемо оцінку

$$|(A_i f)(t)| \leq \frac{1}{b}\left[\Phi(1 + An) + C + G(\Lambda + \Psi)e^{\Lambda\varepsilon} + \left(A(G + \beta + U)n +\right.\right.$$

$$\left.\left.+ FB + C\right)(\Lambda + \Psi)e^{\Lambda\varepsilon}\,\varepsilon\right].$$

Тому, якщо виконуються нерівності

$$F \ge \frac{1}{b}\left[\Phi(1 + An) + C + G(\Lambda + \Psi)\, e^{\Lambda} + 1\right], \tag{23}$$

$$\left(A(G + \beta + U)n + FB + C\right)(\Lambda + \Psi)e^{\Lambda}\varepsilon \le 1\,, \tag{24}$$

то справджується оцінка $|(A_i f)(t)| \le F,\ i = 1,\ldots,n$.

Розглянемо властивість (V). Нехай $t_s \in [0,\varepsilon],\ s = 1,2$, і припустивши, що

$$\max\{p, p^1\}\,\varepsilon \le 1\,, \tag{25}$$

отримуємо оцінку

$$|\Delta(A_i f)(t_s)| \le \left(F_1 + \frac{1}{b}(\Lambda + \Psi)^2 e^{\lambda_0 + \Lambda} r\right)|\Delta t_s|\,,$$

де F_1 – деяка стала.

Отже, для збереження властивості (V) достатньо, щоб

$$F_1 + \frac{1}{b}(\Lambda + \Psi)^2 e^{\lambda_0 + \Lambda} r \le f_0\,. \tag{26}$$

Перейдемо до обмеження (VI) простору S. Нехай $(x,t) \in G_{\varepsilon}^{Au}$. Означивши сталу h як таку, що

$$\left|h_k(t, a^{Au}(t), (Au)(a^{Au}(t), t))\right| \le h, \quad k = 1,2, \quad 0 \le t \le \varepsilon\,,$$

виводимо співвідношення

$$|(A_i u_x)(x,t)| \le \left[G + H(2h + 1) + A(G + \beta)n + FB + C\right] e^{\Lambda\varepsilon} \max\{1, \frac{1}{\gamma}\} +$$

$$+ \left(A(G + \beta + U)n + FB + C\right)e^{\Lambda\varepsilon}\varepsilon\,.$$

Тому, вимагаючи виконання нерівностей

$$U \ge \left[G + H(2h + 1) + A(G + \beta)n + FB + C\right] e^{\Lambda} \max\{1, \frac{1}{\gamma}\} + 1\,, \tag{27}$$

$$\left(A(G + \beta + U)n + FB + C\right)e^{\Lambda}\varepsilon \le 1\,, \tag{28}$$

забезпечуємо оцінку $|(A_i u_x)(x,t)| \le U,\ i = 1,\ldots,n$.

Розглянемо на завершення обмеження (VII). Нехай $(x_s, t) \in G_{\varepsilon}^{Au},\ s = 1,2$. Якщо $\chi_i(x_s, t; \tilde{A}u) = 0,\ s = 1,2$, то

$$|\Delta(A_i u_x)(x_s,t)| \le \left[r + G\lambda_0\varepsilon + \left(a_0(G + \beta + U)n + A\max\{p, p^1\}2n +\right.\right.$$

$$\left.\left. + Fb_0 + c_0\right)\varepsilon + \left(A(G + \beta + U)n + FB + C\right)\lambda_0\varepsilon^2\right]e^{\lambda_0 + \Lambda}\,|\Delta x_s|\,.$$

Дослідивши подібно випадок $\varphi_i(\chi_i(x_s,t;\tilde{A}u); x_s, t) = a_k^{Au}(\chi_i(x_s,t;\tilde{A}u)),\ s = 1,2$, за умови

$$(h^0 + \alpha + \Lambda)\varepsilon \le \frac{a_2^0 - a_1^0}{3} \tag{29}$$

і використавши співвідношення

$$|\Delta(A_i u)(x_s, t_s)| \le \left(A(G + \beta)n + FB + C + (1 + \Lambda)p\right)\max\{|\Delta x_s|, |\Delta t_s|\},$$

отримуємо умову інваріантності властивості (VII) простору S

$$\left(P_1 + \max\left\{r, \left((2Hh_0 + An)(1 + \Lambda)\frac{2}{\gamma^2} + \left(H(2h+1) + A(G + \beta)n + FB + C\right)\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\frac{2}{\gamma^3}h_0(1 + \Lambda)\right)\max\{h^0 + \alpha, 1\}p + B\max\{h^0 + \alpha, 1\}\frac{2}{\gamma^2}f_0\right\}\right)e^{\lambda_0 + \Lambda} \le p^1\,,$$

де P_1 – деяка стала.

Зауважимо, що система всіх наведених вище умов є сумісною. Справді, спершу забезпечимо виконання співвідношень (16), вибравши β, потім ε достатньо малими. Зменшимо параметри β та ε, щоб виконувалася нерівність (17) для деякого $\gamma > 0$. Далі зафіксуємо F, після чого U згідно з нерівностями (23) та (27). Тепер зафіксуємо значення p і f_0 згідно з умовами (21), (26), потім p^1 відповідно до (30). На завершення можемо при вибраних значеннях β, F, U, p, f_0 і p^1 зменшити ε, щоб забезпечити виконання співвідношень (18)–(20), (22), (24), (25), (28) та (29).

Припустимо, що вказані умови виконані, й встановимо обмеження на параметр ε, за якого означений нами оператор A є оператором стиску. Нехай $(u^s, u_x^s, f^s) \in S$, $s = 1,2$, і позначимо $\rho := \rho((u^1, u_x^1, f^1), (u^2, u_x^2, f^2))$. Справджується нерівність

$$\left|\Delta a_k^{Au^s}(t)\right| \le \int_0^t h_0 \max_{k,i}\left\{\left|\Delta a_k^{u^s}(\tau)\right|, \left|\Delta u_i^s(a_k^{u^s}(\tau), \tau)\right|\right\} d\tau \le h_0 \varepsilon \rho .$$

Оцінюючи $\left|\Delta(\overline{\tilde{A}_i u^s})(x,t)\right|$ і $\left|\Delta(\overline{\tilde{A}_i u_x^s})(x,t)\right|$, виводимо співвідношення

$$\max\left\{ \max_{i,x,t}\left|\Delta(\overline{\tilde{A}_i u^s})(x,t)\right|, \max_{i,x,t}\left|\Delta(\overline{\tilde{A}_i u_x^s})(x,t)\right| \right\} \le (1 + h_0)\rho .$$

Розглянемо різницю $\left|\Delta(\overline{A_i u^s})(x,t)\right|$. Нехай $(x,t) \in G_\varepsilon^{Au^1} \cap G_\varepsilon^{Au^2}$ і $\chi_i(x,t;\tilde{A}u^s) = 0$, $s = 1,2$, тоді

$$\left|\Delta(A_i u^s)(x,t)\right| \le \left(An(1 + h_0)\rho + B\rho\right)\varepsilon .$$

Якщо ж $\chi_i(x,t;\tilde{A}u^s) > 0$, $s = 1,2$, отримуємо оцінку

$$|\,\Delta(A_i u^s)(x,t)\,| \le \left(An(1 + h_0)\rho + B\rho\right)\varepsilon + H_0 h_0 \varepsilon\rho + \left(A(G + \beta)n + FB + \right.$$
$$\left. + C + H_0 \max\{h^0 + \alpha, 1\}\right)\frac{2}{\gamma} h_0 \varepsilon\rho .$$

Підсумовуючи, запишемо

$$\left|\Delta(\overline{A_i u^s})(x,t)\right| \le \left(An(1 + h_0)\rho + B\rho\right)\varepsilon + (H_0 + p)h_0\varepsilon\rho + \left(A(G + \beta)n + \right.$$
$$\left. + FB + C + H_0 \max\{h^0 + \alpha, 1\}\right)\frac{2}{\gamma} h_0\varepsilon\rho = (R_1 + h_0 p)\varepsilon\rho .$$

Розглядаючи різницю $\left|\Delta(A_i f^s)(t)\right|$, отримуємо оцінку

$$\left|\Delta(A_i f^s)(t)\right| \le \frac{1}{b}\left(A2n(1 + h_0)\rho + B\rho\right)(\Lambda + \Psi)e^{\Lambda}\varepsilon = R_2 \varepsilon\rho .$$

Тут R_1, R_2 – сталі, що визначаються вихідними даними задачі.

Перейдемо до розгляду $\left|\Delta(\overline{A_i u_x^s})(x,t)\right|$. Нехай $(x,t) \in G_\varepsilon^{Au^1} \cap G_\varepsilon^{Au^2}$, $\chi_i(x,t;\tilde{A}u^s) = 0$, $s = 1,2$. Тоді

$$\left|\Delta(A_i u_x^s)(x,t)\right| \le \left(A2n(1 + h_0)\rho + B\rho\right)e^{\Lambda}\varepsilon .$$

Якщо ж $\chi_i(x,t;\tilde{A}u^s) > 0$, $s = 1,2$, то справджується співвідношення

$$\left|\Delta(A_i u_x^s)(x,t)\right| \le \left\{ \frac{1}{\gamma}\left(H_0(2h + 1) + a_0(G + \beta)n + (2Hh_0 + An)\left(A(G + \beta)n + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left. + FB + C + (1 + \Lambda)p\right) + f_0 B + Fb_0 + c_0\right)\left(\max\{h^0 + \alpha, 1\}\frac{2}{\gamma} + 1\right)h_0 +$$

$$+\frac{1}{\gamma}\big((2Hh_0+An)(R_1+h_0p)+BR_2\big)+\big(H(2h+1)+A(G+\beta)n+FB+$$

$$+C\big)\frac{1}{\gamma^2}\left[R_3+(1+\Lambda)\left(\max\{h^0+\alpha,1\}\frac{2}{\gamma}+1\right)h_0^2p+h_0^2p\right]+$$

$$+\big(A(G+\beta+U)n+FB+C\big)\frac{2}{\gamma}h_0+\big(A2n(1+h_0)+B\big)\Bigg\}e^{\Lambda}\varepsilon\rho\,.$$

Тому

$$\left|\Delta(\overline{A_iu_x^s})(x,t)\right|\le\big(R_4+R_5\max\{p,p^1\}+R_6f_0\big)\varepsilon\rho\,.$$

Тут R_3, R_4, R_5, R_6 – деякі сталі, які визначаються через вихідні дані.

Підсумовуючи, врахувавши отримані нерівності, маємо

$$\rho((Au^1,Au_x^1,Af^1),(Au^2,Au_x^2,Af^2))\le$$

$$\le\max\big\{R_1+h_0p,\ R_4+R_5\max\{p,p^1\}+R_6f_0,\ R_2\big\}\,\varepsilon\rho\,.$$

Таким чином, якщо виконується умова

$$\max\big\{R_1+h_0p,\ R_4+R_5\max\{p,p^1\}+R_6f_0,\ R_2\big\}\,\varepsilon<1\,,$$

визначене нами відображення $A:S\to S$ є стискуючим. Як наслідок з теореми Банаха про нерухому точку випливає існування і єдиність в S розв'язку (u,u_x,f) рівнянь (9), (10), (13) і (14); при цьому з урахуванням обмежень на параметри простору умови (8), (11) також задовольняються. А, отже, за означенням цей розв'язок є узагальненим.

Розв'язок задачі (1)–(6) єдиний не лише в просторі S, але й без такого обмеження. Справді, припустивши існування двох розв'язків, переміщуємо початок відліку часу в точну нижню межу значень t, для яких ці розв'язки не співпадають, після чого вибираємо значення ε, F, U, p, f_0 та p^1 так, щоб обидва розв'язки потрапили в множину S, що неможливо. Теорему доведено. ◊

Наслідок 1. *Якщо* $(u,u_x,f)\in S_T$ *– узагальнений розв'язок задачі* (1)–(6), *причому* $u_i\in C^1(G_T^u)$, $i=1,\dots,n$, *і задовольняється умова перевизначення* (6), *то цей розв'язок буде класичним і справджуватиметься тотожність* $\frac{\partial}{\partial x}u_i(x,t)\equiv u_{xi}(x,t),\ (x,t)\in G_T^u,\ i=1,\dots,n$.

Наслідок 2. *Якщо межі* $a_k^u(t)$ *області* G_T^u *є відомими, то в припущеннях теореми* 1 *можна стверджувати існування єдиного класичного розв'язку задачі* (1), (4)–(6) *на достатньо малому часовому проміжку.*

4. Глобальна розв'язність задачі. Нехай існує стала h така, що $|h_k(\cdot,\cdot,\cdot)|\le h,\ k=1,2$, крім того, $h_1(\cdot,\cdot,\cdot)\le 0,\ h_2(\cdot,\cdot,\cdot)\ge 0$ на $[0,T]\times\mathbb{R}^{2+2n}$, і нехай $\lambda_i(x,t),\ i=1,\dots,n$, є неспадними за змінною x на $\Omega_\alpha^T:=\{(x,t):0\le t\le T,\ a_1^0-(h+\alpha)t\le x\le a_2^0+(h+\alpha)t\}$, де $\alpha>0$ – довільне. Припустимо існування сталої $\gamma>0$ такої, що виконується нерівність

$$|h_k(t,\zeta,\omega)-\lambda_i(x_k,t)|\ge\gamma,\quad i=1,\dots,n,\quad k=1,2,\quad 0\le t\le T\,,$$

$$a_1^0-(h+\alpha)t\le\zeta_1,x_1\le a_1^0,\qquad a_2^0\le\zeta_2,x_2\le a_2^0+(h+\alpha)t,\quad \omega\in\mathbb{R}^{2n}\,.$$

Введемо позначення. Нехай $G, H, b, \Psi, \Phi, A, \tilde{A}, B, \tilde{B}, C, \tilde{C}, \Lambda$ − сталі, які визначаються таким чином: $|g_i(x)| \le G$, $|g_i'(x)| \le G$, $x \in [a_1^0, a_2^0]$, $|H_k^i(\zeta,t)| \le H$, $|H_{k\zeta_\ell}^{i\prime}(\zeta,t)| \le H$, $|H_{kt}^{i\prime}(\zeta,t)| \le H$ на $\Omega_{\zeta\alpha}^T := \{(\zeta,t) : 0 \le t \le T,\ a_1^0 - (h+\alpha)t \le \zeta_1 \le \le a_1^0,\ a_2^0 \le \zeta_2 \le a_2^0 + (h+\alpha)t\}$, $|b_i(\psi(t),t)| \ge b$, $|\psi'(t)| \le \Psi$, $|\beta_i(t)| \le \Phi$, $|\beta_i'(t)| \le \le \Phi$, $t \in [0,T]$; $|a_{ij}(x,t)| \le A$, $|a_{ijx}'(x,t)| \le A$, $|b_i(x,t)| \le B$, $|b_{ix}'(x,t)| \le B$, $|c_i(x,t)| \le C$, $|c_{ix}'(x,t)| \le C$, $|\lambda_i(x,t)| \le \Lambda$, $(x,t) \in \Omega_\alpha^T$; $|a_{ij}(\zeta_k,t)| \le \tilde{A}$, $|b_i(\zeta_k,t)| \le \le \tilde{B}$, $|c_i(\zeta_k,t)| \le \tilde{C}$, $(\zeta,t) \in \Omega_{\zeta\alpha}^T$; Θ, Θ_1 − сталі такі, що при $t \in [0,T]$

$$|\lambda_i(\psi(t),t) - \psi'(t)| \le \Theta,$$

$$\left|\beta_i'(t) - \sum_j a_{ij}(\psi(t),t)\beta_j(t) - c_i(\psi(t),t)\right| \le \Theta_1 .$$

Також позначимо

$$\|(u,u_x,f)\|(\tau) :=$$

$$:= \max\left\{ \max_{\substack{i=1,\dots,n,\\ 0\le\theta\le\tau,\\ a_1^0-h\theta\le\xi\le a_2^0+h\theta}} |\bar{u}_i(\xi,\theta)|,\ \max_{\substack{i=1,\dots,n,\\ 0\le\theta\le\tau,\\ a_1^0-h\theta\le\xi\le a_2^0+h\theta}} |\bar{u}_{xi}(\xi,\theta)|,\ \max_{\substack{i=1,\dots,n,\\ 0\le\theta\le\tau}} |f_i(\theta)| \right\}.$$

Довільний узагальнений розв'язок $(u,u_x,f) \in S_T$ задачі (1)−(6) необхідно задовольняє співвідношення

$$\|(u,u_x,f)\|(t) \le \frac{\Theta/b+1}{1-\mu}\max\left\{G,\ H,\ (H(2h+1)+\tilde{C})\frac{1}{\gamma},\ (\Theta_1 + C\Theta T)\frac{1}{b}\right\} +$$

$$+\frac{\max\{\Theta/b,1\}}{\gamma(1-\mu)}\tilde{A}n\big(\max\{G,H\}+CT\big) +$$

$$+\frac{\max\{\Theta/b,1\}}{\gamma b(1-\mu)}\tilde{B}(\Theta_1 + C\Theta T) + \frac{\max\{\Theta/b,1\}}{1-\mu}CT +$$

$$+\frac{\max\{\Theta/b,1\}}{1-\mu}\left(\frac{1}{\gamma}\tilde{A}n + \frac{1}{\gamma b}\tilde{B}\Theta + 2\right)(A2n+B)\int_0^t \|(u,u_x,f)\|(\tau)\,d\tau$$

за умови, що $\mu := \frac{1}{\gamma b}\tilde{B}\Theta < 1$. Визначивши очевидним чином сталі W_1, W_2 й використавши лему Ґронуолла − Беллмана, виводимо оцінку

$$\|(u,u_x,f)\|(t) \le W_1 e^{W_2 T}.$$

Нехай λ_0, a_0, b_0, c_0 − сталі Ліпшиця відповідно функцій $\lambda_i(x,t)$, $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$ та $c_i(x,t)$ за всіма змінними і λ_{ix}', a_{ijx}', b_{ix}' та c_{ix}' − за змінною x на множині Ω_α^T; h_0 − стала Ліпшиця функції $h_k(t,\zeta,\omega)$ на множині $\Omega_{\zeta\alpha}^T \times \{\omega \in \mathbb{R}^{2n} : |\omega_i| \le W_1 e^{W_2 T} + \delta\}$, де $\delta > 0$ − довільне; H_0 − стала Ліпшиця функції $H_k^i(\zeta,t)$ і її перших похідних на множині $\Omega_{\zeta\alpha}^T$. Позначимо

$$\nu := \left\{ (2Hh_0 + An)(1+\Lambda)\frac{2}{\gamma^2} + \Big(H(2h+1) + A\big(W_1 e^{W_2 T} + \delta\big)n + \frac{1}{b}(\Theta_1 + \right.$$

$$\left. + \Theta W_1 e^{W_2 T} + 1)B + C\Big)\frac{2}{\gamma^3}h_0(1+\Lambda) \right\}\max\{h+\alpha,1\} + B\frac{2}{\gamma^2}\frac{1}{b}(\Lambda+\Psi)^2 .$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 та припущення першого абзацу* **п. 4**, *а також задовольняються нерівності* $\mu < 1$ *і* $\nu \le 1$.

Тоді задача (1)–(6) *має єдиний узагальнений розв'язок, визначений на часовому проміжку* $[0, T]$, *де* T *– як завгодно велике.*

Д о в е д е н н я. Розглянемо підпростір $\tilde{S}$ простору S, наклавши на функції $a_k^u(t)$, $k = 1, 2$, додаткові вимоги монотонності: $a_1^u(t)$ є незростаючою, а $a_2^u(t)$ – неспадною. Враховуючи знакосталість функцій $h_k(\cdot,\cdot,\cdot)$, ці властивості є інваріантними відносно дії оператора A.

Теорема 1 стверджує локальну розв'язність задачі (1)–(6) на часовому інтервалі $[0, \varepsilon_1]$. Зауважимо, що з монотонності $\lambda_i(x, t)$ випливають нерівності

$$|\Delta\varphi_i(\tau; x_s, t)| \le |\Delta x_s|, \qquad \exp\left(-\int_\tau^t \lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma; x, t), \sigma)\, d\sigma\right) \le 1, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Тому в співвідношеннях попереднього пункту можна знехтувати множниками $\exp\lambda_0$ та $\exp\Lambda$. Нехай $(u, u_x, f) \in \tilde{S}$ – знайдений узагальнений розв'язок. Вважаючи його значення при $t = \varepsilon_1$ початковим, отримуємо нову задачу для знаходження продовження нашого розв'язку на часовий інтервал $[\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2]$.

Подібно, побудувавши розв'язок задачі (1)–(6) на часовому проміжку $\left[0, \sum_{i=1}^{\sigma-1} \varepsilon_i\right]$, можемо продовжити його на часовий інтервал $\left[\sum_{i=1}^{\sigma-1} \varepsilon_i, \sum_{i=1}^{\sigma} \varepsilon_i\right]$, причому це продовження належатиме до простору $\tilde{S} = \tilde{S}(\varepsilon_\sigma, \alpha, \beta, p_\sigma, F, f_0^\sigma, U, p_\sigma^1)$, параметри якого визначаються співвідношеннями

$$\beta = \min\left\{\frac{\alpha}{2h_0}, \delta\right\}, \qquad F = \frac{1}{b}\left(\Theta_1 + \Theta W_1 e^{W_2 T} + 1\right), \tag{31}$$

$$U = \left(W_1 e^{W_2 T} + H(2h+1) + A\left(W_1 e^{W_2 T} + \delta\right)n + FB + C\right)\max\left\{1, \frac{1}{\gamma}\right\} + 1, \tag{32}$$

$$p_\sigma = 1 + \max\left\{p_{\sigma-1}, p_{\sigma-1}^1\right\}, \qquad f_0^\sigma = \tilde{F}_1 + \frac{1}{b}(\Lambda + \Psi)^2 \max\left\{p_{\sigma-1}, p_{\sigma-1}^1\right\}, \tag{33}$$

$$\begin{aligned} p_\sigma^1 \ge \tilde{P}_1 + \max\Bigg\{ &\max\left\{p_{\sigma-1}, p_{\sigma-1}^1\right\}, \Bigg((2Hh_0 + An)(1+\Lambda)\frac{2}{\gamma^2} + \\ &+ \left(H(2h+1) + A\left(W_1 e^{W_2 T} + \delta\right)n + FB + C\right)\frac{2}{\gamma^3} h_0 (1+\Lambda)\Bigg) \times \\ &\times \max\{h+\alpha, 1\} p_\sigma + B\frac{2}{\gamma^2} f_0^\sigma \Bigg\}; \end{aligned} \tag{34}$$

$$\varepsilon_\sigma \le \min\left\{\beta, \frac{\beta}{(h+\alpha)\max\left\{p_{\sigma-1}, p_{\sigma-1}^1\right\}}\right\}, \qquad (h + \alpha + \Lambda)\varepsilon_\sigma \le \frac{\gamma}{2\lambda_0},$$

$$\begin{aligned} &\left(A\left(W_1 e^{W_2 T} + \delta\right)n + FB + C + \max\{1, h+\alpha, \Lambda\}\left(H_0 + \right.\right. \\ &\left.\left. + \max\left\{p_{\sigma-1}, p_{\sigma-1}^1\right\}\right)\right)\varepsilon_\sigma \le \beta, \end{aligned}$$

$$\left(a_0\left(W_1 e^{W_2 T} + \delta\right)n + Ap_\sigma n + Fb_0 + c_0\right)\varepsilon_\sigma \le 1, \qquad \varepsilon_\sigma \le 1,$$

$$(h + \alpha + \Lambda + \Psi)\varepsilon_\sigma \le \min_{t\in[0,T]} \{\psi(t) - a_1^0,\, a_2^0 - \psi(t)\},$$

$$\big(A(W_1 e^{W_2 T} + \delta + U)n + FB + C\big) \max\{\Lambda + \Psi, 1\}\, \varepsilon_\sigma \le 1,$$

$$\max\{p_\sigma,\, p_\sigma^1\}\varepsilon_\sigma \le 1, \qquad (h + \alpha + \Lambda)\varepsilon_\sigma \le \frac{a_2^0 - a_1^0}{3},$$

$$\max\{\tilde R_1 + h_0 p_\sigma,\, \tilde R_4 + \tilde R_5 \max\{p_\sigma,\, p_\sigma^1\} + \tilde R_6 f_0^\sigma,\, \tilde R_2\}\, \varepsilon_\sigma < 1. \tag{35}$$

Тут сталі $\tilde F_1, \tilde P_1, \tilde R_1, \tilde R_2, \tilde R_4, \tilde R_5, \tilde R_6$ дорівнюють відповідно сталим F_1, P_1, R_1, R_2, R_4, R_5, R_6, введеним у **п. 3**, із заміною G та $G + \beta$ відповідно на $W_1 e^{W_2 T}$ і $W_1 e^{W_2 T} + \delta$.

Підставивши в нерівність (34) значення p_σ та f_0^σ, й використавши обмеження $\nu \le 1$, отримуємо співвідношення

$$p_\sigma^1 = \hat P_1 + \max\{1,\nu\}\max\{p_{\sigma-1}, p_{\sigma-1}^1\} = \hat P_1 + \max\{p_{\sigma-1}, p_{\sigma-1}^1\}. \tag{36}$$

Таким чином, зафіксувавши значення β, F та U згідно з (31), (32), й визначивши p_σ, p_σ^1 та f_0^σ відповідно до (33), (36), вибираємо параметр ε_σ, щоб задовольнялися усі співвідношення (35): $\varepsilon_\sigma = \dfrac{\Xi}{\max\{p_\sigma, p_\sigma^1\}}$, де стала Ξ не залежить від σ. Оскільки

$$\sum_{\sigma=1}^{\infty} \varepsilon_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{\Xi}{\max\{p_\sigma, p_\sigma^1\}} = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{\Xi}{\sigma \max\{1, \hat P_1\} + r} = \infty,$$

то за скінченну кількість кроків продовжимо наш розв'язок на часовий інтервал $[0, T]$ для довільного скінченного T.

Єдиність отриманого глобального розв'язку випливає з єдиності локальної розв'язності задачі (1)–(6). Теорему доведено. ◊

1. *Берегова Г. І.* Обернена гіперболічна задача Стефана // Мат. студії. – 1998. – **10**, № 1. – С. 41–53.
2. *Данилюк И. И.* Задача Стефана // Успехи мат. наук. – 1985. – **4**, № 5. – С. 133–185.
3. *Кирилич В. М.* Обернена гіперболічна задача Стефана // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Мех.-мат. – 1993. – Вип. 38. – С. 21–24.
4. *Кирилич В. М., Мышкис А. Д.* Обобщенная полулинейная гиперболическая задача Стефана на прямой // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 3. – С. 497–503.
5. *Крутиков В. С.* Об одном решении обратной задачи для волнового уравнения с нелинейными условиями в областях с подвижными границами // Прикл. математика и механика. – 1991. – **55**, № 6. – С. 1058–1062.
6. *Летавин М. И.* О корректности постановки одномерной однофазной гиперболической задачи Стефана // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 8. – С. 1395–1402.
7. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. – Москва: Наука, 1984. – 264 с.
8. *Филимонов А. М.* Достаточные условия глобальной разрешимости смешанной задачи для квазилинейных гиперболических систем с двумя независимыми переменными. – 1980. – 18 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 6-81-Деп.
9. *Шеметов Н. В.* Гиперболическая задача Стефана // Некоторые прил. функц. анализа к задачам мат. физики. – Новосибирск: Ин-т математики АН СССР, 1990. – С. 127–144.
10. *Fridman A., Hu B.* The Stefan problem for a hyperbolic heat equation // Math. Anal. and Appl. – 1989. – **138**, No. 1. – P. 249–279.
11. *Gupta S. C.* The classical Stefan problem, basic concepts, modelling and analysis. – Indian Inst. of Sci., Bangalore, India, 2003. – 999 p.

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Рассмотрена задача Стефана для линейной гиперболической системы уравнений первого порядка с неизвестными коэффициентами в правой части. Применяя теорему Банаха о неподвижной точке и метод пошагового построения решения, доказано существование единственного обобщенного решения задачи на как угодно большом отрезке времени.

GLOBAL SOLVABILITY OF STEFAN INVERSE HYPERBOLIC PROBLEM

The Stefan problem for a linear hyperbolic system of the first-order equations with unknown coefficients in the right-hand sides is considered. By use of the Banach fixed-point theorem and the step-by-step method for construction of solution, the existence of unique generalized solution to the problem is proved on the however large time interval.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
23.09.05