

ЗАНУРЕННЯ НАПІВГРУП У НІЛЬПОТЕНТНО-ПОРОДЖЕНІ НАПІВГРУПИ

Доведено, що для довільного натурального $n \geq 2$ і для кожної напівгрупи S існує занурення S у нільпотентно-породжену напівгрупу $NG_n(S)$ індексу нільпотентності $i_{\text{nil}}(NG_n(S)) = n$. Описано відношення Гріна на напівгрупі $NG_n(S)$. Доведено, що кожна напівгрупа S занурюється в напівгрупу $NG_\infty(S)$, породжену множиною нільпотентних елементів N таку, що $i_{\text{nil}}(NG_\infty(S)) = \infty$, а також $N = \bigcup_{i=2}^{\infty} N_i$, $i_{\text{nil}}(a) = i$ для кожного $a \in N_i$. Побудовано топологічні аналоги таких конструкцій, що зберігають компактність, зліченну компактність, псевдокомпактність, а також H -замкненість, абсолютну H -замкненість, алгебраїчну замкненість і алгебраїчну h -замкненість у класі топологічних інверсних і в класі топологічних напівгруп. Побудовано конструкції занурення топологічних (інверсних) напівгруп у лінійно зв'язні нільпотентно-породжені топологічні (інверсні) напівгрупи та занурення злічених гаусдорфових топологічних (інверсних) напівгруп у зліченні зв'язні гаусдорфові нільпотентно-породжені топологічні (інверсні) напівгрупи.

1. Вступ. Дж. Гауї побудував [13] конструкцію занурення напівгруп у нільпотентно-породжені напівгрупи індексу нільпотентності 2, що зберігають такі алгебраїчні властивості напівгруп, як регулярність, ортодоксальність та інверсність. О. В. Гутік узагальнив [2] конструкцію Гауї і побудував її топологічний аналог.

У цій роботі узагальнено результати, отримані в [13] і [2]. Доведено, що для довільного натурального $n \geq 2$ і для кожної напівгрупи S існує ізоморфне занурення напівгрупи S у нільпотентно-породжену напівгрупу $NG_n(S)$ індексу нільпотентності $i_{\text{nil}}(NG_n(S)) = n$ і напівгрупа S є регулярною (ортодоксальною, інверсною) тоді й тільки тоді, коли $NG_n(S)$ – регулярна (ортодоксальна, інверсна) напівгрупа. Описано відношення Гріна на напівгрупі $NG_n(S)$. Доведено, що кожна напівгрупа S занурюється в напівгрупу $NG_\infty(S)$, породжену множиною нільпотентних елементів N , таку, що $i_{\text{nil}}(NG_\infty(S)) = \infty$, а також $N = \bigcup_{i=2}^{\infty} N_i$, $i_{\text{nil}}(a) = i$ для кожного $a \in N_i$. Показано, що напівгрупа S є регулярною (ортодоксальною, інверсною) тоді й тільки тоді, коли напівгрупа $NG_\infty(S)$ регулярна (ортодоксальна, інверсна). Побудовано топологічні аналоги цих конструкцій, що зберігають такі топологічні властивості, як компактність, зліченну компактність, псевдокомпактність, а також H -замкненість, абсолютну H -замкненість, алгебраїчну замкненість і алгебраїчну h -замкненість у класі топологічних інверсних і в класі топологічних напівгруп. Побудовано конструкції занурення топологічних (інверсних) напівгруп у лінійно зв'язні нільпотентно-породжені топологічні (інверсні) напівгрупи та занурення злічених гаусдорфових топологічних (інверсних) напівгруп у зліченні зв'язні гаусдорфові нільпотентно-породжені топологічні (інверсні) напівгрупи. Отримані результати анонсовано в [3, 10].

Термінологія, означення та позначення такі, як у [5, 7, 12]. Усі топологічні простори вважаємо гаусдорфовими. Під (топологічним) зануренням (топологічних) напівгруп будемо розуміти (топологічний) ізоморфізм «в». Через \mathbb{N} позначається множина натуральних чисел.

2. Алгебраїчна конструкція занурення напівгруп у нільпотентно породжені напівгрупи. Нехай S – напівгрупа. Елемент a напівгрупи S називається *нільпотентним*, якщо $a^n = 0$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, що кожна напівгрупа, яка містить нільпотентний елемент містить нуль. Напівгрупа S називається *нільпотентно-породженою*, якщо S породжується множиною нільпотентних елементів.

Множину всіх нільпотентних елементів напівгрупи S позначимо через $\text{Nil}(S)$. Нехай $0 \neq a \in \text{Nil}(S)$, причому $a^n = 0$ і $a^{n-1} \neq 0$ для деякого натурального $n \geq 2$, тоді число n будемо називати *індексом нільпотентності елемента a* і записуватимемо це так: $i_{\text{nil}}(a) = n$. Якщо напівгрупа S є нільпотентно-породженою, то *індексом нільпотентності напівгрупи S* будемо називати число $i_{\text{nil}}(S) = \max\{i_{\text{nil}}(a) \mid a \in \text{Nil}(S)\}$, якщо таке число існує, в протилежному випадку покладемо $i_{\text{nil}}(S) = \infty$. Зауважимо, якщо напівгрупа S має скінченний індекс нільпотентності, то $a^{i_{\text{nil}}(S)} = 0$ для всіх $a \in \text{Nil}(S)$, але з цього не випливає, що $(\text{Nil}(S))^{i_{\text{nil}}(S)} = 0$.

Нагадаємо [12], що напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного елемента x в S існує єдиний інверсний x^{-1} такий, що $xx^{-1}x = x$ і $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$.

Нехай n – довільне натуральне число, відмінне від одиниці, a і b – $(n \times n)$ -матриці вигляду

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай $G_n = \langle a, b \rangle$ – напівгрупа, породжена матрицями a і b , з операцією звичайного множення матриць. Зауважимо, що $a^n = b^n = 0$, $aba = a$ і $bab = b$, де 0 – квадратна $(n \times n)$ -нуль-матриця. Оскільки ідемпотентами у напівгрупі G_n є $(n \times n)$ -матриці, у яких лише на діагоналі можуть бути одиниці, а всі решта – нулі, то G_n – інверсна напівгрупа.

Нехай S – довільна напівгрупа. Означимо $G_n(S) = S^1 \times G_n$. Оскільки 0 є нулем напівгрупи G_n , то множина $J_n = S^1 \times \{0\}$ є ідеалом напівгрупи $G_n(S)$. Означимо $NG_n(S) = G_n(S)/J_n$.

Оскільки G_n – інверсна напівгрупа і $(s, a)^n = (s, b)^n = 0$ в $NG_n(S)$, для всіх $s \in S^1$, то $NG_n(S)$ – нільпотентно-породжена напівгрупа. Справді, кожен ненульовий елемент у напівгрупі $NG_n(S)$ можна зобразити як $y = (s, \ell)$, де $s \in S^1$, $\ell \in G_n \setminus \{0\}$. Оскільки напівгрупа G_n породжена елементами a і b , то $\ell = a^{n_1}b^{m_1}a^{n_2}b^{m_2} \dots a^{n_k}b^{m_k}$, де $1 \leq n_1, m_1, n_2, m_2, \dots, n_k, m_k < n$. Таким чином,

$$y = (s, \ell) = (s, a^{n_1})(1, b^{m_1})(1, a^{n_2})(1, b^{m_2}) \dots (1, a^{n_k})(1, b^{m_k}),$$

і, отже, $NG_n(S)$ – нільпотентно-породжена напівгрупа та $i_{\text{nil}}(NG_n(S)) = n$.

Нагадаємо [12], що елемент a напівгрупи S називають *регулярним*, якщо $a = axa$ для деякого $x \in S$. Напівгрупу S називають *регулярною*, якщо кожен її елемент є регулярним. Очевидно, якщо S – регулярна напівгрупа, тоді й $NG_n(S)$ (як гомоморфний образ декартового добутку регулярних напівгруп) є регулярною напівгрупою.

Нагадаємо [12], що напівгрупу S називають *ортодоксальною*, якщо підмножина ідемпотентів $E(S)$ напівгрупи S є піднапівгрупою в S . Очевидно, що кожен ненульовий ідемпотент напівгрупи $NG_n(S)$ має вигляд (e, f) , де $e \in E(S)$ і $f \in E(G_n)$. Легко бачити, якщо $e_1, e_2 \in E(S)$ і $f_1, f_2 \in E(G_n) \setminus \{0\}$, то $(e_1, f_1)(e_2, f_2) = (e_1e_2, f_1f_2)$; якщо $f_1f_2 \neq 0 \in G_n$ і $(e_1, f_1)(e_2, f_2) = 0$, то $f_1f_2 = 0 \in G_n$, а, отже, $(e_1, f_1)(e_2, f_2) \in E(NG_n(S))$. Отже, з ортодоксальності напівгрупи S випливає ортодоксальність напівгрупи $NG_n(S)$.

У випадку, коли S – інверсна напівгрупа, то $NG_n(S)$ як гомоморфний образ декартового добутку інверсних напівгруп є інверсною напівгрупою.

Якщо напівгрупа S містить нуль 0_S , тоді множина $I = \{0\} \cup (\{0_S\} \times G_n)$ є ідеалом у напівгрупі $NG_n(S)$. Означимо $NG_n^0(S) = NG_n(S) / I$. Очевидно, що напівгрупа $NG_n^0(S)$ є нільпотентно-породженою. Аналогічно, як і в попередніх випадках, можна довести, що, коли S – регулярна (ортодоксальна, інверсна) напівгрупа з нулем, то $NG_n^0(S)$ – регулярна (ортодоксальна, інверсна) напівгрупа індексу нільпотентності n .

Відображення $h : S \rightarrow NG_n(S)$, означене як $h(s) = (s, ab)$, є ізоморфним зануренням напівгрупи S в $NG_n(S)$. Якщо напівгрупа S містить нуль 0_S ,

то відображення $h : S \rightarrow NG_n^0(S)$, означене формулою $h(s) = \begin{cases} (s, ab), & s \neq 0_S, \\ 0, & s = 0_S, \end{cases}$

також є ізоморфним зануренням S у напівгрупу $NG_n^0(S)$.

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема 1. *Для довільного натурального $n \geq 2$ і для кожної напівгрупи S [$S = S^0$] існує ізоморфне занурення напівгрупи S у нільпотентно-породжену напівгрупу $NG_n(S)$ [$NG_n^0(S)$] індексу нільпотентності n . Більше того, напівгрупа S [$S = S^0$] є регулярною (ортодоксальною, інверсною) тоді й тільки тоді, коли напівгрупа $NG_n(S)$ [$NG_n^0(S)$] є регулярною (ортодоксальною, інверсною).*

Зауважимо, що теорема 1 є узагальненням теорем 1.1 і 1.2 з [13].

Через $\mathcal{R}_S, \mathcal{L}_S, \mathcal{D}_S, \mathcal{J}_S$ і \mathcal{H}_S позначимо відношення Гріна на напівгрупі S (означення див. у [12, § 2.1] і [9]). Оскільки для кожного натурального $n \geq 2$ напівгрупа $G_n(S)$ є декартовим добутком напівгруп S^1 і G_n , а напівгрупа $NG_n(S)$ є фактор-напівгрупою Ріса за ідеалом $J_n = S^1 \times \{0\}$, де 0 – нуль напівгрупи G_n , то виконується

Твердження 1. *Нехай a, b – елементи напівгрупи S . Тоді:*

1°) $(a, x)\mathcal{R}_{NG_n(S)}(b, y)$ тоді й тільки тоді, коли $a\mathcal{R}_S b$ і $x\mathcal{R}_{G_n} y$;

2°) $(a, x)\mathcal{L}_{NG_n(S)}(b, y)$ тоді й тільки тоді, коли $a\mathcal{L}_S b$ і $x\mathcal{L}_{G_n} y$;

3°) $(a, x)\mathcal{D}_{NG_n(S)}(b, y)$ тоді й тільки тоді, коли $a\mathcal{D}_S b$ і $x\mathcal{D}_{G_n} y$;

4°) $(a, x)\mathcal{J}_{NG_n(S)}(b, y)$ тоді й тільки тоді, коли $a\mathcal{J}_S b$ і $x\mathcal{J}_{G_n} y$;

5°) $(a, x)\mathcal{H}_{NG_n(S)}(b, y)$ тоді й тільки тоді, коли $a\mathcal{H}_S b$ і $x\mathcal{H}_{G_n} y$.

З твердження 1 випливає

Твердження 2. Нехай S – напівгрупа з нулем, a та b – ненульові елементи напівгрупи S . Тоді:

1°) $(a, x)\mathcal{R}_{NG_n^0(S)}(b, y)$ тоді й тільки тоді, коли $a\mathcal{R}_S b$ і $x\mathcal{R}_{G_n} y$;

2°) $(a, x)\mathcal{L}_{NG_n^0(S)}(b, y)$ тоді й тільки тоді, коли $a\mathcal{L}_S b$ і $x\mathcal{L}_{G_n} y$;

3°) $(a, x)\mathcal{D}_{NG_n^0(S)}(b, y)$ тоді й тільки тоді, коли $a\mathcal{D}_S b$ і $x\mathcal{D}_{G_n} y$;

4°) $(a, x)\mathcal{J}_{NG_n^0(S)}(b, y)$ тоді й тільки тоді, коли $a\mathcal{J}_S b$ і $x\mathcal{J}_{G_n} y$;

5°) $(a, x)\mathcal{H}_{NG_n^0(S)}(b, y)$ тоді й тільки тоді, коли $a\mathcal{H}_S b$ і $x\mathcal{H}_{G_n} y$.

Нехай S – напівгрупа. Для кожного натурального $n \geq 2$ побудуємо напівгрупу $NG_n(S)$. На множині $\widetilde{NG}_\infty(S) = \{\vartheta\} \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} NG_n(S)$, де $\vartheta \notin NG_n(S)$,

$n \geq 2$, означимо напівгрупову операцію так:

(а) $\vartheta x = x\vartheta = \vartheta\vartheta = \vartheta$ для всіх $x \in NG_\infty(S)$;

(б) $xy = xy$, якщо $x, y \in NG_n(S)$ для деякого $n \geq 2$;

(в) $xy = \vartheta$ в інших випадках.

Очевидно, що множина $\mathbb{J} = \{\vartheta\} \cup \{0_n \mid 0_n \text{ – нуль напівгрупи } NG_n(S)\}$ є ідеалом напівгрупи $\widetilde{NG}_\infty(S)$. Означимо $NG_\infty(S) = \widetilde{NG}_\infty(S)/\mathbb{J}$.

Тоді з теореми 1 випливає

Теорема 2. Довільна напівгрупа S занурюється у напівгрупу $NG_\infty(S)$, породжену множиною нільпотентних елементів N , таку, що $i_{\text{nil}}(NG_\infty(S)) = \infty$ та $N = \bigcup_{i=2}^{\infty} N_i$, $i_{\text{nil}}(a) = i$ для кожного $a \in N_i$. Причому напівгрупа S є регулярною (ортодоксальною, інверсною) тоді й тільки тоді, коли напівгрупа $NG_\infty(S)$ є регулярною (ортодоксальною, інверсною).

3. Занурення топологічних напівгруп у нільпотентно-породжені топологічні напівгрупи. Нехай (S, τ) – топологічна напівгрупа. Надалі, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що S – топологічний моноїд, оскільки до кожної напівгрупи завжди можна приєднати одиницю як ізолювану точку. На напівгрупі $NG_n(S)$ означимо топологію τ_n так. Нехай \mathfrak{B} – база топології τ на S . Сім'я $\mathfrak{B}_n = \{0\} \cup \{(U, x) \mid U \in \mathfrak{B}, x \in G_n \setminus \{0\}\}$ задовольняє умови (B1)–(B2) з [5], а, отже, є базою топології τ_n на $NG_n(S)$. Покажемо, що $(NG_n(S), \tau_n)$ – топологічна напівгрупа. Розглянемо можливі випадки.

1°. Нехай $(s_1, t_1)(s_2, t_2) = (s, t)$. Тоді $(U(s_1), t_1)(U(s_2), t_2) \subseteq (U(s), t)$ для відкритих околів $U(s_1)$, $U(s_2)$, $U(s)$ в (S, τ) таких, що $U(s_1)U(s_2) \subseteq U(s)$.

2°. Якщо $(s_1, t_1)(s_2, t_2) = 0$, то $(U(s_1), t_1)(U(s_2), t_2) \subseteq \{0\}$ для всіх відкритих околів $U(s_1), U(s_2)$ в (S, τ) .

3°. $(U(s), t)\{0\} \subseteq \{0\}$ і $\{0\}(U(s), t) \subseteq \{0\}$ для кожного відкритого околу $U(s)$ в (S, τ) .

4°. $\{0\} \cdot \{0\} = \{0\}$.

Таким чином, $(NG_n(S), \tau_n)$ – топологічна напівгрупа.

Нехай (S, τ) – топологічна інверсна напівгрупа. Тоді $\{0\}^{-1} = \{0\}$, і якщо $(s, x)^{-1} = (s^{-1}, x^{-1})$, де s^{-1} – інверсний до s елемент в S і x^{-1} – інверсний до x у напівгрупі G_n , то $(U(s), x)^{-1} \subseteq (V(s^{-1}), x^{-1})$, де $(U(s))^{-1} \subseteq V(s^{-1})$ в S^1 .

Зауважимо, що топологічна напівгрупа $(NG_n(S), \tau_n)$ успадковує усі топологічні властивості напівгрупи (S, τ) , що зберігаються скінченною сумою топологічних просторів, наприклад: компактність, локальну компактність, зліченну компактність, псевдокомпактність та інші.

Нехай \mathbb{S} – деякий непорожній клас топологічних напівгруп.

Означення 1 [4, 15]. Топологічну напівгрупу $S \in \mathbb{S}$ називають *H-замкненою у класі \mathbb{S}* , якщо вона є замкненою підмножиною у напівгрупі $T \in \mathbb{S}$, що містить S як піднапівгрупу. Топологічну напівгрупу S називають *H-замкненою*, якщо \mathbb{S} – клас усіх топологічних напівгруп.

Означення 2 [11, 16]. Топологічну напівгрупу $S \in \mathbb{S}$ називають *абсолютно H-замкненою в класі \mathbb{S}* , якщо кожен неперервний гомоморфний образ напівгрупи S у напівгрупу $T \in \mathbb{S}$ є *H-замкненою* напівгрупою у класі \mathbb{S} . Топологічну напівгрупу S називають *абсолютно H-замкненою*, якщо \mathbb{S} – клас усіх топологічних напівгруп.

Нагадаємо [11], що напівгрупу S називають *алгебраїчно замкненою в класі топологічних напівгруп \mathbb{S}* , якщо напівгрупа S з довільною на ній напівгруповою топологією є *H-замкненою* в \mathbb{S} , і *алгебраїчно h-замкненою в \mathbb{S}* , якщо S з дискретною топологією є *абсолютно H-замкненою* в класі \mathbb{S} . Якщо ж \mathbb{S} – клас усіх топологічних напівгруп, то напівгрупу S називають *алгебраїчно замкненою* і *алгебраїчно h-замкненою* відповідно.

Нехай (S, τ) – *H-замкнена* (абсолютно *H-замкнена*) топологічна напівгрупа. Тоді, очевидно, якщо S не містить одиниці, то S^1 з топологією τ_1 такою, що $\tau_1|_S = \tau$, є *H-замкненою* (абсолютно *H-замкненою*) топологічною напівгрупою, а, отже, з алгебраїчної замкненості (алгебраїчної *h-замкненості*) напівгрупи S випливає алгебраїчна замкненість (алгебраїчна *h-замкненість*) напівгрупи S^1 .

Доведемо, що з абсолютної *H-замкненості* топологічної напівгрупи (S, τ) випливає абсолютна *H-замкненість* напівгрупи $(NG_n(S), \tau_n)$.

Нехай (S, τ) – абсолютно *H-замкнена* топологічна напівгрупа і T – топологічна напівгрупа, що містить образ напівгрупи $(NG_n(S), \tau_n)$ при неперервному гомоморфізмі $h : (NG_n(S), \tau_n) \rightarrow T$. Тоді для довільного ненульового ідемпотента e напівгрупи G_n піднапівгрупа (S^1, e) є абсолютно *H-замкненою*, оскільки піднапівгрупа (S^1, e) топологічно ізоморфна S^1 .

Нехай $x \in G_n \setminus E(G_n)$. Покажемо, що $h((S^1, x))$ – замкнена підмножина в T . Нехай $xx^{-1} = e \in E(G_n) \setminus \{0\}$ і $x^{-1}x = f \in E(G_n) \setminus \{0\}$. Означимо відображення $\varphi : T \rightarrow T$ і $\psi : T \rightarrow T$ так: $\varphi(y) = y \cdot h((1_S, x^{-1}))$ і $\psi(y) = y \cdot h((1_S, x))$, де 1_S – одиниця напівгрупи S^1 . Відображення φ і ψ є неперервними, оскільки є внутрішніми зсувами в T , отже, $\varphi^{-1}(h((S^1, e)))$ – замкнена підмножина в T . Очевидно, що $h((S^1, x)) \subseteq A$. Нехай $f = \varphi \circ \psi$. Тоді відображення $f_A = f|_A : A \rightarrow h((S^1, x))$ є ретракцією, а множина $h((S^1, x))$ – ретрактом топологічного простору A . Таким чином, $h((S^1, x))$ – замкнена під-

множина в топологічній напівгрупі T , а, отже, $(NG_n(S), \tau_n)$ – абсолютно H -замкнена топологічна напівгрупа.

Якщо (S, τ) – H -замкнена топологічна напівгрупа, то H -замкненість топологічної напівгрупи $(NG_n(S), \tau_n)$ доводиться аналогічно з урахуванням того, що $h : (NG_n(S), \tau_n) \rightarrow T$ – топологічний ізоморфізм.

Отже, доведено таку теорему.

Теорема 3. Для довільного натурального $n \geq 2$ і для кожної топологічної (інверсної) напівгрупи (S, τ) існує топологічне ізоморфне занурення (S, τ) у нільпотентно-породжену топологічну (інверсну) напівгрупу $(NG_n(S), \tau_n)$ індексу нільпотентності n . Причому, якщо напівгрупа (S, τ) є компактною (локально компактною, зліченно компактною, псевдокомпактною, H -замкненою, абсолютно H -замкненою), то на $NG_n(S)$ існує компактна (локально компактна, зліченно компактна, псевдокомпактна, H -замкнена, абсолютно H -замкнена) напівгрупова топологія τ_n .

Наслідок 1. Якщо S – алгебраїчно (h -) замкнена напівгрупа, то $NG_n(S)$ – алгебраїчно (h -) замкнена напівгрупа.

Нехай (S, τ) – топологічна напівгрупа. На напівгрупі $NG_\infty(S)$ означимо топологію τ_∞ так. Нехай \mathfrak{B} – база топології τ на S . Сім'я

$$\mathfrak{B}_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} \mathfrak{B}_n \cup \mathfrak{B}_0,$$

де

$$\mathfrak{B}_n = \{(U, a) \mid U \in \mathfrak{B}, a \in G_n \setminus \{0\}\},$$

$$\mathfrak{B}_0 = \{U(i_1, \dots, i_k) = NG_\infty(S) \setminus (NG_{i_1}(S) \cup \dots \cup NG_{i_k}(S)) \cup \{\vartheta\} \mid i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\},$$

задовольняє умови (B1)–(B2) [5], а, отже, є базою топології τ_∞ на напівгрупі $NG_\infty(S)$. Очевидно, що напівгрупа $NG_n(S)$ є піднапівгрупою в $NG_\infty(S)$ і $\tau_\infty|_{NG_n(S)} = \tau_n$ для кожного $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Тоді:

$$(a) U(i_1, \dots, i_k)U(i_1, \dots, i_k) \subseteq U(i_1, \dots, i_k) \text{ для всіх } i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N} \setminus \{1\};$$

(б) якщо $(g_1, a_1), (g_2, a_2) \in NG_n(S) \setminus \{\vartheta\} \subseteq NG_\infty(S)$ то $(U(g_1), a_1)(U(g_2), a_2) \subseteq \subseteq (U(g_1g_2), a_1a_2)$ для відкритих околів $U(g_1), U(g_2), U(g_1g_2)$ в S^1 таких, що $U(g_1)U(g_2) \subseteq U(g_1g_2)$ у випадку $a_1a_2 \neq \vartheta$, і $(U(g_1), a_1)(U(g_2), a_2) \subseteq U(i_1, \dots, i_k)$ для всіх відкритих околів $U(g_1), U(g_2)$ в S^1 і довільних $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ у випадку $a_1a_2 = \vartheta$;

(в) якщо $(g_n, a_n) \in NG_n(S) \setminus \{\vartheta\}$ і $(g_\ell, a_\ell) \in NG_\ell(S) \setminus \{\vartheta\}$ для деяких $n \neq \ell$, $n, \ell \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, то $(g_n, a_n)(g_\ell, a_\ell) = \vartheta \in NG_\infty(S)$ і для довільних відкритих околів $U(g_n), U(g_\ell)$ в S^1 виконується включення $(U(g_n), a_n)(U(g_\ell), a_\ell) \subseteq \subseteq U(i_1, \dots, i_k)$ для всіх $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Отже, якщо (S, τ) – топологічна напівгрупа, то $(NG_\infty(S), \tau_\infty)$ – топологічна напівгрупа. Якщо (S, τ) – топологічна інверсна напівгрупа, то

$$(a) (U(i_1, \dots, i_k))^{-1} \subseteq U(i_1, \dots, i_k) \text{ для всіх } i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N} \setminus \{1\};$$

(б) $(U(g), a)^{-1} \subseteq (V(g^{-1}), a^{-1}) \subseteq NG_n(S) \subseteq NG_\infty(S)$ для відкритих околів $U(g)$ і $V(g^{-1})$ в S^1 таких, що $(U(g))^{-1} \subseteq V(g^{-1})$.

Отже, доведено таке твердження.

Теорема 4. Якщо (S, τ) – топологічна (інверсна) напівгрупа, то $(NG_\infty(S), \tau_\infty)$ – топологічна (інверсна) напівгрупа.

З означення топології τ_∞ випливає, що у випадку, коли τ – компактна (зліченно компактна, локально компактна, псевдокомпактна) топологія на S , то τ_∞ – компактна (зліченно компактна, локально компактна, псевдокомпактна) топологія на $NG_\infty(S)$.

Теорема 5. Довільна топологічна (інверсна) напівгрупа (S, τ) топологічно ізоморфно занурюється в топологічну (інверсну) напівгрупу $(NG_\infty(S), \tau_\infty)$, породжену множиною нільпотентних елементів N , таку,

що $i_{\text{nil}}(NG_\infty(S)) = \infty$ та $N = \bigcup_{i=2}^{\infty} N_i$, $i_{\text{nil}}(a) = i$ для кожного $a \in N_i$. Окрім

того, якщо напівгрупа (S, τ) є компактною (локально компактною, зліченно компактною, псевдокомпактною, H -замкненою, абсолютно H -замкненою), то на $NG_\infty(S)$ існує компактна (локально компактна, зліченно компактна, псевдокомпактна, H -замкнена, абсолютно H -замкнена) напівгрупова топологія τ_∞ .

Д о в е д е н н я. Нехай (S, τ) – абсолютно H -замкнена топологічна напівгрупа. Покажемо, що $(NG_\infty(S), \tau_\infty)$ – абсолютно H -замкнена топологічна напівгрупа. Нехай T – топологічна напівгрупа, що містить образ напівгрупи $(NG_\infty(S), \tau_\infty)$ при неперервному гомоморфізмі $h : (NG_\infty(S), \tau_\infty) \rightarrow T$. Припустимо, що множина $N_h = h(NG_\infty(S))$ не є замкненою в T . Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що множина $h(NG_\infty(S))$ щільна в T . Тоді існує $x \in T \setminus h(NG_\infty(S))$, і нуль $h(\vartheta)$ напівгрупи $h(NG_\infty(S))$ є нулем напівгрупи T [5, лема 1]. За теоремою 3 для кожного $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ топологічна піднапівгрупа $(NG_k(S), \tau_k)$ напівгрупи $(NG_\infty(S), \tau_\infty)$ є абсолютно H -замкненою, оскільки $\tau_\infty|_{NG_k(S)} = \tau_k$. Таким чином, кожен відкритий окіл $U(x)$ перетинає нескінченну кількість піднапівгруп $h(NG_i(S))$, $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. З гаусдорфовості напівгрупи T випливає існування відкритих околів $V(x)$ і $V(h(\vartheta))$ таких, що $V(x) \cap V(h(\vartheta)) = \emptyset$. Тоді множина $h^{-1}(V(h(\vartheta)))$ не є відкритою в $(NG_\infty(S), \tau_\infty)$. З отриманої суперечності випливає абсолютна H -замкненість топологічної напівгрупи $(NG_\infty(S), \tau_\infty)$. Зауважимо, якщо (S, τ) – H -замкнена топологічна напівгрупа, то провівши аналогічні міркування, вважаючи, що $h : (NG_\infty(S), \tau_\infty) \rightarrow T$ – топологічне ізоморфне занурення, отримуємо, що $(NG_\infty(S), \tau_\infty)$ – H -замкнена топологічна напівгрупа. \diamond

Теорема 6. Нехай $S = \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$ – топологічна інверсна напівгрупа така, що

- (i) для кожного $\alpha \in A$ напівгрупа S_α є (абсолютно) H -замкненою у класі топологічних інверсних напівгруп;
- (ii) існує (абсолютно) H -замкнена в класі топологічних інверсних напівгруп піднапівгрупа T в S така, що $S_\alpha S_\beta \subseteq T$ для всіх $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in A$.

Тоді S – (абсолютно) H -замкнена напівгрупа в класі топологічних інверсних напівгруп.

Д о в е д е н н я. Розглянемо лише випадок абсолютної H -замкненості. У випадку H -замкненості доведення аналогічне.

Нехай $h : S \rightarrow G$ – неперервний гомоморфізм топологічних інверсних напівгруп. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що $\overline{h(S)} = G$. Тоді G є топологічною інверсною напівгрупою [8].

Припустимо, що $G \setminus h(S) \neq \emptyset$. Нехай $x, x^{-1} \in G \setminus h(S)$ і $U(x)$ – відкритий окіл точки x в G такий, що $U(x) \cap h(T) = \emptyset$. Тоді існують відкриті околи $V(x)$ і $V(x^{-1})$ такі, що $V(x)V(x^{-1})V(x) \subseteq U(x)$. Але кожен з околів $V(x)$ і $V(x^{-1})$ перетинає нескінченну кількість напівгруп $h(S_\beta)$, $\beta \in A$, оскільки S_α є абсолютно H -замкненою напівгрупою у класі топологічних інверсних напівгруп для кожного $\alpha \in A$. Отже, $V(x)V(x^{-1})V(x) \cap h(T) \neq \emptyset$, що суперечить вибору околу $U(x)$. \diamond

Наслідок 2. Нехай $S = \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$ – інверсна напівгрупа така, що

- (i) для кожного $\alpha \in A$ напівгрупа S_α є алгебраїчно (h -) замкненою у класі топологічних інверсних напівгруп;
- (ii) існує алгебраїчно (h -) замкнена в класі топологічних інверсних напівгруп піднапівгрупа T в S така, що $S_\alpha S_\beta \subseteq T$ для всіх $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in A$.

Тоді S – алгебраїчно (h -) замкнена напівгрупа в класі топологічних інверсних напівгруп.

Зауважимо, що твердження теореми 6 і наслідку 2 не виконуються в класі топологічних напівгруп. Для цього достатньо розглянути нескінченну напівгрупу матричних одиниць з дискретною топологією.

З теореми 6 випливає

Теорема 7. Нехай (S, τ) – топологічна інверсна напівгрупа, що є (абсолютно) H -замкненою в класі топологічних інверсних напівгруп. Нехай τ – топологія на $NG_\infty(S)$ така, що $(NG_i(S), \tau|_{NG_i(S)})$ – (абсолютно) H -замкнена напівгрупа в класі топологічних інверсних напівгруп для кожного $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Тоді $(NG_\infty(S), \tau)$ – (абсолютно) H -замкнена напівгрупа в класі топологічних інверсних напівгруп.

З наслідку 2 випливає

Наслідок 3. Якщо S – алгебраїчно (h -) замкнена інверсна напівгрупа в класі топологічних інверсних напівгруп, то $NG_\infty(S)$ – алгебраїчно (h -) замкнена інверсна напівгрупа в класі топологічних інверсних напівгруп.

4. Занурення топологічних напівгруп у нільпотентно-породжені зв'язні топологічні напівгрупи. Нехай (S, τ) – топологічна (інверсна) напівгрупа. Якщо напівгрупа S не містить одиниці, то будемо вважати, що до (S, τ) одиниця приєднана дискретно. Нехай $I_m = ((0, 1], \min)$ – напівгрупа з індукованою з \mathbb{R} природною топологією і $P_S = S \times I_m$ – з топологією декартового добутку. Очевидно, якщо (S, τ) – топологічна (інверсна) напівгрупа, то P_S – топологічна (інверсна) напівгрупа.

На напівгрупі $NG_n(P_S)$ означимо топологію $\tilde{\tau}_n(P_S)$ так. Нехай $\tau_n(P_S)$ – топологія на напівгрупі $NG_n(P_S)$, означена в доведенні теореми 3. Бази топологій $\tilde{\tau}_n(P_S)$ і $\tau_n(P_S)$ у точках вигляду $x \in NG_n(P_S) \setminus \{9\}$ співпадають. Означимо

$$\tilde{\mathfrak{B}}_n(9) = \left\{ \left\{ U_\varepsilon(9) = \{9\} \cup \left\{ (s, u), a \mid s \in S, 0 < u < \varepsilon, a \in G_n \setminus \{0\} \right\} \right\} \mid \varepsilon \in (0, 1) \right\}.$$

Тоді сім'я $\tilde{\mathfrak{B}}_n(\mathfrak{G})$ задовольняє умови (BP1)–(BP3) [5], а, отже, визначає базу топології $\tilde{\tau}_n(P_S)$ на напівгрупі $NG_n(P_S)$.

Твердження 3. *Якщо (S, τ) – топологічна (інверсна) напівгрупа, то $(NG_n(P_S), \tilde{\tau}_n(P_S))$ – топологічна (інверсна) напівгрупа.*

Д о в е д е н н я. Достатньо розглянути лише такі випадки:

1°) $\mathfrak{G}\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$;

2°) $(a_1, g_1)(a_2, g_2) = \mathfrak{G}$, де $a_1 = (s_1, u_1) \in S \times I_m$ і $a_2 = (s_2, u_2) \in S \times I_m$;

3°) $\mathfrak{G}(a, g) = (a, g)\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$.

У випадку 1°) $U_\varepsilon(\mathfrak{G})U_\varepsilon(\mathfrak{G}) = U_\varepsilon(\mathfrak{G})$ для кожного $\varepsilon \in (0, 1)$.

У випадку 2°) $U((a_1, g_1))U((a_2, g_2)) = \mathfrak{G} \subseteq U_\varepsilon(\mathfrak{G})$ для відкритих околів $U((a_1, g_1)) \subseteq P \times g_1$, $U((a_2, g_2)) \subseteq P \times g_2$ і $\varepsilon \in (0, 1)$.

У випадку 3°) припустимо, що $a = (s, u)$. Тоді для довільного відкритого околу $U((a, g)) \subseteq P_S \times g$ виконуються включення $U((a_1, g_1))U_\varepsilon(\mathfrak{G}) \subseteq U_\varepsilon(\mathfrak{G})$ і $U_\varepsilon(\mathfrak{G})U((a_1, g_1)) \subseteq U_\varepsilon(\mathfrak{G})$, де $\varepsilon \in (0, u/2)$.

Якщо ж (S, τ) – топологічна інверсна напівгрупа, то з включення $(U_\varepsilon(\mathfrak{G}))^{-1} \subseteq U_\varepsilon(\mathfrak{G})$ випливає, що $(NG_n(P_S), \tilde{\tau}_n(P_S))$ – топологічна інверсна напівгрупа.

Оскільки напівгрупа $(NG_n(P_S), \tilde{\tau}_n(P_S))$ гомеоморфна конусу над топологічним простором $(NG_n(S), \tau_n)$, то $(NG_n(P_S), \tilde{\tau}_n(P_S))$ – лінійно зв'язний топологічний простір, і з компактності (локальної компактності, зліченної компактності, псевдокомпактності) топологічної напівгрупи (S, τ) випливає компактність (локальна компактність, зліченна компактність, псевдокомпактність) напівгрупи $(NG_n(P_S), \tilde{\tau}_n(P_S))$.

Таким чином, доведено теорему.

Теорема 8. *Для довільного натурального $n \geq 2$ і для кожної топологічної (інверсної) напівгрупи (S, τ) існує топологічне ізоморфне занурення напівгрупи (S, τ) у нільпотентно-породжену лінійно зв'язну топологічну (інверсну) напівгрупу $(NG_n(P_S), \tilde{\tau}_n(P_S))$ індексу нільпотентності n . Причому, якщо напівгрупа (S, τ) є компактною (локально компактною, зліченно компактною, псевдокомпактною), то топологічна напівгрупа $(NG_n(P_S), \tilde{\tau}_n(P_S))$ є компактною (локально компактною, зліченно компактною, псевдокомпактною).*

На напівгрупі $NG_\infty(P_S)$ означимо топологію $\tilde{\tau}_\infty(P_S)$ так. Нехай $\tau_\infty(P_S)$ – топологія на напівгрупі $NG_\infty(P_S)$, означена в доведенні теореми 5. Бази топологій $\tilde{\tau}_\infty(P_S)$ і $\tau_\infty(P_S)$ у точках вигляду $x \in NG_\infty(P_S) \setminus \{\mathfrak{G}\}$ співпадають. Означимо

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{B}}_\infty(\mathfrak{G}) = \{ & U(\varepsilon; i_1, \dots, i_k) = NG_\infty(P_S) \setminus (NG_{i_1}(P_S) \cup \dots \cup NG_{i_k}(P_S)) \cup \{\mathfrak{G}\} \cup \\ & \bigcup_{j \in \{i_1, \dots, i_k\}} \{(s, u), g) \in NG_j(P_S) \mid s \in S, u \in (0, \varepsilon), g \in G_j\} \mid 0 < \varepsilon < 1, \\ & i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \}. \end{aligned}$$

Тоді сім'я $\tilde{\mathfrak{B}}_\infty(\mathfrak{G})$ задовольняє умови (BP1)–(BP3) [5], а, отже, визначає базу топології $\tilde{\tau}_\infty(P_S)$ на $NG_\infty(P_S)$.

Доведення наступного твердження, аналогічно, як і твердження 3, проводиться безпосередньою перевіркою.

Твердження 4. Якщо (S, τ) – топологічна (інверсна) напівгрупа, то $(NG_\infty(P_S), \bar{\tau}_\infty(P_S))$ – топологічна (інверсна) напівгрупа.

З теореми 8 та з означення топології $\bar{\tau}_\infty(P_S)$ на напівгрупі $NG_\infty(P_S)$ випливає, що, якщо (S, τ) – компактна (зліченно компактна, псевдокомпактна) топологічна напівгрупа, то $(NG_\infty(P_S), \bar{\tau}_\infty(P_S))$ – лінійно зв'язна компактна (зліченно компактна, псевдокомпактна) топологічна напівгрупа.

Отже, доведено теорему.

Теорема 9. Довільна топологічна (інверсна) напівгрупа (S, τ) топологічно ізоморфно занурюється в у лінійно зв'язну топологічну (інверсну) напівгрупу $(NG_\infty(P_S), \bar{\tau}_\infty(P_S))$, породжену множиною нільпотентних елементів N , таку, що $i_{\text{nil}}(NG_\infty(P_S)) = \infty$ та $N = \bigcup_{i=2}^{\infty} N_i$, $i_{\text{nil}}(a) = i$ для кожного $a \in N_i$. Причому, якщо напівгрупа (S, τ) є компактною (зліченно компактною, псевдокомпактною), то напівгрупа $(NG_\infty(P_S), \bar{\tau}_\infty(P_S))$ є компактною (зліченно компактною, псевдокомпактною).

Нехай X – злічений зв'язний гаусдорфовий топологічний простір (див. [6]). Розглянемо вільну напівгратку Лоусона $\text{exp}_\omega(X)$ над X [14]. Надалі будемо вважати, що всі елементи напівгратки $\text{exp}_\omega(X)$ є нескоротними словами. Зафіксуємо довільний елемент $x_0 \in \text{exp}_\omega(X)$. Означимо $\text{exp}_\omega\{x\}(X) = \{T \in \text{exp}_\omega(X) \mid x_0 \in T\}$. За твердженням 2 з [1], $\text{exp}_\omega\{x_0\}(X)$ – зліченна зв'язна топологічна напівгрупа.

Нехай (S, τ) – зліченна гаусдорфова топологічна (інверсна) напівгрупа. Якщо S не містить одиниці, то будемо вважати, що до (S, τ) одиниця приєднана як ізольована точка. Означимо $C_S = S \times \text{exp}_\omega\{x_0\}(X)$ з топологією декартового добутку. Очевидно, що C_S – топологічна (інверсна) напівгрупа.

Для довільного $x \in \text{exp}_\omega\{x_0\}(X)$ через $d(x)$ позначимо довжину слова x . Означимо $E_n = \{x \in \text{exp}_\omega\{x_0\}(X) \mid d(x) \geq n\}$ і $C_n = S \times E_n$, для кожного $n \in \mathbb{N}$.

На напівгрупі $NG_n(C_S)$ означимо топологію $\bar{\tau}_n(C_S)$ так. Нехай $\tau_n(C_S)$ – топологія на напівгрупі $NG_n(C_S)$, означена в доведенні теореми 3. Бази топологій $\bar{\tau}_n(C_S)$ і $\tau_n(C_S)$ у точках вигляду $x \in NG_n(C_S) \setminus \{\vartheta\}$ співпадають. Означимо

$$\bar{\mathfrak{B}}_n(\vartheta) = \{U_k(\vartheta) = \{\vartheta\} \cup \{(c, a) \mid c \in C_k, a \in G_n \setminus \{\vartheta\}\}\}.$$

Тоді сім'я $\bar{\mathfrak{B}}_n(\vartheta)$ задовольняє умови (BP1)–(BP3) [5], а, отже, визначає базу топології $\bar{\tau}_n(C_S)$ на $NG_n(C_S)$.

Безпосередньою перевіркою доводиться

Твердження 5. Якщо (S, τ) – топологічна (інверсна) напівгрупа, то $(NG_n(C_S), \bar{\tau}_n(C_S))$ – топологічна (інверсна) напівгрупа.

З леми 3 з [1] випливає, що $(NG_n(C_S), \bar{\tau}_n(C_S))$ – злічений зв'язний гаусдорфовий простір. Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема 10. Для довільного натурального $n \geq 2$ і для кожної зліченної топологічної (інверсної) напівгрупи (S, τ) існує топологічне ізоморфне занурення напівгрупи (S, τ) у нільпотентно-породжену зліченну зв'язну гаусдорфову топологічну (інверсну) напівгрупу $(NG_n(C_S), \bar{\tau}_n(C_S))$ індексу нільпотентності n .

На напівгрупі $NG_\infty(C_S)$ означимо топологію $\bar{\tau}_\infty(C_S)$ так. Нехай $\tau_\infty(C_S)$ – топологія на напівгрупі $NG_\infty(P_S)$, означена в доведенні теореми 5. Бази топологій $\bar{\tau}_\infty(C_S)$ і $\tau_\infty(C_S)$ у точках вигляду $x \in NG_\infty(C_S) \setminus \{9\}$ співпадають. Означимо

$$\bar{\mathfrak{B}}_\infty(9) = \{U(p; i_1, \dots, i_k) = NG_\infty(C_S) \setminus (NG_{i_1}(C_S) \cup \dots \cup NG_{i_k}(C_S)) \cup \{9\} \cup \bigcup_{j \in \{i_1, \dots, i_k\}} \{(c, g) \in NG_j(P_S) \mid c \in C_p, g \in G_j\} \mid p \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}.$$

Тоді сім'я $\bar{\mathfrak{B}}_\infty(9)$ задовольняє умови (BP1)–(BP3) [5], а, отже, визначає базу топології $\bar{\tau}_\infty(C_S)$ на $NG_\infty(C_S)$.

Безпосередньою перевіркою доводиться

Твердження 6. Якщо (S, τ) – топологічна (інверсна) напівгрупа, то $(NG_\infty(C_S), \bar{\tau}_\infty(C_S))$ – топологічна (інверсна) напівгрупа.

За лемою 3 з [1] $(NG_\infty(C_S), \bar{\tau}_\infty(C_S))$ – злічений зв'язний гаусдорфовий простір. Отже, виконується

Теорема 11. Довільна гаусдорфова зліченна топологічна (інверсна) напівгрупа (S, τ) топологічно ізоморфно занурюється у гаусдорфову зліченну зв'язну топологічну (інверсну) напівгрупу $(NG_\infty(P), \bar{\tau}_\infty(P_S))$, породжену множиною нільпотентних елементів N такою, що $i_{\text{nil}}(NG_\infty(S)) = \infty$

та $N = \bigcup_{i=2}^{\infty} N_i$, $i_{\text{nil}}(a) = i$ для всіх $a \in N_i$.

1. Гутік О. В. Вкладення злічених топологічних напівгруп у прості злічені зв'язні топологічні напівгрупи // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1998. – **41**, № 3. – С. 16–21.
2. Гутік О. В. Про напівгрупу Гауї // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1999. – **42**, № 4. – С. 127–132.
3. Гутік О. В., Лівач Ю. М. Занурення топологічних напівгруп // *Конф. молодих вчених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача, Львів, 24–26 тр. 2004 р.*: Тези доп. – Львів, 2004. – С. 65–66.
4. Гутік О. В., Павлик К. П. H -замкнені топологічні напівгрупи та λ -розширення Брандта // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2001. – **44**, № 3. – С. 20–28.
5. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – Москва: Мир, 1986. – 752 с.
6. Bing R. H. A connected countable Hausdorff space // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 1953. – **4**. – P. 474.
7. Carruth J. H., Hildebrandt J. A., Koch R. J. The theory of topological semigroups: In 2 Vol. – New York: Marcell Dekker, Inc. – Vol. 1. – 1983. – 244 p.; Vol. 2. – 1986. – 196 p.
8. Eberhart C., Selden J. On the closure of the bicyclic semigroup // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1969. – **119**. – P. 115–126.
9. Green J. A. On the structure of semigroups // *Ann. Math.* – 1951. – **54**. – P. 163–172.
10. Gutik O., Livach Yu. Embeddings of semigroups into nilpotent-generated semigroups // *VI Міжнар. наук. конф. «Мат. проблеми механіки неоднорідних структур», Львів, 26–29 тр. 2003.* – Львів, 2003. – С. 487–488.
11. Gutik O. V., Pavlyk K. P. Absolutely H -closed and topological Brandt λ -extensions of topological inverse semigroups // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* – 2003. – **61**. – С. 98–105.
12. Howie J. M. Foundations of semigroup theory. – Oxford: Oxford Univ. Press, 1995. – 356 p.
13. Howie J. M. Embedding semigroups in nilpotent-generated semigroups // *Math. Slovaca.* – 1989. – **39**. – P. 47–54.
14. McWaters M. M. A note on topological semilattices // *J. London Math. Soc.* – 1969. – **1**. – P. 64–69.
15. Stepp J. W. A note on maximal locally compact semigroups // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 1969. – **20**. – P. 251–253.
16. Stepp J. W. Algebraic maximal semilattices // *Pacific J. Math.* – 1975. – **58**. – P. 243–248.

ПОГРУЖЕНИЯ ПОЛУГРУПП В НИЛЬПОТЕНТНО-ПОРОЖДЁННЫЕ ПОЛУГРУППЫ

Доказано, что для произвольного натурального $n \geq 2$ и для каждой полугруппы S существует погружение S в нильпотентно-порождённую полугруппу $NG_n(S)$ индекса нильпотентности $i_{\text{nil}}(NG_n(S)) = n$. Описаны отношения Грина на полугруппе $NG_n(S)$. Доказано, что каждая полугруппа S погружается в полугруппу $NG_\infty(S)$ порождённую множеством нильпотентных элементов N такую, что $i_{\text{nil}}(NG_\infty(S)) = \infty$, а также $N = \bigcup_{i=2}^{\infty} N_i$, $i_{\text{nil}}(a) = i$ для каждого $a \in N_i$. Построены топологические аналоги данных конструкций, что сохраняют компактность, счётную компактность, псевдокомпактность, а также H -замкнутость, абсолютную H -замкнутость, алгебраическую замкнутость и алгебраическую h -замкнутость в классе топологических инверсных и в классе топологических полугрупп. Построены конструкции погружения топологических (инверсных) полугрупп в линейно связные нильпотентно-порождённые топологические (инверсных) полугруппы и погружения счётных хаусдорфовых топологических (инверсных) полугрупп в счётные связные хаусдорфовы нильпотентно-порождённые топологические (инверсные) полугруппы.

EMBEDDINGS OF SEMIGROUPS INTO NILPOTENT-GENERATED SEMIGROUPS

It is proved that for every integer $n \geq 2$ and for any semigroup S there exists an embedding of S into a nilpotent-generated semigroup $NG_n(S)$ with index of nilpotency $i_{\text{nil}}(NG_n(S)) = n$. Green's relations on $NG_n(S)$ is described. It is shown that any semigroup S is embedded into a semigroup $NG_\infty(S)$, which is generated by a set of nilpotent elements N such that $i_{\text{nil}}(NG_\infty(S)) = \infty$, where $N = \bigcup_{i=2}^{\infty} N_i$ and $i_{\text{nil}}(a) = i$ for any $a \in N_i$. The analogues of these constructions which preserve compactness, countable compactness, pseudo-compactness, and H -closedness, absolute H -closedness, algebraic closedness, algebraic h -closedness in the class of topological inverse semigroups and in the class of topological semigroups are constructed. The constructions of embeddings of topological semigroups into the path-connected nilpotent-generated topological semigroups and embeddings of countable Hausdorff topological semigroups into the countable connected Hausdorff nilpotent-generated topological semigroups are presented.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

Одержано
12.06.04

² Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів