УДК 517.5

О. В. Зрум, О. Б. Скасків

НЕРІВНОСТІ ТИПУ ВІМАНА ДЛЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ВІД ДВОХ КОМПЛЕКСНИХ ЗМІННИХ З ШВИДКОКОЛИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Нехай $f(z_1,z_2)=\sum\limits_{n+m=0}^{\infty} a_{n,m} z_1^n z_2^m$ *– ціла функція,* $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}$, *а* $K(f)=\Big\{ f(z,t) = \sum\limits_{n+m=0}^{+\infty} a_{n,m} e^{2\pi i\theta_{n,m} t} : t\in[0,1]\Big\}$, *де* $(\theta_{n,m})$ *– фіксована послідовність Адамара. У статті доведено, що для кожного* $\varepsilon>0$ *майже напевно в* $K(f)$ *існує множина* $E(\varepsilon,t)\subset\mathbb{R}_+^2$,

$$\ln_2-\operatorname{meas} E_R(\varepsilon,t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{E_R(\varepsilon,t)\bigcap[1,+\infty)\times[1,+\infty)} \frac{dr}{r} = O(\ln R), \qquad R\to+\infty,$$

$E_R(\varepsilon,t)=E(\varepsilon,t)\bigcap\Delta_R$, *така, що для всіх* $r\in\mathbb{R}_+^2\setminus E(\varepsilon,t)$ *справджується нерівність* $M_f(r,t)\le \mu_f(r)\ln^{1/2}\mu_f(r)(\ln\ln\mu_f(r))^{1+\varepsilon}$, *де* $M_f(r,t)=\max\{|f(z,t)|:|z_1|=r_1,\ |z_2|=r_2\}$, $\mu_f(r)=\max\{|a_{n,m}|r_1^n r_2^m : n\ge 0,\ m\ge 0\}$, $r=(r_1,r_2)\in\mathbb{R}_+^2$.

Вступ і формулювання основного результату. Класична нерівність Вімана

$$M_f(r)\le\mu_f(r)(\ln\mu_f(r))^{1/2+\varepsilon}$$

виконується [2, с. 28] для кожної цілої функції $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ для будь-якого $\varepsilon>0$ і для всіх $r\in[r_0,+\infty)\setminus E$, де $r_0=r_0(\varepsilon)$, E має скінченну логарифмічну міру $\ln-\operatorname{meas} E \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{E\bigcap[1,+\infty)} \frac{dr}{r}<+\infty$, а $M_f(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$, $\mu_f(r)=\max\{|a_n|r^n : n\ge 0\}$.

Стосовно класичної нерівності Вімана відомий відкритий П. Леві [10] ефект (див. також [4, 7, 8]), який можна якісно описати так, що у деякому ймовірнісному просторі майже напевно (м. н.) показник $1/2$ можна замінити на $1/4$.

Дж. Стіл [13] встановив (див. також [6]), що ефект Леві справджується і в класі цілих функцій $K(f,\theta)=\Big\{ f(z,t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{i2\pi\theta_n t} : 0\le t\le 1\Big\}$, де $\theta=(\theta_n)$ – деяка фіксована послідовність Адамара, тобто послідовність натуральних чисел, що задовольняє умову $\dfrac{\theta_{n+1}}{\theta_n}\ge q>1,\ n\ge 0$.

Для цілих функцій $f(z)$ від двох комплексних змінних $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$ вигляду

$$f(z)=\sum_{n+m=0}^{+\infty} a_{n,m} z_1^n z_2^m \tag{1}$$

відомі різні варіанти нерівності Вімана (див. [1, 5, 9, 11, 12]). У цьому зв'язку на Львівському міжвузівському семінарі з теорії аналітичних функцій професори А. А. Гольдберг і М. М. Шеремета (1996 р.) ставили запитання про наявність ефектів, відкритих П. Леві та Дж. Стілом, у класі цілих функцій від декількох змінних, зображених степеневими рядами.

У статті [3] автори довели, що ефект Леві справджується у випадку аналога нерівності Вімана, встановленого для цілих функцій від двох змінних П. Фентоном [9]. Стосовно інших згаданих вище аналогів нерівності Вімана, питання на сьогодні залишається відкритим, хоча виглядає вірогідним, що й для них ефект Леві справджується.

Зазначимо лише, що (див. [3]) у випадку, коли впорядкування послідовності $\{\theta_{n,m} : (n,m) \in \mathbb{Z}_+^2\} = \{\theta_j^* : j \ge 0\}$, $\theta_{j+1}^* > \theta_j^*$, $j \ge 0$, за зростанням задовольняє умову Адамара

$$\frac{\theta_{j+1}^*}{\theta_j^*} \ge q > 1, \qquad j \ge 0, \tag{2}$$

то у випадку $q \ge 2$ послідовності дійсних і уявних частин послідовності $S = \{e^{2\pi i\theta_{n,m}t} : (m,n) \in \mathbb{Z}_+^2\}$ утворюють мультиплікативні системи і, отже, для неї згаданий вище ефект Леві (а, отже, ефект Стіла) є правильним (за теоремою з [3]). При цьому у випадку, коли виконується умова Адамара з довільним $q > 1$, послідовність $\{\cos 2\pi\theta_{n,m}t\}$ може не бути мультиплікативною системою, тому S необов'язково задовольняє умови теореми з [3].

Метою цієї статті є встановити наявність ефекту Стіла у випадку встановленого П. Фентоном аналогу нерівності Вімана та послідовності $(\theta_{n,m})$ Адамара з довільним $q > 1$.

Отже, почнемо з формулювання теореми П. Фентона [9]. Для цілої функції вигляду (1) і для $r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2$ позначимо

$$M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z_1| = r_1,\ |z_2| = r_2\},$$

$$\mu_f(r) = \max\{|a_{n,m}| r_1^n r_2^m : (n,m) \in \mathbb{Z}_+^2\}.$$

Теорема A [9]. *Для кожної цілої функції* f *вигляду* (1) *і для кожного* $\varepsilon > 0$ *існують множина* $E \subset \mathbb{R}_+^2$ *і стала* $C > 0$ *такі, що для всіх* $r \in \mathbb{R}_+^2 \setminus E$ *виконується нерівність*

$$M_f(r) \le C\mu_f(r) \ln^+ \mu_f(r) (\ln^+ \ln \mu_f(r))^{1+\varepsilon}, \tag{3}$$

при цьому

$$\ln_2\text{-}\operatorname{meas} E_R \overset{\text{def}}{=} \int_{E_R} \frac{dr_1 dr_2}{r_1 r_2} \le 2(1+\varepsilon)\ln R + O(1),\ R \to +\infty,$$

де $E_R = E \cap \Delta_R$, $\Delta_R = \{r \in \mathbb{R}_+^2 : 1 \le r_1 \le R,\ 1 \le r_2 \le R\}$.

Нехай $\theta = (\theta_{n,m})$ – послідовність натуральних чисел. На ймовірнісному просторі Штейнгауза $([0,1], A, P)$, де A – σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин [0,1], а P – міра Лебега на дійсній прямій, розглянемо клас функцій

$$K(f,\theta) = \left\{ f(z_1, z_2, t) = \sum_{n+m=0}^{+\infty} a_{n,m} e^{2\pi\theta_{n,m} ti} z_1^n z_2^m : t \in [0,1] \right\},$$

при цьому вважаємо, що $f(z) = \sum_{n+m=0}^{+\infty} a_{n,m} z_1^n z_2^m$ – ціла функція.

Доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Якщо для послідовності* $\theta = (\theta_{n,m})$ *виконується умова* (2), *то для кожного* $\delta > 0$ *і для кожної цілої функції вигляду* (1) *м. н. в* $K(f, \theta)$ *для всіх* $r \in \mathbb{R}_+^2 \setminus E(\delta, t)$ *виконується нерівність*

$$M_f(r, t) \le \mu_f(r) \ln^{1/2} \mu_f(r) (\ln \ln \mu_f(r))^{1+\delta}, \tag{4}$$

при цьому

$$\ln_2 - \operatorname{meas} E_R(\delta, t) = O(\ln R), \quad R \to +\infty, \quad E_R(\delta, t) = E(\delta, t) \bigcap \Delta_R,$$

де $M_f(r, t) = \max\{|f(z, t)| : |z_1| = r_1, \ \ |z_2| = r_2\}$.

Допоміжні твердження.

Лема 1 [13]. *Нехай* $(\theta_k)_{k=0}^{\ell}$ *– довільна послідовність натуральних чисел, для якої виконується умова Адамара* $\dfrac{\theta_{k+1}}{\theta_k} \ge q > 1$, $0 \le k \le \ell - 1$. *Для кожного* $q > 1$ *існують залежні лише від* q *додатні сталі* A_q *і* B_q *такі, що для довільних* $\{b_k : 0 \le k \le \ell\} \subset \mathbb{C}$ *і кожного* $\lambda > 0$ *виконується*

$$P\left\{ t : \left| \sum_{k=0}^{\ell} b_k e^{2\pi\theta_k t i} \right| \ge A_q \lambda S_\ell \right\} \le B_q e^{-\lambda^2},$$

де $S_\ell^2 = \sum\limits_{k=0}^{\ell} |b_k|^2$.

Лема 2. *Якщо для послідовності* $\theta = (\theta_{n,m})$ *виконується умова* (2), *то для кожного* $\beta > 0$ *існує залежна лише від* β *і* q *стала* $A_{\beta,q}$, *що для кожного* $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \ge 2$, *і будь-яких* $\{c_{n,m} : 0 \le n + m \le \ell\} \subset \mathbb{C}$ *справджується нерівність*

$$P\left\{ t : \max\left\{ \left| \sum_{n+m=0}^{\ell} c_{n,m} e^{in\psi_1 + im\psi_2} e^{2\pi\theta_{n,m} t i} \right| : \psi \in [0, 2\pi]^2 \right\} \ge \right.$$
$$\left. \ge A_{\beta,q} S_\ell \ln^{1/2} \ell \right\} \le \frac{(2\pi + 1)^2 B_q}{\ell^\beta},$$

де $S_\ell^2 = \sum\limits_{n+m=0}^{\ell} |c_{n,m}|^2$, $A_{\beta,q} = \sqrt{\beta + 4}\, A_q + 1$, *а* A_q *і* B_q *– сталі з леми* 1.

Д о в е д е н н я. З леми 1, поклавши $\lambda = \sqrt{(\beta + 4) \ln \ell}$, отримуємо

$$P\left\{ t : \left| \sum_{n+m=0}^{\ell} b_{n,m} e^{2\pi i \theta_{n,m} t} \right| \ge \sqrt{\beta + 4}\, A_q S_\ell \ln^{1/2} \ell \right\} \le \frac{B_q}{\ell^{\beta+4}}. \tag{5}$$

Нехай M – натуральне число, а $\psi_{1,j_1} = \dfrac{2\pi j_1}{M}$, $\psi_{2,j_2} = \dfrac{2\pi j_2}{M}$, $j_1, j_2 \in \{1, 2, \ldots, M\}$. Використовуючи послідовно нерівності $|u + v| \le |u| + |v|$, Коші – Буняковського та нерівність $\left|e^{ia} - e^{ib}\right| = 2\left|\sin \dfrac{a - b}{2}\right| \le |a - b|$, $a, b \in \mathbb{R}$, отримуємо

$$p(\psi, t) = \left| \sum_{n+m=0}^{\ell} c_{n,m} e^{in\psi_1} e^{im\psi_2} e^{2\pi i \theta_{n,m} t} \right| \le$$
$$\le \left| \sum_{n+m=0}^{\ell} c_{n,m} e^{in\psi_{1,j_1}} e^{im\psi_{2,j_2}} e^{2\pi i \theta_{n,m} t} \right| + \left| \sum_{n+m=0}^{\ell} c_{n,m} (e^{in\psi_1} e^{im\psi_2} - \right.$$

$$- e^{in\psi_{1,j_1}} e^{im\psi_{2,j_2}}) e^{2\pi i\theta_{n,m}t} \Big| \le \Big| \sum_{n+m=0}^{\ell} c_{n,m} e^{in\psi_{1,j_1}} e^{im\psi_{2,j_2}} e^{2\pi i\theta_{n,m}t} \Big| +$$

$$+ S_\ell \left(\sum_{n+m=0}^{\ell} \left| e^{i(n\psi_1+m\psi_2)} - e^{i(n\psi_{1,j_1}+m\psi_{2,j_2})} \right|^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \Big| \sum_{n+m=0}^{\ell} c_{n,m} e^{in\psi_{1,j_1}} e^{im\psi_{2,j_2}} e^{2\pi i\theta_{n,m}t} \Big| +$$

$$+ S_\ell \left(\sum_{n+m=0}^{\ell} \left| n(\psi_1 - \psi_{1,j_1}) + m(\psi_2 - \psi_{2,j_2}) \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Звідси для $\psi_1 \in [\psi_{1,j_1}, \psi_{1,j_1+1}]$, $\psi_2 \in [\psi_{2,j_2}, \psi_{2,j_2+1}]$ і $\ell \ge 2$ маємо

$$p(\psi, t) \le \Big| \sum_{n+m=0}^{\ell} c_{n,m} e^{in\psi_{1,j_1}} e^{im\psi_{2,j_2}} e^{2\pi i\theta_{n,m}t} \Big| +$$

$$+ S_\ell \left(\sum_{n+m=0}^{\ell} \left| \left(\frac{2\pi}{M}\right)^2 \cdot (n+m)^2 \right| \right)^{1/2} \le$$

$$\le \Big| \sum_{n+m=0}^{\ell} c_{n,m} e^{in\psi_{1,j_1}} e^{im\psi_{2,j_2}} e^{2\pi i\theta_{n,m}t} \Big| + \frac{2\pi}{M} \ell^2 S_\ell. \qquad (6)$$

Вибираючи $M = [2\pi\ell^2] + 1$, отримуємо

$$\max\{p(\psi,t) : \psi \in [0,2\pi]^2\} \le \max\left\{ \Big| \sum_{n+m=0}^{\ell} c_{n,m} e^{in\psi_{1,j_1}} e^{im\psi_{2,j_2}} e^{2\pi i\theta_{n,m}t} \Big| : \right.$$

$$\left. j_1,\ j_2 \in \{1,2,\ldots,M\} \right\} + S_\ell. \qquad (7)$$

Отже, застосовуючи в нерівності (7) нерівність (5) з $b_{n,m} = c_{n,m} e^{in\psi_{1,j_1}} e^{im\psi_{2,j_2}}$, $j_1,\ j_2 \in \{1,2,\ldots,M\}$, одержуємо

$$P\{t : \max\{p(\psi,t) : \psi \in [0,2\pi]^2\} \ge (\sqrt{\beta+4}\, A_q + 1) S_\ell \ln^{1/2} \ell\} \le$$

$$\le P\{t : \max\{p(\psi_{1,j_1}, \psi_{2,j_2}, t) : j_1,\ j_2 \in \{1,2,\ldots,M\}\} + S_\ell \ge$$

$$\ge (\sqrt{\beta+4}\, A_q + 1) S_\ell \ln^{1/2} \ell\} \le P\{t : \max\{p(\psi_{1,j_1}, \psi_{2,j_2}, t) : j_1,\ j_2 \in$$

$$\in \{1,2,\ldots,M\}\} \ge \sqrt{\beta+4}\, A_q S_\ell \ln^{1/2} \ell\} \le$$

$$\le \sum_{j_1=1}^{M} \sum_{j_2=1}^{M} P\{t : p(\psi_{1,j_1}, \psi_{2,j_2}, t) \ge \sqrt{\beta+4}\, A_q S_\ell \ln^{1/2} \ell\} \le$$

$$\le \frac{M^2 B_q}{\ell^{\beta+4}} \le \frac{(2\pi+1)^2 B_q}{\ell^\beta}, \qquad (8)$$

що й слід було довести. ◊

Д о в е д е н н я **теореми 1.** Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\#\{n \ge 1 : a_{n,m} \ne 0\} \ge 1$ і $\#\{m \ge 1 : a_{n,m} \ne 0\} \ge 1$. Тоді $\mu_f(r_1, r_2) \to \to +\infty$ при $r_1 \to +\infty$ для фіксованого $r_2 > 0$ і, навпаки, при $r_2 \to +\infty$ для фіксованого $r_1 > 0$. Справді, у протилежному випадку, нехай, наприклад, $\#\{n \ge 1 : a_{n,m} \ne 0\} = 0$ і, отже, $f(z_1, z_2) \equiv f(z_2)$ є функцією від однієї комплексної змінної і за класичною нерівністю Вімана (1) отримуємо, що зовні деякої множини E скінченної логарифмічної міри ($r_2 \notin E$) для всіх $t \in [0,1]$

$$M_f(r_1, r_2, t) \equiv M_f(r_2, t) \le \mu_f(r_2)(\ln \mu_f(r_2))^{1/2+\varepsilon}.$$

Звідси випливає нерівність (4) теореми, оскільки для $E_R = [1,R] \times ([1,R] \cap E)$

$$\iint\limits_{E_R} \frac{dr_1\, dr_2}{r_1 r_2} = \int\limits_{[1,R]\cap E} \frac{dr_2}{r_2} \cdot \ln R = O(\ln R), \qquad R \to +\infty.$$

Для $k \in \mathbb{N}$ позначимо $G_k = \{r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2 : k \le \ln \mu_f(r_1, r_2) < k+1\} \cap \cap([1,+\infty) \times [1,+\infty))$. Очевидно, що G_k − обмежена, а також за нашим припущенням $G_k \ne \varnothing$ для всіх досить великих k. Нехай $G_k^+ = \bigcup\limits_{j=k}^{+\infty} G_j$.

Нехай для цілої функції $f(z_1, z_2)$ вигляду (1) і для $r = (r_1, r_2)$, $x = (x_1, x_2)$

$$M_f(r) = \sum_{n+m=0}^{+\infty} |a_{n,m}| r_1^n r_2^m, \qquad g(x) = \ln M_f(e^{x_1}, e^{x_2}),$$

$$A_j(r) = \frac{\partial g(\ln r_1, \ln r_2)}{\partial x_j}, \qquad j \in \{1,2\}.$$

У роботі [3], власне кажучи, доведено таке твердження.

Лема 3. *Для кожного* $\delta > 0$ *існує множина* $E_1 = E_1(\delta)$ *така, що для всіх* $r \in G_{k_0}^+ \setminus E_1$

$$\max\{\{A_1(r_1, r_2), A_2(r_1, r_2)\} \le 5 \cdot 2^{1+\delta} \ln \mu_f(r)(\ln\ln \mu_f(r))^{1+\delta}, \tag{9}$$

при цьому

$$\ln_2\text{– meas}\, E_{1,R}(\delta) = O(\ln R), \quad R \to +\infty, \quad E_{1,R}(\delta) = E_1 \cap \Delta_R.$$

Продовжуючи д о в е д е н н я теореми 1, відмітимо, що $\ln_2$– – meas $\bigcup\limits_{j=1}^{k_0-1} G_j = c(k_0) < +\infty$. Отже, нехай $E_2(\delta) = E_1(\delta) \cup E(\delta) \cup \left(\bigcup\limits_{j=1}^{k_0-1} G_j\right)$, де $E(\delta)$ − виняткова множина у нерівності (3) з $\varepsilon = \delta$. Зауважимо тепер, що для $d = d(r) = C \cdot 5 \cdot 2^{2+\delta} \ln^3 \mu_f(r)(\ln\ln \mu_f(r))^{2+2\delta}$ (див. [3]) за нерівностями (9) і (3) з $\varepsilon = \delta$ для $r \notin E_2(\delta)$ маємо

$$\begin{aligned} \sum_{n+m \ge 2d} |a_{n,m}| r_1^n r_2^m &\le \frac{1}{d}(A_1(r) + A_2(r)) M_f(r) \le \\ &\le \frac{5 \cdot 2^{2+\delta}}{d} M_f(r) \ln \mu_f(r)(\ln\ln \mu_f(r))^{1+\delta} \le \\ &\le \frac{5 \cdot 2^{2+\delta}}{d} C\mu_f(r) \ln^2 \mu_f(r)(\ln\ln \mu_f(r))^{2+2\delta} = \frac{\mu_f(r)}{\ln \mu_f(r)} < \mu_f(r), \end{aligned} \tag{10}$$

де $C > 0$ − стала з нерівності (3) з $\varepsilon = \delta$. Нехай тепер $G_k^* = G_k \setminus E_2(\delta)$. Через I позначимо множину тих $k \ge k_0$, для яких $G_k^* \ne \varnothing$. Зрозуміло, що $\#I = +\infty$. Для $k \in I$ виберемо $r^{(k)} \in G_k^*$. Тоді для всіх $r \in G_k^*$

$$\mu_f(r^{(k)}) < e^{k+1} \le e\mu_f(r), \qquad \mu_f(r) < e^{k+1} < e\mu_f(r^{(k)}), \tag{11}$$

а також

$$[1,+\infty)^2 \setminus E_2(\delta) = \bigcup_{k \in I} G_k^*. \tag{12}$$

Для $k \in I$ позначимо $N_k = [2d_1(r^{(k)})]$, де $d_1(r) = C \cdot 5 \cdot 2^{2+\delta} \ln^3(e\mu_f(r)) \times$ $\times (\ln\ln(e\mu_f(r)))^{2+2\delta}$, і для $r \in G_k^*$

$$W_{N_k}(r,t) = \max\left\{ \left| \sum_{n+m \le N_k} a_{n,m} r_1^n r_2^m e^{in\psi_1 + im\psi_2} e^{2\pi i \theta_{n,m} t} \right| : \psi \in [0, 2\pi]^2 \right\}.$$

Далі міркуємо подібно, як у [3]. Нехай для вимірної множини $G \subset G_k^*$, $k \in I$,

$$\nu_k(G) = \frac{\mathrm{meas}_2(G)}{\mathrm{meas}_2(G_k^*)}, \tag{13}$$

де meas_2 − міра Лебега в $\mathbb{R}^2$. Зауважимо, що ν_k − ймовірнісна міра, означена на сім'ї вимірних за Лебегом підмножин G_k^*. Нехай $\Omega = \bigcup_{k \in I} G_k^*$ і множина $I = \{k_j : j \ge 1\} \subset \mathbb{N}$, де $k_j < k_{j+1}$, $j \ge 1$. Для вимірної підмножини $G \subset \Omega$ означимо

$$\nu(G) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k_j}} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k_{j+1} - k_j}\right) \nu_{k_{j+1}}(G \cap G_{k_j+1}^*), \tag{14}$$

де $k_0 = 0$. Зауважимо, що ν − ймовірнісна міра, означена на вимірних підмножинах Ω. На декартовому добутку $[0,1] \times \Omega$ означимо тепер ймовірнісну міру P_0, яка є прямим добутком ймовірнісних мір P і ν, тобто $P_0 =$ $= P \otimes \nu$. Нехай тепер для $k \in I$

$$F_k = \{(t,r) \in [0,1] \times \Omega : W_{N_k}(r,t) > A_{1,q} S_{N_k}(r) \ln^{1/2} N_k\},$$

$$F_k(r) = \{t \in [0,1] : W_{N_k}(r,t) > A_{1,q} S_{N_k}(r) \ln^{1/2} N_k\},$$

де $S_{N_k}^2(r) = \sum_{n+m=0}^{N_k} (|a_{n,m}| r_1^n r_2^m)^2$, а $A_{1,q}$ − стала з леми 2 при $\beta = 1$. Тоді за теоремою Фубіні на основі леми 2 з $c_{n,m} = a_{n,m} r_1^n r_2^m$ і $\beta = 1$ для $k \in I$ отримаємо

$$P_0(F_k) = \int_\Omega \left(\int_{F_k(r)} dP \right) d\nu = \int_\Omega P(F_k(r))\, d\nu \le \frac{(2\pi+1)^2 B_q}{N_k} \nu(\Omega) = \frac{(2\pi+1)^2 B_q}{N_k}.$$

Зауважимо, що $N_k > \ln^3 \mu_f(r^{(k)}) \ge k^3$. Тому $\sum_{k \in I} P_0(F_k) < +\infty$ і за лемою Бореля − Кантелі серед подій $\{F_k : k \in I\}$ з ймовірністю, що дорівнює одиниці, відбувається скінченна кількість подій. Звідси випливає, що існує $F \subset$ $\subset [0,1] \times \Omega$ така, що $P_0(F) = 1$ і для кожної точки $(t,r) \in F$ існує $k_0 = k_0(t,r)$ таке, що для всіх $k \ge k_0$, $k \in I$, виконується нерівність

$$W_{N_k}(r,t) \le A_{1,q} S_{N_k}(r) \ln^{1/2} N_k. \tag{15}$$

Через F_Ω позначимо проекцію F на Ω, тобто $F_\Omega = \{r \in \Omega : (\exists t)\ [(t,r) \in F]\}$. Тоді $\nu_k(F_\Omega \cap G_k^*) = 1$ для кожного $k \in I$. Справді, якщо би для деякого $k \in$ $\in I$, $k = k_{j+1}$, виконувалась нерівність $\nu_k(F_\Omega \cap G_k^*) = q < 1$, то для F_Ω отримали би

$$\nu(F_\Omega) = \sum_{k\in I} \nu(F_\Omega \cap G_k^*) \le \sum_{s=0, s\ne j}^{+\infty} \frac{1}{2^{k_s}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k_{s+1}-k_s}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2^{k_j}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k_{j+1}-k_j}\right)\cdot \nu_{k_{j+1}}(F_\Omega \cap G_{k_{j+1}}) =$$

$$= \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k_s}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k_{s+1}-k_s}\right) - (1-q)\frac{1}{2^{k_j}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k_{j+1}-k_j}\right) < 1 .$$

Звідси за теоремою Фубіні, застосовуючи позначення $F(r) = \{t \in [0,1] : (t, r) \in \in F\}$, маємо

$$P_0(F) = \int_{F_\Omega}\left(\int_{F(r)} dP\right) d\nu = \int_{F_\Omega} P(F(r))\, d\nu \le \nu(F_\Omega) < 1,$$

що неможливо.

Подібно для звуження F на $[0,1]$, $F_{[0,1]} = \bigcup_{r\in\Omega} F(r)$, маємо $P(F_{[0,1]}) = 1$. Тепер припустимо, що існує $F_1 \subset F_{[0,1]}$ така, що $P(F_1) = q_1 \in (0,1)$:

$$(\forall t \in F_1): \qquad \nu(F^\wedge(t)) = q_2(t) < 1, \qquad F^\wedge(t) = \{r \in \Omega : (t, r) \in F\},$$

$$(\forall t \in F_{[0,1]} \setminus F_1): \quad \nu((F_{[0,1]} \setminus F_1)^\wedge(t)) = 1 .$$

Тоді за теоремою Фубіні

$$1 = P_0(F) = \int_{F_{[0,1]}}\left(\int_{F^\wedge(t)} d\nu + \int_{(F_{[0,1]}\setminus F_1)^\wedge(t)} d\nu\right) dP = \int_{F_{[0,1]}} (q_2(t)+1)\, dP .$$

Оскільки $q_2(t) \ge 0$, то звідси $q_2(t) = 0$ м. н. Нехай $F^* = \bigcup_{t\in F_1} F^\wedge(t)$, $F^* \subset F$. Тоді

$$P_0(F^*) = \int_{F_1}\left(\int_{F^\wedge(t)} d\nu\right) dP = 0,$$

звідки отримуємо

$$1 = P_0(F \setminus F^*) \le P_0((F \setminus F_1)\times\Omega) = P(F\setminus F_1)\cdot \nu(\Omega) = 1 - q_1,$$

тобто суперечність із припущенням, що існує множина $F_1 \subset F_{[0,1]}$ міри $q_1 \in \in (0,1)$ така, що ν-міра кожного перерізу $F^\wedge(t)$, $t \in F_1$, є меншою від одиниці. Отже, існує підмножина $F_1 \subset F_{[0,1]}$ повної міри ($P(F_1) = 1$) така, що $\nu(F^\wedge(t)) = 1$ для всіх $t \in F_1$. Подібно, як і вище, доводимо, що з того, що $(\forall t \in F_1) : \nu(F^\wedge(t)) = 1$, випливає, що $(\forall k \in I) : (F^\wedge(t) \cap G_k^*) = 1$. Справді, якщо би для деякого $k \in I$, $k = k_{j+1}$, виконувалось $\nu_k(F^\wedge(t) \cap G_k^*) = q < 1$, то, як і вище, отримали би суперечність

$$\nu(F^\wedge(t)) = \sum_{k\in I} \nu(F^\wedge(t) \cap G_k^*) \le \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k_s}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k_{s+1}-k_s}\right) -$$

$$- (1-q)\frac{1}{2^{k_j}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k_{j+1}-k_j}\right) = 1 - (1-q)\frac{1}{2^{k_j}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k_{j+1}-k_j}\right) < 1 .$$

Нехай для кожних $t \in F_1$ і $k \in I$ точка $r_0^{(k)}(t) \in G_k^*$ така, що

$$W_{N_k}(r_0^{(k)}(t), t) \geq \frac{3}{4} M_k(t), \qquad M_k(t) \overset{\text{def}}{=} \sup\{W_{N_k}(r, t) : r \in G_k^*\}.$$

З того, що $(\forall k \in I) : \nu_k(F^\wedge(t) \bigcap G_k^*) = 1$, за неперервністю $W_{N_k}(r, t)$ як функції від r при фіксованому t отримуємо, що існує точка $r^{(k)}(t) \in G_k^* \bigcap F^\wedge(t)$ така, що

$$\left| W_{N_k}(r_0^{(k)}(t), t) - W_{N_k}(r^{(k)}(t), t) \right| < \frac{1}{4} M_k(t),$$

звідки

$$\frac{3}{4} M_k(t) \leq W_{N_k}(r_0^{(k)}(t), t) \leq W_{N_k}(r^{(k)}(t), t) + \frac{1}{4} M_k(t).$$

Тобто з огляду на те, що $(t, r^{(k)}(t)) \in F$, за нерівністю (15) отримуємо

$$\frac{1}{2} M_k(t) \leq W_{N_k}(r^{(k)}(t), t) \leq A_{1,q} S_{N_k}(r^{(k)}(t)) \ln^{1/2} N_k. \tag{16}$$

Зауважимо тепер, що за нерівністю (3) з $\varepsilon = \delta$ і $r^{(k)} = r^{(k)}(t)$ маємо

$$S_N^2(r^{(k)}) \leq \mu_f(r^{(k)}) M_f(r^{(k)}) \leq C \mu_f^2(r^{(k)}) \ln \mu_f(r^{(k)}) (\ln\ln \mu_f(r^{(k)}))^{1+\delta}.$$

Звідси для $t \in F_1$ і всіх $k \geq k_0(t)$, $k \in I$,

$$S_N(r^{(k)}) \leq \sqrt{C} \mu_f(r^{(k)}) \ln^{1/2} \mu_f(r^{(k)}) (\ln\ln \mu_f(r^{(k)}))^{(1+\delta)/2}. \tag{17}$$

Оскільки для $r \in G_k^*$ виконується (11), то $d_1(r^{(k)}) \geq d(r)$. Отже, для $t \in F_1$, $r \in F^\wedge(t) \bigcap G_k^*$, $k \in I$, $k \geq k_0(t)$ маємо

$$\begin{aligned} M_f(r, t) &\leq \sum_{n+m \geq 2d_1(r^{(k)})} |a_{n,m}| r_1^n r_2^m + W_{N_k}(r, t) \leq \\ &\leq \sum_{n+m \geq 2d(r)} |a_{n,m}| r_1^n r_2^m + M_k(t). \end{aligned}$$

Звідси за допомогою (10), (16), (17) для $t \in F_1$, $r \in F^\wedge(t) \bigcap G_k^*$, $k \in I$, $k \geq$ $\geq k_0(t)$ отримуємо

$$\begin{aligned} M_f(r, t) &\leq \mu_f(r) + 2A_{1,q} S_{N_k}(r^{(k)}) \ln^{1/2} N_k \leq \\ &\leq \mu_f(r) + 2A_{1,q} \sqrt{C}\, \mu_f(r^{(k)}) \ln^{1/2} \mu_f(r^{(k)}) (\ln\ln \mu_f(r^{(k)}))^{(1+\delta)/2} \times \\ &\times (c_1 + 3 \ln\ln(e\mu_f(r^{(k)})) + (2 + 2\delta) \ln\ln\ln(e\mu_f(r^{(k)})))^{1/2}, \end{aligned}$$

де $c_1 > 0$ – деяка стала. Звідси, враховуючи нерівність (14), для $t \in F_1$, $r \in F^\wedge(t) \bigcap G_k^*$, $k \in I$, $k \geq k_0(t)$ отримаємо

$$M_f(r, t) \leq c_2 \mu_f(r) (\ln \mu_f(r))^{1/2} (\ln\ln \mu_f(r))^{(1+\delta)/2}, \tag{18}$$

де $c_2 > 0$ – деяка стала. Залишається вибрати $k_1 > k_0(t)$ так, щоб для $r \in$ $\in G_{k_1}^+$ виконувалось $c_2 \leq (\ln\ln \mu_f(r))^{\delta/2}$. Звідси і з (18) отримуємо твердженняня теореми, оскільки бажана нерівність відповідно до (12) м. н. виконується (для $t \in F_1$, $P(F_1)=1$) для всіх $r \in (\bigcup_{k\in I}(G_k^* \cap F^\wedge(t)) \cap G_{k_1}^+) \setminus E(\delta) = ([1,+\infty)^2 \cap \cap G_{k_1}^+) \setminus (E_2(\delta) \cup G^* \cup E(\delta)) = [1,+\infty)^2 \setminus E_3(\delta)$, де $E_3(\delta) = E_2(\delta) \cup E(\delta) \cup G^* \cup \cup\left(\bigcup_{j=1}^{k_1-1} G_j\right)$, $G^* = \bigcup_{k\in I}(G_k^* \setminus F^\wedge(t))$, а $E(\delta)$ – винятковa множина у нерівності (3) (при $\varepsilon=\delta$) з теореми **A**. Нагадаємо, що $\nu(G_0) = \sum_{k\in I}(\nu_k(G_k^*) - \nu_k(F^\wedge(t))) = 0$, а також, що $\nu(G_0)$ визначається рівністю (14), з якої негайно випливає, що для всіх $k \in I$

$$\nu_k(G_k^* \setminus F^\wedge(t)) = \mathrm{meas}_2(G_k^* \setminus F^\wedge(t)) \cdot \frac{1}{\mathrm{meas}_2(G_k^*)} = 0\,,$$

тобто також

$$\ln_2\text{– meas}\,(G_k^* \setminus F^\wedge(t)) = \int\int_{G_k^* \setminus F^\wedge(t)} \frac{dr_1\,dr_2}{r_1 r_2} = 0\,.$$

Тому $\ln_2\text{– meas}\,(G^* \cap [1,R]^2) = 0$ і при $R \to +\infty$

$$\ln_2\text{– meas}\,E_{3,R}(\delta) \le \ln_2\text{– meas}\,E_{2,R}(\delta) + \ln_2\text{– meas}\bigcup_{j=1}^{k_1-1} G_j =$$
$$= \ln_2\text{– meas}\,E_{1,R} + \ln_2\text{– meas}\,E_{3,R} + O(1) \le (2B + 6 + 2\delta)\ln R + O(1)\,,$$

де $E_{j,R} = E_j \cap \Delta_R$. Теорему доведено. ◊

1. *Битлян И. Ф., Гольдберг А. А.* Теорема Вимана – Валирона для целых функций многих комплексных переменных // Вестн. Ленинград. ун-та. Сер. Математика, механика и астрономия. – 1959. – Вып. 2, № 13. – С. 27–41.
2. *Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В.* Целые и мероморфные функции // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундамент. направления. – Москва: ВИНИТИ, 1990. – **85**. – С. 5–186.
3. *Зрум О. В., Скасків О. Б.* Про нерівність Вімана для випадкових цілих функцій від двох змінних // Мат. студії. – 2005. – **23**, № 2. – С. 142–153.
4. *Скасків О. Б., Зрум О. В.* Про виняткову множину у нерівностях типу Вімана для цілих функцій // Мат. студії. – 2004. – **21**, № 1. – С. 13–24.
5. *Скасків О. Б., Тракало О. М.* Про класичну нерівність Вімана для цілих кратних рядів Діріхле // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 3. – С. 34–39.
6. *Філевич П. В.* Деякі класи цілих функцій, в яких майже напевне можна покращити нерівність Вімана – Валірона // Мат. студії. – 1996. – Вип. 6. – С. 59–66.
7. *Філевич П. В.* Співвідношення між максимумом модуля і максимальним членом для випадкових цілих функцій // Мат. студії. – 1997.– **7**, № 2. – С. 165–174.
8. *Erdös P., Rényi A.* On random entire function // Zastosow. mat. – 1969. – **10**. – P. 47–55.
9. *Fenton P. C.* Wiman – Valyron theory in two variables // Trans. Amer. Math. Soc. – 1995. – **347**, No. 11. – P. 4403–4412.
10. *Levy P.* Sur la croissance de fonctions entière // Bull. Soc. Math. France. – 1930. – **58**. – P. 29–59; P. 127–149.
11. *Schumitzky A.* A probabilistic approach to the Wiman – Valiron theory for entire functions of several complex variables // Complex Variables. – 1989. – **13**. – P. 85–98.
12. *Schumitzky A.* Wiman – Valiron theory for entire functions of several complex variables: Ph. D. Dissertation. – Ithaca: Cornell Univ., 1965.
13. *Steel J. M.* Sharper Wiman inequality for entire functions with rapidly oscillating coefficients // J. Math. Anal. Appl. – 1987. – **123**. –P. 550–558.

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ВИМАНА ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ С БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть $f(z_1,z_2)=\sum\limits_{n+m=0}^{\infty} a_{n,m} z_1^n z_2^m$ – *целая функция,* $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}$, *а* $K(f)=\Big\{ f(z,t) = \sum\limits_{n+m=0}^{+\infty} a_{n,m} e^{2\pi i\theta_{n,m}t} : t\in[0,1]\Big\}$, *где* $(\theta_{n,m})$ – *фиксированная последовательность Адамара. В статье доказано, что для каждого* $\varepsilon>0$ *почти наверное в* $K(f)$ *существует множество* $E(\varepsilon,t)\subset\mathbb{R}_+^2$, $\ln_2-\operatorname{meas} E_R(\varepsilon,t) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{E_R(\varepsilon,t)\bigcap[1,+\infty)\times[1,+\infty)} \frac{dr}{r} = O(\ln R)$, $R\to+\infty$, $E_R(\varepsilon,t)=E(\varepsilon,t)\bigcap\Delta_R$, *такое, что для всех* $r\in\mathbb{R}_+^2\setminus E(\varepsilon,t)$ *имеет место неравенство* $M_f(r,t)\le\mu_f(r)\ln^{1/2}\mu_f(r)(\ln\ln\mu_f(r))^{1+\varepsilon}$, *где* $M_f(r,t)=\max\{|f(z,t)|:|z_1|=r_1,|z_2|=r_2\}$, $\mu_f(r)=\max\{|a_{n,m}|r_1^n r_2^m : n\ge 0,\ m\ge 0\}$, $r=(r_1,r_2)\in\mathbb{R}_+^2$.

WIMAN'S INEQUALITIES FOR ENTIRE FUNCTIONS OF TWO COMPLEX VARIABLES WITH RAPIDLY OSCILLATING COEFFICIENTS

Let $f(z_1,z_2)=\sum\limits_{n+m=0}^{\infty} a_{n,m} z_1^n z_2^m$ *be an entire function,* $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}$ *and* $K(f)=\Big\{ f(z,t) = \sum\limits_{n+m=0}^{+\infty} a_{n,m} e^{2\pi i\theta_{n,m}t} : t\in[0,1]\Big\}$, *where* $(\theta_{n,m})$ *is a fixed Hadamard sequence. In the paper it is established that for all* $\varepsilon>0$ *almost surely in* $K(f)$ *there exists a set* $E(\varepsilon,t)\subset\mathbb{R}_+^2$, $\ln_2-\operatorname{meas} E_R(\varepsilon,t) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{E_R(\varepsilon,t)\bigcap[1,+\infty)\times[1,+\infty)} \frac{dr}{r} = O(\ln R)$, $R\to+\infty$, $E_R(\varepsilon,t)=E(\varepsilon,t)\bigcap\Delta_R$, *such that for all* $r\in\mathbb{R}_+^2\setminus E(\varepsilon,t)$ *the inequality* $M_f(r,t)\le\mu_f(r)\ln^{1/2}\mu_f(r)(\ln\ln\mu_f(r))^{1+\varepsilon}$ *holds, where* $M_f(r,t)=\max\{|f(z,t)|:|z_1|=r_1,\ |z_2|=r_2\}$, $\mu_f(r)=\max\{|a_{n,m}|r_1^n r_2^m : n\ge 0, m\ge 0\}$, $r=(r_1,r_2)\in\mathbb{R}_+^2$.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
23.09.05