УДК 517.547.2

П. В. Філевич, С. І. Фединяк

ПРО ОДНЕ СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ МАКСИМУМОМ МОДУЛЯ, МАКСИМУМОМ МОДУЛЯ ПОХІДНОЇ І ЦЕНТРАЛЬНИМ ІНДЕКСОМ ДЛЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Нехай $M_f(r)$ – максимум модуля, $\nu_f(r)$ – центральний індекс трансцендентної цілої функції f, а $S_f(r)=\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\,d\theta\right)^{1/2}$. Встановлено, що $\liminf\limits_{r\to+\infty}\frac{rS_{f'}(r)}{M_f(r)\sqrt[3]{\nu_f(r)}}\ge\sqrt[6]{\frac{3}{16}}$, і доведено точність цієї нерівності.

Вступ. Нехай A – клас трансцендентних цілих функцій, $f\in A$ і

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n. \tag{1}$$

Для кожного $r>0$ покладемо $M_f(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$, $S_f(r)=\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\,d\theta\right)^{1/2}$ і нехай $\mu_f(r)=\max\{|a_n|r^n:n\ge 0\}$ – максимальний член, а $\nu_f(r)=\max\{n\ge 0:|a_n|r^n=\mu_f(r)\}$ – центральний індекс f. Приймемо також, що $K_f(r)=r\frac{M_{f'}(r)}{M_f(r)}$, $k_f(r)=r\frac{S_{f'}(r)}{M_f(r)}$.

Добре відомо (див., наприклад, [1, § 73] чи [2, § 17]), що для кожної функції $f\in A$ існує винятковa множина $E_f\subset(1,+\infty)$ скінченної логарифмічної міри така, що

$$K_f(r)\sim\nu_f(r),\qquad r\to+\infty,\qquad r\notin E_f.$$

У роботі [3] доведено, що в класі трансцендентних цілих функцій вигляду (1) і таких, що $a_n\ge 0$, $n\ge 0$, існує оцінка для $K_f(r)$ знизу через $\nu_f(r)$, яка справджується для кожної функції f з цього класу і для всіх досить великих r (тобто без виняткової множини):

$$\liminf_{r\to+\infty}\frac{K_f(r)}{\sqrt{\nu_f(r)}}\ge\sqrt{2}.$$

У розглянутому класі остання нерівність є точною [3]: існує трансцендентна ціла функція (1) така, що $a_n\ge 0$, $n\ge 0$, для якої ця нерівність перетворюється у рівність.

У цій роботі встановлено оцінку для $K_f(r)$ знизу через $\nu_f(r)$, яка виконується для кожної $f\in A$ (тобто без жодних обмежень на коефіцієнти) і для всіх достатньо великих r.

Теорема 1. *Для кожної функції $f\in A$ справджується нерівність*

$$\liminf_{r\to+\infty}\frac{K_f(r)}{\sqrt[3]{\nu_f(r)}}\ge\sqrt[6]{\frac{3}{16}}. \tag{2}$$

Оскільки $K_f(r)\ge k_f(r)$, то теорема 1 випливає з такого твердження.

Теорема 2. (***i***) *Для кожної функції* $f \in A$ *справджується нерівність*

$$\liminf_{r\to+\infty} \frac{k_f(r)}{\sqrt[3]{\nu_f(r)}} \ge \sqrt[6]{\frac{3}{16}}\,; \qquad (3)$$

(***ii***) *існує* $f \in A$, *для якої нерівність* (3) *перетворюється у рівність.*

Аналогічної до (3) оцінки для $k_f(r)$ зверху через $\nu_f(r)$ не існує, на що вказує така

Теорема 3. *Для довільної зростаючої до* $+\infty$ *на* $(-\infty,+\infty)$ *функції* α *існує ціла функція* $f \in A$ *така, що*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{k_f(r)}{\alpha(\nu_f(r))} = +\infty\,. \qquad (4)$$

Д о в е д е н н я. Теорема 3 випливає з теореми 2. Дійсно, нехай $(c_k)_{k=0}^{\infty}$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел, а $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ – зростаюча послідовність натуральних чисел така, що $k\alpha(n_k) \le \sqrt[3]{n_{k+1}}$ для кожного $k \ge 0$. Тоді на підставі леми з [4] (див. наведену нижче лему) існує $f \in A$ така, що $\nu_f(r) = n_{k+1}$ для всіх $r \in [c_k, c_{k+1})$ і $k \ge 0$. Оскільки функція $k_f(r)$ є неперервною на $(0,+\infty)$, то для кожного $k \ge 0$ існує $r_k < c_k$ таке, що $2k_f(r_k) > k_f(c_k)$. Тоді за теоремою 2 маємо, що

$$\alpha(\nu_f(r_k)) \le \alpha(n_k) = o\big(\sqrt[3]{n_{k+1}}\,\big) = o(k_f(c_k)) = o(k_f(r_k)), \qquad k \to \infty\,,$$

тобто справджується (4). ◊

Зауважимо також, що питання стосовно точності нерівності (2), на відміну від нерівності (3), залишається відкритим.

Д о в е д е н н я теореми 2. Доведемо спочатку твердження (***i***). Нехай $k \ge n \ge 1$ – цілі числа, $x^{(k)} = (x_0^{(k)}, \dots, x_{k-1}^{(k)}) \in [0,1]^k$,

$$h_{n,k}(x^{(k)}) = \frac{\left(\sum\limits_{j=0}^{k-1} j^2 (x_j^{(k)})^2 + n^2\right)^{1/2}}{\sum\limits_{j=0}^{k-1} x_j^{(k)} + 1}\,,$$

$A_{n,k} = \inf\{h_{n,k}(x^{(k)}) : x^{(k)} \in [0,1]^k\}$ і $B_n = \inf\{A_{n,k} : k \ge n\}$. Тоді нерівність (3) випливає з рівності

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{\sqrt[3]{n}} = \sqrt[6]{\frac{3}{16}}\,. \qquad (5)$$

Справді, нехай $r > 0$, $f \in A$ – ціла функція вигляду (1), $\nu = \nu_f(r)$ і $\mu = \mu_f(r)$. Використовуючи рівність Парсеваля, отримуємо

$$k_f(r) \ge \frac{\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} j^2 |a_j|^2 (r^j)^2\right)^{1/2}}{\sum\limits_{j=0}^{\infty} |a_j| r^j} = \lim_{\nu\le k\to\infty} \frac{\left(\sum\limits_{j=0}^{k} j^2 |a_j|^2 (r^j)^2\right)^{1/2}}{\sum\limits_{j=0}^{k} |a_j| r^j} =$$

$$= \lim_{\nu\le k\to\infty} \frac{\left(\sum\limits_{j=0,\, j\ne\nu}^{k} j^2 \left(\frac{|a_j| r^j}{\mu}\right)^2 + \nu^2\right)^{1/2}}{\sum\limits_{j=0,\, j\ne\nu}^{k} \frac{|a_j| r^j}{\mu} + 1} \ge B_\nu\,.$$

Звідси згідно з (5) маємо (3).

Перейдемо до доведення рівності (5). Покладемо $\ell = \left[\sqrt[3]{3n^2/2}\,\right]$. Тоді $\ell \le n-2$ для всіх $n \ge n_0$. Нехай $k \ge n \ge n_0$, $x_0^{(k)} = \ldots = x_\ell^{(k)} = 1$, $x_j^{(k)} = (\ell/j)^2$ для $j = \ell+1, \ldots, k-1$. Оскільки для довільних цілих чисел $m \ge \ell \ge 1$ виконуються нерівності

$$\frac{1}{\ell} - \frac{1}{m+1} < \sum_{j=\ell}^{m} \frac{1}{j^2} \le \frac{1}{\ell^2} + \frac{1}{\ell} - \frac{1}{m} < \frac{1}{\ell^2} + \frac{1}{\ell}, \tag{6}$$

то отримуємо

$$h_{n,k}(x^{(k)}) \le \frac{\left(\sum_{j=0}^{\ell} j^2 + p^4 \sum_{j=\ell}^{k-1} \frac{1}{j^2} + n^2\right)^{1/2}}{\sum_{j=0}^{\ell} 1 + \ell^2 \sum_{j=\ell+1}^{n-1} \frac{1}{j^2}} \le$$

$$\le \frac{\left(\frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{6} + \ell^2 + \ell^3 + n^2\right)^{1/2}}{\ell + \ell^2\left(\frac{1}{\ell+1} - \frac{1}{n}\right)} = \left(\sqrt[6]{\frac{3}{16}} + \delta_n\right)\sqrt[3]{n},$$

де, як легко перевірити, $\delta_n = o(1)$, $n \to \infty$. Отже,

$$A_{n,k} \le \left(\sqrt[6]{\frac{3}{16}} + \delta_n\right)\sqrt[3]{n} \quad \text{для всіх } k \ge n \ge n_0, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{B_n}{\sqrt[3]{n}} \le \sqrt[6]{\frac{3}{16}}. \tag{7}$$

Оскільки функція $h_{n,k}(x^{(k)})$ є неперервною на компакті $[0,1]^k$, то існує точка $y^{(k)} = (y_0^{(k)}, \ldots, y_{k-1}^{(k)}) \in [0,1]^k$ така, що $A_{n,k} = h_{n,k}(y^{(k)})$. Як легко бачити, $y_0^{(k)} = 1$. Покладемо $p = p(n,k) = \max\left\{j \in \{0, \ldots, k-1\} : y_0^{(k)} = \ldots = y_j^{(k)} = 1\right\}$. Тоді $y_0^{(k)} = \ldots = y_p^{(k)} = 1$ і $y_{p+1}^{(k)} < 1$, якщо $p < k-1$.

Зафіксуємо довільне $\eta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Згідно з (7) можемо вибрати число

$$n_1(\eta) \ge \max\left\{n_0, \frac{3}{1-\eta}\right\} \tag{8}$$

так, щоб для довільних $k \ge n \ge n_1(\eta)$ виконувались нерівності

$$A_{n,k} < \sqrt[3]{n} < \min\left\{\frac{\left(n^2 - \frac{1}{\eta^4 n}\right)^{1/2}}{2\left(\frac{1}{\eta} + 2\right)}, \left(\frac{\eta k(\eta k+1)(2\eta k+1)}{6(k+1)^2}\right)^{1/2}\right\}. \tag{9}$$

Покажемо, що

$$p(n,k) \le \eta k, \qquad k \ge n \ge n_1(\eta). \tag{10}$$

Справді, якщо $p > \eta k$ для деяких $k \ge n \ge n_1(\eta)$, то

$$A_{n_k} = h_{n,k}(y^{(k)}) \ge \frac{\left(\sum_{j=0}^{p} j^2\right)^{1/2}}{k+1} = \left(\frac{p(p+1)(2p+1)}{6(k+1)^2}\right)^{1/2} >$$

$$> \left(\frac{\eta k(\eta k+1)(2\eta k+1)}{6(k+1)^2}\right)^{1/2},$$

що суперечить нерівності (9).

Нехай $k \geq n \geq n_1(\eta)$. Тоді на підставі (8) маємо, що $k \geq \dfrac{3}{1-\eta}$, тому з нерівності (10) випливає, що $p \leq \eta k \leq k-3$. Доведемо, що

$$y_j^{(k)} \geq \frac{p^2}{j^2}, \qquad j \in \{p+1, \ldots, k-1\}. \tag{11}$$

Припустимо протилежне, тобто нехай $y_j^{(k)} < \dfrac{p^2}{j^2}$ для деякого $j \in \{p+1, \ldots, k-1\}$. Тоді, як легко бачити, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $y_j^{(k)} + \varepsilon < 1$ і $\varepsilon(p^2 + j^2) < 2(p^2 - j^2 y_j^{(k)})$. Враховуючи рівність $y_p^{(k)} = 1$, легко пересвідчитись, що остання нерівність є еквівалентною до нерівності

$$p^2 (y_p^{(k)})^2 + j^2 (y_j^{(k)})^2 > p^2 (y_p^{(k)} - \varepsilon)^2 + j^2 (y_j^{(k)} + \varepsilon)^2. \tag{12}$$

Нехай $t^{(k)} = (t_0^{(k)}, \ldots, t_{k-1}^{(k)})$, де $t_m^{(k)} = y_m^{(k)}$ для всіх $m \notin \{p, j\}$, $t_p^{(k)} = y_p^{(k)} - \varepsilon$ і $t_j^{(k)} = y_j^{(k)} + \varepsilon$. Тоді $t^{(k)} \in [0,1]^k$ і з огляду на (12) отримуємо $h_{n,k}(y^{(k)}) > h_{n,k}(t^{(k)})$, що суперечить означенню точки $y^{(k)}$.

Далі доведемо, що

$$y_j^{(k)} \leq \frac{(p+1)^2}{j^2} y_{p+1}^{(k)}, \qquad j \in \{p+2, \ldots, k-1\}. \tag{13}$$

Припустимо, що (13) не виконується, тобто $y_j^{(k)} > \dfrac{(p+1)^2}{j^2} y_{p+1}^{(k)}$ для деякого $j \in \{p+2, \ldots, k-1\}$. Тоді існує $\varepsilon > 0$, для якого $y_{p+1}^{(k)} + \varepsilon \leq 1$, $y_j^{(k)} - \varepsilon \geq 0$ і $\varepsilon((p+1)^2 + j^2) < 2(j^2 y_j^{(k)} - (p+1)^2 y_{p+1}^{(k)})$. Остання нерівність, як легко перевірити, еквівалентна до такої:

$$(p+1)^2 (y_{p+1}^{(k)})^2 + j^2 (y_j^{(k)})^2 > (p+1)^2 (y_{p+1}^{(k)} + \varepsilon)^2 + j^2 (y_j^{(k)} - \varepsilon)^2. \tag{14}$$

Нехай $s^{(k)} = (s_0^{(k)}, \ldots, s_{k-1}^{(k)})$, де $s_m^{(k)} = y_m^{(k)}$ для всіх $m \notin \{p+1, j\}$, $s_{p+1}^{(k)} = y_{p+1}^{(k)} + \varepsilon$, і $s_j^{(k)} = y_j^{(k)} - \varepsilon$. Тоді $s^{(k)} \in [0,1]^k$ і з огляду на (14) отримуємо $h_{n,k}(y^{(k)}) > h_{n,k}(s^{(k)})$, що також суперечить означенню $y^{(k)}$.

Скориставшись (11), (13) і (6), для всіх $k \geq n \geq n_1(\eta)$ отримуємо

$$A_{n,k} = h_{n,k}(y^{(k)}) \geq \frac{\left(\sum\limits_{j=0}^{p} j^2 + p^4 \sum\limits_{j=p+1}^{k-1} \dfrac{1}{j^2} + n^2 \right)^{1/2}}{\sum\limits_{j=0}^{p} 1 + (p+1)^2 \sum\limits_{j=p+1}^{k-1} \dfrac{1}{j^2} + 1} >$$

$$> \frac{\left(\dfrac{p(p+1)(2p+1)}{6} + p^4 \left(\dfrac{1}{p+1} - \dfrac{1}{k} \right) + n^2 \right)^{1/2}}{p + 2 + (p+1)^2 \left(\dfrac{1}{(p+1)^2} - \dfrac{1}{p+1} \right)} \geq$$

$$\geq \frac{\left(\dfrac{p^3}{3} + p^4 \left(\dfrac{1}{p+1} - \dfrac{1}{k} \right) + n^2 \right)^{1/2}}{2(p+2)}. \tag{15}$$

Далі покажемо, що

$$\eta p(n,k) \ge 1, \qquad k \ge n \ge n_1(\eta). \tag{16}$$

Припустимо протилежне, тобто нехай $\eta p(n,k) < 1$ для деяких $k \ge n \ge n_1(\eta)$. Тоді з (15) випливає, що

$$A_{n,k} > \frac{\left(-\frac{p^4}{n} + n^2\right)^{1/2}}{2(p+2)} \ge \frac{\left(n^2 - \frac{1}{\eta^4 n}\right)^{1/2}}{2\left(\frac{1}{\eta} + 2\right)},$$

а це суперечить (9).

Зважаючи на (15), (16) і (10), для довільних $k \ge n \ge n_1(\eta)$ отримаємо

$$A_{n,k} \ge \frac{\left(\frac{p^3}{3} + p^3 \frac{p}{p+1} - p^3 \frac{p}{k} + n^2\right)^{1/2}}{2p\left(1 + \frac{2}{p}\right)} \ge \frac{\left(\frac{p^3}{3} + p^3 \frac{\frac{1}{\eta}}{\frac{1}{\eta}+1} - p^3\eta + n^2\right)^{1/2}}{2p(1+2\eta)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{p^3}{3} + p^3 \frac{1-\eta-\eta^2}{1+\eta} + n^2\right)^{1/2}}{2p(1+2\eta)} \ge \left(\frac{1-\eta-\eta^2}{(1+\eta)(1+2\eta)^2}\right)^{1/2} \frac{\left(\frac{p^3}{3} + p^3 + n^2\right)^{1/2}}{2p} \ge$$

$$\ge \left(\frac{1-\eta-\eta^2}{(1+\eta)(1+2\eta)^2}\right)^{1/2} \min_{t\in(0,+\infty)} \left(\frac{t}{3} + \frac{n^2}{4t^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{1-\eta-\eta^2}{(1+\eta)(1+2\eta)^2}\right)^{1/2} \sqrt[6]{\frac{3}{16}} \cdot \sqrt[3]{n}.$$

Оскільки число $\eta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ є довільним, то маємо

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{B_n}{\sqrt[3]{n}} \ge \sqrt[6]{\frac{3}{16}}. \tag{17}$$

Комбінуючи (17) і (7), отримуємо (5). Першу частину теореми 2 доведено.

Перейдемо тепер до доведення твердження (***ii***). Скористаємось такою лемою.

Лема [4]. *Нехай* (n_k) *– зростаюча послідовність невід'ємних цілих чисел, а* (c_k) *– зростаюча до* $+\infty$ *послідовність додатних чисел. Якщо* (a_n) *– комплексна послідовність така, що* $a_0 = \ldots = a_{n_0-1} = 0$, $a_{n_0} \ne 0$, *і для всіх* $k \ge 0$ *маємо*

$$|a_{n_{k+1}}| = |a_{n_0}| \prod_{j=0}^{k} \frac{1}{c_j^{n_{j+1}-n_j}}, \qquad |a_n| \le |a_{n_k}| c_k^{n_k - n}, \quad n \in (n_k, n_{k+1}),$$

то степеневий ряд (1) *з коефіцієнтами* a_n *задає цілу функцію* f, *для якої:*

(***i***) $\nu_f(r) = n_0$ *для всіх* $r \in (0, c_0)$;

(***ii***) $\nu_f(r) = n_{k+1}$ *для всіх* $r \in [c_k, c_{k+1})$ *і* $k \ge 0$.

Розглянемо які-небудь послідовності $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ і $(p_k)_{k=0}^{\infty}$ цілих чисел, які задовольняють умови:

1) $n_0 = 0 < p_0 < n_1 < p_1 < \ldots$;

2) $n_k^3 < p_k$ для всіх $k \ge 0$;

3) $n_{k+1}^2 = \frac{2}{3} p_k^3$ для всіх $k \ge 0$.

Нехай $c_0 = 1$ і $c_{k+1} = n_{k+1}c_k$ для всіх $k \ge 0$. Покладемо

$$a_0 = a_{n_0} = 1, \qquad a_{n_{k+1}} = \prod_{j=0}^{k} \frac{1}{c_j^{n_{j+1}-n_j}}, \qquad k \ge 0, \tag{18}$$

і нехай для всіх $k \ge 0$

$$a_n = a_{n_k} c_k^{n_k - n}, \quad n \in (n_k, p_k]; \;\; a_n = \left(\frac{p_k}{n}\right)^2 a_{n_k} c_k^{n_k - n}, \quad n \in (p_k, n_{k+1}). \tag{19}$$

Розглянемо степеневий ряд (1) з так означеними коефіцієнтами a_n. За лемою цей ряд задає цілу функцію f, для якої

$$\nu_f(c_k) = n_{k+1}, \qquad \mu_f(c_k) = a_{n_{k+1}} c_k^{n_{k+1}} = a_{n_k} c_k^{n_k}, \qquad k \ge 0. \tag{20}$$

Використовуючи (18), (19) і (20), легко показати, що

$\forall k \ge 0, \quad \forall n \ge n_{k+1}$:

$$a_n c_k^n \le \mu_f(c_k)\left(\frac{c_k}{c_{k+1}}\right)^{n-n_{k+1}} = \mu_f(c_k)\left(\frac{1}{n_{k+1}}\right)^{n-n_{k+1}}. \tag{21}$$

Врахувавши (21), для всіх $k \ge 0$ отримуємо

$$\sum_{n>n_{k+1}} n^2 a_n^2 c_k^{2n} \le \mu_f^2(c_k)\sum_{j\ge1}\frac{(n_{k+1}+j)^2}{n_{k+1}^{2j}} = \mu_f^2(c_k)\sum_{j\ge1}\left(\frac{1}{n_{k+1}^{2j-2}} + \frac{2j}{n_{k+1}^{2j-1}} + \frac{j^2}{n_{k+1}^{2j}}\right) \le$$

$$\le \mu_f^2(c_k)\left(\sum_{j\ge1}\frac{1}{4^{j-1}} + 2\sum_{j\ge1}\frac{j}{2^{2j-1}} + \sum_{j\ge1}\frac{j^2}{4^j}\right) < 6\mu_f^2(c_k). \tag{22}$$

Далі, для всіх $k \ge 0$ маємо

$$\sum_{n<n_k} n^2 a_n^2 c_k^{2n} \le n_k^3 \mu_f^2(c_k) \le p_k \mu_f^2(c_k). \tag{23}$$

Крім того, згідно з (19), (20) і (6) при $k \to \infty$ отримуємо

$$\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}} n^2 a_n^2 c_k^{2n} = \mu_f^2(c_k)\left(\sum_{n=n_k}^{p_k} n^2 + p_k^4 \sum_{n=p_k+1}^{n_{k+1}-1}\frac{1}{n^2} + n_{k+1}^2\right) <$$

$$< \mu_f^2(c_k)\left(\frac{p_k(p_k+1)(2p_k+1)}{6} + p_k^2 + p_k^3 + n_{k+1}^2\right) \le$$

$$\le (3 + o(1))\mu_f^2(c_k) n_{k+1}^2. \tag{24}$$

Отже, на підставі (22), (23) і (24)

$$c_k^2 S_f^2(c_k) \le (3 + o(1))\mu_f^2(c_k)\nu_f^2(c_k), \qquad k \to \infty. \tag{25}$$

Крім того, скориставшись (6), при $k \to \infty$ маємо

$$M_f(c_k) \ge \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}} a_n c_k^n = \mu_f(c_k)\left(\sum_{n=n_k}^{p_k} 1 + p_k^2 \sum_{n=p_k+1}^{n_{k+1}-1}\frac{1}{n^2} + 1\right) \ge$$

$$\ge \mu_f(c_k)\left(p_k - n_k + p_k^2\left(\frac{1}{p_k+1} - \frac{1}{n_{k+1}}\right)\right) \ge$$

$$\ge (2 + o(1))\mu_f(c_k) p_k = \left(2\sqrt[3]{\frac{3}{2}} + o(1)\right)\mu_f(c_k)\nu_f^{2/3}(c_k). \tag{26}$$

Нарешті, з (25) і (26) отримуємо

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{k_f(c_k)}{\sqrt[3]{\nu_f(c_k)}} \le \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{2} = \sqrt[6]{\frac{3}{16}},$$

звідки й випливає, що для функції f нерівність (3) перетворюється у рівність. Теорему 2 повністю доведено. ◊

Зауваження. Нехай (1) – аналітична в крузі $\{z : |s| < 1\}$ функція така, що $\nu_f(r) \to +\infty$, $r \uparrow 1$. Аналіз доведення теореми 2 показує, що для такої функції маємо

$$\liminf_{r\uparrow 1} \frac{K_f(r)}{\sqrt[3]{\nu_f(r)}} \ge \sqrt[6]{\frac{3}{16}}, \qquad \liminf_{r\uparrow 1} \frac{k_f(r)}{\sqrt[3]{\nu_f(r)}} \ge \sqrt[6]{\frac{3}{16}}.$$

Друга з цих нерівностей є точною. Подібно до доведення твердження (***ii***) з теореми 2 можна довести, що існує аналітична в крузі $\{z : |s| < 1\}$ функція f така, що $\nu_f(r) \to +\infty$, $r \uparrow 1$, для якої друга з зазначених нерівностей перетворюється у рівність.

1. *Валирон Ж.* Аналитические функции. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1957. – 235 с.
2. *Стрелиц Ш. И.* Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. – Вильнюс: Минтис, 1972. – 468 с.
3. *Філевич П. В., Шеремета М. М.* Співвідношення між логарифмічною похідною і центральним індексом степеневого ряду з невід'ємними коефіцієнтами // Доп. НАН України. – 2003. – № 4. – С. 31–36.
4. *Filevych P. V.* On the slow growth of power series convergent in the unit disk // Мат. студії. – 2001. – **16**, № 2. – P. 217–221.

ОБ ОДНОМ СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ МАКСИМУМОМ МОДУЛЯ, МАКСИМУМОМ МОДУЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ И ЦЕНТРАЛЬНЫМ ИНДЕКСОМ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $M_f(r)$ *– максимум модуля,* $\nu_f(r)$ *– центральный индекс трансцендентной целой функции* f, *а* $S_f(r) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta\right)^{1/2}$. *Установлено, что* $\liminf_{r\to+\infty} \frac{r S_{f'}(r)}{M_f(r)\sqrt[3]{\nu_f(r)}} \ge \sqrt[6]{\frac{3}{16}}$, *и доказана точность этого неравенства.*

ON A RELATION BETWEEN THE MAXIMUM MODULUS, THE MAXIMUM MODULUS OF DERIVATIVE AND CENTRAL INDEX FOR ENTIRE FUNCTIONS

Let $M_f(r)$ *be the maximum modulus for transcendental entire function* f, *and* $\nu_f(r)$ *be the central index, and* $S_f(r) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta\right)^{1/2}$. *The inequality* $\liminf_{r\to+\infty} \frac{rS_{f'}(r)}{M_f(r)\sqrt[3]{\nu_f(r)}} \ge \sqrt[6]{\frac{3}{16}}$ *is established and it is proved that this inequality is exact.*

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
30.05.04