УДК 514.76

В. М. Кузаконь

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА СУБМЕРСИЙ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Предложен метод вычисления дифференциальных инвариантов субмерсий $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Найдены явные формулы для вычисления дифференциальных инвариантов второго порядка.*

1. Действие структурной псевдогруппы Ли. Рассмотрим субмерсии $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и псевдогруппу Γ, порождённую движениями евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и диффеоморфизмами прямой $\mathbb{R}$. В работе [2] описано продолженное действие Γ на пространствах k струй $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. В случае $k = 2$ координатами в $J^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ являются наборы (x_i, u, p_i, p_{ij}). Размерности пространств $J^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ будут равны

$$\dim J^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = n + C_{n+2}^2 .$$

Базис алгебры Ли псевдогруппы Ли Γ образует векторные поля

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n},$$

$$x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$h(u)\frac{\partial}{\partial u}, \qquad h(u) \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Дифференциальные инварианты второго порядка − это функции на $J^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, инвариантные относительно продолжения действия Γ в $J^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Алгебра Ли псевдогруппы отождествлена с алгеброй Ли контактных векторных полей [1] с производящими функциями вида

$$f = h(u) + \sum_{i=1}^n a_i f_i + \sum_{i<j} a_{ij}(p_i x_j - p_j x_i).$$

Общая формула для нахождения $X_f^{(2)}$ приведена в [1]. В частности, когда $f = h(u)$, то

$$X_h^{(2)} = h(u)\frac{\partial}{\partial u} + h'(u)\left(\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial p_{ij}} \right) + h''(u) \sum_{i,j} p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{ij}}. \tag{1}$$

В работе [2] показано, что размерность орбиты общего положения в $J^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ равна $n + C_n^2 + 3$, поэтому размерность алгебры инвариантов второго порядка равна $C_{n+2}^2 - C_n^2 - 3 = 2n - 2$.

2. Нахождение дифференциальных инвариантов второго порядка. Пусть $g(x_i, u, p_i, p_{ij})$ − дифференциальные инварианты второго порядка. Тогда g является первым интегралом для контактных векторных полей $X_f^{(2)}$ вида (1) с производящей функцией $h(u)$. Кроме того, g − инварианты группы движений. Отсюда следует, что $g = g(p_i, p_{ij})$.

Подмногообразие $(x,u,p)\big|_{p=0}$ в многообразии $J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ является орбитой псевдогруппы Г, и орбиты общего положения в пространстве $J^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ определяются своим пересечением со слоем проекции

$$J^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \to J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}).$$

Для нахождения инвариантов второго порядка фиксируем точку $(0,\,0,\,p) \in J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $\quad p = (p_1,\ldots,p_n) = 0$.

Слой F проекции $J^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \to J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ образован симметрическими тензорами $r = \| p_{ij} \|$, которые будем отождествлять с квадратичными формами на пространстве $\mathbb{R}^n$. Пересечение орбиты псевдогруппы Γ со слоем F − орбиты подгруппы H, сохраняющей данную точку p. Тем самым элементы подгруппы H – это, во-первых, вращения, сохраняющие ковектор p, а во-вторых, трансвекции, то есть преобразования вида $r \to r + tp^2$, $t \in \mathbb{R}$. Здесь через p^2 обозначен квадрат ковектора p, то есть квадратичная форма вида $\| p_i p_j \|$. Рассмотрим подпространство $\tilde{\mathbb{R}}^n$ пространства $\mathbb{R}^n$, образованное такими векторами x, что $\langle p, x\rangle = 0$. Обозначим через $\tilde{r}$ ограничение квадрики r на $\tilde{\mathbb{R}}^n$. Тогда действие группы H определяет действие подгруппы вращений, сохраняющих ковектор p на квадратичных формах $\tilde{r}$. Инварианты этого действия и определяют дифференциальные инварианты второго порядка псевдогруппы Γ. В качестве этих инвариантов (см. [2]) можно выбрать коэффициенты $I_1, I_2,\ldots, I_{n-1}$ характеристического многочлена, соответствующего $\tilde{r}$:

$$\det|\lambda\, E - \tilde{r}| = \lambda^{n-1} + I_1\, \lambda^{n-2} + \ldots + I_{n-1}.$$

Обозначим через $e_1, e_2,\ldots, e_{n-1}$ ортонормированный базис формы $\tilde{r}$ в $\tilde{\mathbb{R}}^n$. Трансвекции не меняют инварианты $I_1, I_2,\ldots, I_{n-1}$, а также собственный базис $e_1, e_2,\ldots, e_{n-1}$. Значение формы r на ковекторе p выбором трансвекции всегда можно сделать нулевым. При этом форма r перейдёт в форму

$$r_0 = r - \frac{r(p,p)}{(p,p)^2}\, p^2.$$

Значения формы r_0 на парах векторов p и e_k дают инварианты группы H. Инвариантами $I_1,\ldots, I_{n-1}$, $g_1,\ldots, g_{n-1}$ исчерпываются все инварианты второго порядка [2].

Пример. Пусть $n = 2$. Тогда прямая $\tilde{E}_2$ порождена вектором

$$e_1 = \frac{1}{|p|}(-\,p_2, p_1)$$

и квадрика $\tilde{r}$ на прямой $\tilde{E}_2$ имеет вид

$$\tilde{r}(\ell_1, e_1) = \frac{1}{|p|^2}(p_{11}p_2^2 - 2\,p_1 p_2 p_{12} + p_{22}p_1^2).$$

Учитывая инвариантность I_1 относительно векторного поля

$$X_u^{(2)} = u\,\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{2} p_i\,\frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i<j} p_{ij}\,\frac{\partial}{\partial p_{ij}},$$

находим

$$I_1 = \frac{1}{|p|^{3/2}} (p_{11} p_2^2 - 2\, p_1 p_2 p_{12} + p_{22} p_1^2)\,.$$

Соответственно получаем

$$g_1 = \frac{p_1 p_2 (p_{22} - p_{11}) + p_{12}(p_1^2 - p_2^2)}{|p|^{3/2}}\,.$$

Отметим, что инвариант I_1 вычисляет кривизну кривой семейства, а инвариант g_1 равен квадрату кривизны ортогональной траектории семейства [3].

Приведём другой метод вычисления дифференциальных инвариантов второго порядка. Опишем действие группы Ли в $J^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Рассмотрим пару (r, p), где $r = \| p_{ij} \|$ – симметрический 2-тензор, $p = \| p_i \| \neq 0$ – ковектор. Пусть Γ_2 – группа преобразований из псевдогруппы Γ, сохраняющая точку $(0,\,0,\,a) \in J^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, и действующая на слое F проекции

$$J^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to J^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : (x, u, p, r) \mapsto (x, u)\,.$$

Нетрудно видеть, что группа Γ_2 порождена вращениями $A \in SO(n)$

$$A : (r, p) \mapsto (A\, r\, A', A\, p)\,, \tag{I}$$

масштабными преобразованиями

$$(p, r) \mapsto (\lambda p, \lambda r), \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,, \tag{II}$$

и трансвекциями

$$(p, r) \mapsto (p, r - \lambda\, p^2), \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,. \tag{III}$$

Действие алгебры Ли Γ_2 эффективно, поэтому размерность пространства орбит F/Γ_2 равна

$$\dim (F/\Gamma_2) = \dim \mathrm{F} - \dim \Gamma_2 = 2n - 2\,.$$

Опишем орбиты действия группы $SO(n)$ на слое F. С этой целью представим пару (p, r) как симметрическую 2-форму $\bar{r}$ на $(n+1)$-мерном пространстве, задаваемую матрицей

$$\bar{r} = \begin{Vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} & p_1 \\ p_{21} & \cdots & p_{2n} & p_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} & p_n \\ p_1 & \cdots & p_n & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} r & p \\ p & 0 \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Каждое преобразование $A \in SO(n)$ определяет вращение

$$\bar{A} = \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \in SO(n+1)\,.$$

При этом

$$\bar{A}\, \bar{r}\, \bar{A}' = \begin{Vmatrix} A\, r\, A' & A\, p \\ A\, p & 0 \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Поэтому действие (I) эквивалентно действию (3) подгруппы $SO(n) \subset$ $\subset SO(n+1)$ на пространстве симметрических $(n+1) \times (n+1)$-матриц. Положим

$$t_1(p, r) = \mathrm{tr}\,(\bar{r}) = \mathrm{tr}\,(r),\ \ t_2(p, r) = \mathrm{tr}\,(\bar{r}^2), \ldots,\ \ t_{n+1}(p, r) = \mathrm{tr}\,(\bar{r}^{n+1})\,. \tag{4}$$

Тогда очевидно, что $t_1, \ldots, t_{n+1}$ – полная группа инвариантов действия группы $SO(n+1)$. Эти функции также инварианты действия подгруппы $SO(n)$.

Обозначим через $\lambda_1(p_1 r), \ldots, \lambda_{n+1}(p_1 r)$ собственные числа матрицы $\bar{r}$. Тогда существует ортогональное преобразование $A_{n+1}(\bar{r}) = A_{n+1} \in SO(n+1)$, приводящее матрицу $\bar{r}$ к диагональному виду

$$A_{n+1}\, \bar{r}\, A'_{n+1} = \left\| \lambda_i\, \delta_{ij} \right\|.$$

Это преобразование определено с точностью до элементов $S \in SO(n+1)$, являющихся симметриями диагональной матрицы $\left\| \lambda_i\, \delta_{ij} \right\|$, т. е. (для орбит общего положения) с точностью до элементов группы $\sum\limits_{n+1}$, порожденной преобразованиями $\sigma_{ij} \in SO(n+1)$, $i < j$, где σ_{ij} – диагональные матрицы с 1 на диагонали на всех местах, кроме i-го и j-го, где стоят -1.

Как известно, $SO(n+1) / SO(n) = S^n$.

Пусть $M = S^n \Big/ \sum\limits_{n+1}$ – пространство орбит действия группы $\sum\limits_{n+1}$ на сфере S^n. Тогда каждая функция f на M определяет $\sum\limits_{n+1}$-инвариантную функцию на S^n и $SO(n)$-инвариантную функцию на $SO(n+1)$, которую мы попрежнему будем обозначать через f.

Определяем $SO(n)$-инвариант I_f на пространстве матриц $\bar{r}$ типа (2), положив

$$I_f(\bar{r}) = f(A_{n+1}(\bar{r})). \tag{5}$$

Обозначим через $C^\infty(M)$ пространство гладких функций на n-мерной сфере S^n, инвариантных относительно действия группы $\sum\limits_{n+1}$. Тогда формула (5) дает описание инвариантов относительно действия (1). Эти функции автоматически инварианты относительно масштабных преобразований (II).

Чтобы исключить преобразования (III), достаточно рассмотреть такие пары (p, r), в которых тензор r обращается в нуль на ковекторе p. Для этого достаточно перейти к паре

$$(p, r) \mapsto (p, r_0),$$

где $r_0 = r - \dfrac{r(p,p)}{(p,p)^2}\, p^2$. Здесь $r(p,p) = \sum p_{ij} p_i p_j$; $(p,p) = \sum p_i^2$, $p^2 = \left\| p_i\, p_j \right\|$.

Итак, функции I_f^0, $f \in C^\infty(M)$, $I_f^0 = I_f(p, r_0)$, являются инвариантами группы Γ_2.

Функции $t_1^0(p,r) = t_1(p, r_0), \ldots, t_{n+1}^0(p,r) = t_{n+1}(p, r_0)$ определяют инварианты $SO(n)$-действий и действия (III), но

$$t_i^0(\lambda p, \lambda r) = \lambda^i\, t_i^0(p, r).$$

Поэтому функции $T_j(p,r) = \dfrac{t_j^0(p,r)}{(t_1^0(p,r))^j}$, $j = 1, \ldots, n+1$, являются инвариантами группы Γ_2.

Окончательно получаем следующий результат.

Теорема. *Дифференциальные инварианты* 2-*го порядка порождены функциями* $T_1(p,r), \ldots, T_{n+1}(p,r)$ *и* $I_f^0(p,r)$, *где* $f \in C^\infty(M)$.

1. *Виноградов А. В., Красильщик И. С., Лычагин В. В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1986. – 336 с.
2. *Кузаконь В. М.* Диференціальні інваріанти субмерсій многовидів // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 1999. – № 364. – С. 295–298.
3. *Кузаконь В. М., Рахула М. О.* Инварианты расслоения локально-евклидовой поверхности // Укр. геометр. сб. – 1978. – **21**. – С. 44–50.

ОБЧИСЛЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ІНВАРІАНТІВ ДРУГОГО ПОРЯДКУ СУБМЕРСІЙ ЕВКЛІДОВИХ ПРОСТОРІВ

Запропоновано метод обчислення диференціальних інваріантів субмерсій $\varphi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Встановлено явні формули для обчислення диференціальних інваріантів другого порядку.*

CALCULATION OF DIFFERENTIAL INVARIANTS OF THE SECOND-ORDER SUBMERSIONS FOR EUCLIDEAN SPACES

The method for calculation of differential invariants of submersions $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *is proposed. The explicit formulas for calculation of the second-order differential invariants are found.*

Гос. акад. пищевых технологий, Одесса

Получено 12.07.04