УДК 512.552.12

Т. М. Кисіль

СТРОГО ФАКТОРІАЛЬНІ ЕЛЕМЕНТИ ДУО-ОБЛАСТІ

Вивчаються максимально неголовні ідеали дуо-кілець і їхній зв'язок з елементами, які мають скінченне число атомних дільників. Також розглядається редукція матриць над класом кілець, у яких довільний максимально неголовний правий ідеал є двобічним.

І. Коен (I. S. Cohen) [8] показав, що, якщо в комутативному кільці довільний простий ідеал є головним (скінченно породженим), то й довільний ідеал кільця є головним (скінченно породженим). У працях [1, 9, 11] отримано узагальнення цього результату для дуо-кілець, матрично-локальних і правих нетерових кілець. З огляду на роботи [4, 8] можна говорити про максимально неголовні ідеали кільця, які, наприклад, в комутативному випадку є простими ідеалами. У працях [2, 3 5, 6, 10] вивчається структура максимально неголовних ідеалів кілець і ставиться ряд задач щодо вивчення структури максимально неголовних ідеалів [6]. У роботі [9] результати Кона переносяться на випадок дуо-кільця.

Задача вивчення максимально неголовних ідеалів в дуо-кільцях є актуальною. Цьому і присвячена пропонована робота. Отримані результати застосовано також для вивчення класів кілець елементарних дільників.

Спочатку розглянемо випадок дуо-кільця.

Означення 1. Правим (лівим) дуо-кільцем називається кільце, в якому кожний правий (лівий) ідеал є двобічним. Кільце називається дуо-кільцем, якщо воно є лівим і правим дуо-кільцем одночасно.

Нехай R − дуо-кільце з $1 \neq 0$.

Нехай I − довільний неголовний правий ідеал R. Позначимо через S множину всіх неголовних правих ідеалів R, які містять I. Покажемо, що S індукована стосовно порядку включення ідеалів. Розглянемо $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ − довільний ланцюг ідеалів з S, тоді нехай $J = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$. Очевидно, що J − правий ідеал R. Крім того, $J \in S$. Дійсно, $I \subset J$ за означенням J. Якщо $J = aR$, тоді $a \in \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$, а, значить, існує індекс $\beta \in \Lambda$ такий, що $a \in I_\beta$. Звідси отримуємо, що $aR \subset I_\beta$, а оскільки $I_\beta \subset J$, то $aR = I_\beta$, що неможливо, бо $I_\beta \in S$. За лемою Цорна в множині S існує хоча б один максимальний елемент, який назвемо максимально неголовним правим ідеалом. Аналогічно вводиться поняття максимально неголовного лівого ідеалу.

Означення 2. Правий (лівий) ідеал I кільця R, який є максимальним у множині неголовних правих (лівих) ідеалів, називається максимально неголовним правим (лівим) ідеалом.

Означення 3. Ідеал P називається цілком простим, якщо з включення $ab \in P$ випливає, що $a \in P$ або $b \in P$.

Зауважимо, що в комутативному випадку ідеал, який задовольняє таку умову, називається простим.

Твердження 1. *Максимально неголовний правий ідеал дуо-кільця R є цілком простим.*

Д о в е д е н н я. Нехай N − максимально неголовний правий ідеал. Припустимо, що він не є цілком простим, тобто існують такі $a \notin N$, $b \notin N$, що $ab \in N$.

Розглянемо правий ідеал $N + bR$. Він строго містить N, оскільки $b \notin N$, а тому є головним правим ідеалом. Нехай $N + bR = cR$. Кільце R є кільцем з одиницею, тому $n + br = c$ для деяких $n \in N$ і $r \in R$. Помноживши цю рівність зліва на a, отримаємо

$$an + abr = ac.$$

Оскільки $n \in N$ та $ab \in N$, то $ac \in N$.

Розглянемо також правий ідеал $J = \{x \mid xc \in N\}$.

Оскільки R − дуо-кільце, то J є правим ідеалом. Очевидно, що $N \subset J$, але оскільки $ac \in N$, то $a \in J$. Тоді включення $N \subset J$ є строгим, тому що $a \notin N$. Згідно з означенням ідеалу N маємо, що $J = dR$ для деякого $d \in R$.

З включення $N \subset N + bR = cR$ випливає, що для довільного $n \in N$ виконується $n = ct$ для деякого $t \in R$. Оскільки R − дуо-кільце, то існує $t' \in R$ таке, що $n = t'c$. З означення ідеалу J маємо $t' \in J$, тому $t' = d\alpha$ для деякого $\alpha \in R$. Тоді для деякого $\alpha' \in R$ виконується $n = d\alpha c = dc\alpha'$.

З останньої рівності випливає, що $N \subset dcR$. Елемент $d \in J$, тому $dc \in \in N$, а, отже, виконується й обернене включення $dcR \subset N$. Таким чином, виконується рівність $N = dcR$, яка суперечить означенню правого ідеалу N, що й доводить твердження. ◊

Твердження 2. *Якщо N − максимально неголовний правий (лівий) ідеал кільця R, то N − максимально неголовний лівий (правий) ідеал кільця.*

Д о в е д е н н я. Нехай N − максимально неголовний правий ідеал кільця R. Згідно з означенням ідеалу N існує $a \in R \setminus N$ (у супротивному випадку $R = N = 1 \cdot R$). Тоді ідеал $N + aR$ є правим головним, оскільки строго містить ідеал N. Нехай $N + aR = dR$ для деякого $d \in R$. Кільце R є кільцем з одиницею, тому $d = n + ar$ для деяких $n \in N$ та $r \in R$. З того, що кільце R є дуо-кільцем, випливає, що $d = n + r'a$ для деякого $r' \in R$.

Розглянемо тепер ідеал $N + Ra$. Ідеал Ra є лівим, а, отже, і правим, тому знову $N + Ra = cR$ для деякого $c \in R$. Очевидно, що $d \in N + Ra$, а тому $dR \subset cR$. І, навпаки, оскільки $c = m + sa = m + as' \in N + aR = dR$ для деяких $m \in N$ та $s, s' \in R$, то $cR \subset dR$. Отже, $dR = cR$, а, значить, $N + aR = = N + Ra$. Таким чином, $N + Ra = dR = RdR = Rd$, тобто $N + Ra = Rd$. Тому N є максимально неголовним лівим ідеалом.

Аналогічно доводимо, що максимально неголовний лівий ідеал кільця R є максимально неголовним правим ідеалом. Твердження доведено. ◊

Тепер введемо поняття строго факторіального елемента, тому надалі нехай R − дуо-область з $1 \neq 0$. З огляду на симетричність твердження 2 максимально неголовні праві (ліві) ідеали будемо називати максимально неголовними.

Означення 4. Необоротний елемент $a \in R$ називається атомом, якщо він не розкладається у добуток двох необоротних елементів.

Твердження 3. *Якщо aR (Ra) є максимальним правим (лівим) ідеалом кільця R, то a − атом.*

Д о в е д е н н я. Цей факт легко випливає з максимальності ідеалу aR (Ra). ◊

Означення 5. Елемент $a \in R$ називається факторіальним,

1) якщо $a = ua_1a_2 \ldots a_n$, де всі a_i − атоми і u − оборотний елемент;

2) якщо $a = ua_1a_2 \ldots a_n = vb_1b_2 \ldots b_s$ − два нетривіальні розклади елемента a на атоми, тоді $n = s$ і з точністю до ізоморфізму індексів a_i асоційоване з b_i.

Означення 6. Атом $a \in R$ називається максимальним правим (лівим) атомом, якщо aR (Ra) є максимальним правим (лівим) ідеалом кільця R.

Зауважимо, що у випадку дуо-кільця кожний правий ідеал є лівим, а тому такі атоми надалі будемо називати максимальними атомами.

Означення 7. Ненульовий елемент f області R називається строго факторіальним, якщо f − факторіальний елемент і кожний його атомний дільник є максимальним атомом.

Твердження 4. *Якщо a − необоротний елемент області R, який не міститься в жодному максимально неголовному ідеалі, то a − строго факторіальний елемент.*

Д о в е д е н н я. Зрозуміло, що правий модуль R/aR є ненульовим і кожний його підмодуль є циклічним. Оскільки об'єднання довільного зростаючого ланцюга власних підмодулів в R/aR є циклічним модулем, то довільний такий ланцюг обривається. Це означає, що модуль R/aR нетеровий. Аналогічно доводимо, що R/Ra також є нетеровим модулем. Доведемо, що модуль R/aR є також і артіновим. Нехай $m_1R \supseteq m_2R \supseteq \ldots \supseteq m_sR \supseteq \ldots$ − довільний спадний ланцюг підмодулів модуля R/aR. Згідно з другою теоремою Е. Нетер про підмодулі цьому ланцюгу відповідає ланцюг правих ідеалів $R \supset a_1R \supset a_2R \supset \ldots \supset a_sR \supset \ldots$, де $a_iR \supset aR$ і $aR / a_{i+1}R = R / m_iR$ для довільного $i = 1, 2, \ldots$. Враховуючи останнє, маємо, що $a = a_ib_i$, $i = 1, 2, \ldots$, для деякої послідовності елементів $b_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots$. Оскільки $a_{i+1}b_{i+1} = a_ib_i$ і $a_{i+1} = a_ic_i$, де $c_i \in R$, то $a_i(c_ib_{i+1} - b_i) = 0$ для кожного $i = 1, 2, \ldots$. Але $a_i \neq 0$ і, таким чином, $b_i = c_1b_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$. Розглянемо ланцюг лівих ідеалів $Rb_1 \subset Rb_2 \subset \ldots \subset Rb_s \subset \ldots$, кожний з яких містить Ra. Тоді отримаємо ланцюг підмодулів $Rb_1 / Ra \subset Rb_2 / Ra \subset \ldots \subset Rb_s / Ra \subset \ldots$ модуля R/Ra. Він обривається на деякому кроці, наприклад, p. Тому $Rb_p = Rb_{p+1}$. Оскільки $a = a_ib_i$, то $a_pR = a_{p+1}R = \ldots$. Отже, $m_pR = m_{p+1}R = \ldots$. Звідси випливає, що модуль R / aR є артіновим [4, 5]. Таким чином, доведено, що для модуля R / aR існує композиційний ряд. Отже, елемент a можна розкласти в добуток атомів, до того ж однозначно. Твердження доведено. ◊

Твердження 5. *Довільний строго факторіальний елемент R не міститься в жодному максимально неголовному ідеалі.*

Д о в е д е н н я. Нехай $a \in R$ − довільний строго факторіальний елемент. Припустимо, що a належить деякому максимально неголовному ідеалу N. Нехай $a = ua_1a_2 \ldots a_n$ − атомний розклад елемента a. Згідно з твердженням 1 деяке $a_i \in N$. Оскільки a − строго факторіальний елемент, то ідеал a_iR є максимальним. Очевидно, що $aR \subset a_iR \subset N$. З максимальності ідеалу a_iR випливає, що $a_iR = N$, а це суперечить вибору ідеалу N. ◊

Теорема 1. *Нехай R − дуо-область з єдиним максимально неголовним ідеалом N. Тоді*:

(***i***) *всі елементи області R, які не є строго факторіальними, утворюють ідеал, який співпадає з N*;

(***ii***) *довільний дільник строго факторіального елемента є строго факторіальним елементом*;

(***iii***) *для довільного елемента $a \in N$, який не є строго факторіальним елементом, і довільного строго факторіального $f \notin N$ елемент $f + a$ є строго факторіальним елементом.*

Д о в е д е н н я. (***i***). Оскільки згідно з твердженням 5 усі строго факторіальні елементи області R лежать поза N, а згідно з твердженням 4 довільний елемент, який не міститься в N, є строго факторіальним, то N − ідеал, який складається лише з елементів, які не є строго факторіальними.

(***ii***). Нехай f − строго факторіальний елемент і a − його дільник, тобто $f = ab$, де $a, b \notin U(R)$. Якщо a не є строго факторіальним, то $a \in N$ і тоді $f = ab \in N$, що суперечить вибору елемента f. Отже, a − строго факторіальний елемент.

(***iii***). Якщо $a \in N$, а $f \notin N$, то елемент $a + f \notin N$, оскільки в супротивному випадку $f = (a + f) - a \in N$. Те, що $a + f \notin N$, і означає строгу факторіальність елемента $a + f$. Теорему доведено. ◊

Нехай надалі $N(R)$ − перетин усіх максимально неголовних ідеалів області R.

Теорема 2. *Нехай* f *− довільний строго факторіальний елемент, а* n *− довільний елемент з* $N(R)$. *Тоді для будь-яких* $x, y \in R$ *елемент* $f + xny$ *є строго факторіальним.*

Д о в е д е н н я. Припустимо, що $f + xny$ не є строго факторіальним елементом. Тоді $f + xny$ є елементом деякого максимально неголовного ідеалу M. Елемент $n \in N(R)$, а тому xny належить усім максимально неголовним ідеалам, зокрема, $xny \in M$. Тоді $f = (f + xny) - xny \in M$, що суперечить вибору елемента f. Теорему доведено. ◊

Тепер розглянемо питання діагональної редукції матриць над кільцями, в яких максимально неголовний правий ідеал є двобічним. Нагадаємо необхідні означення.

Означення 8. Правим (лівим) кільцем Безу називається кільце, в якому довільний скінченно породжений правий (лівий) ідеал є головним. Кільце Безу − це кільце, яке є лівим і правим кільцем Безу.

Означення 9. Якщо довільна (1×2) ((2×1))-матриця над кільцем R зводиться до діагональної, то кільце R називається правим (лівим) кільцем Ерміта. Кільце, яке є лівим і правим ермітовим, називається ермітовим кільцем.

Означення 10. Якщо для довільної матриці над кільцем R існує канонічна діагональна форма, то таке кільце R називається кільцем елементарних дільників.

Означення 11. Кільце R є кільцем стабільного рангу 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$, існує елемент $t \in R$ такий, що $a + bt$ є оборотним елементом кільця R.

Означення 12. Якщо для довільного елемента a кільця R існує такий елемент $a_* \in R$, що $RaR = a_*R = Ra_*$, то говорять, що в кільці R виконується умова Дубровіна.

Твердження 6. *Нехай* R *− область Безу, в якій довільний максимально неголовний правий ідеал є двобічним. Нехай* a *− елемент, який не належить жодному максимально неголовному правому ідеалу. Тоді довільна* (2×2)*-матриця* A, *елементом якої є елемент* a, *еквівалентна діагональній матриці.*

Д о в е д е н н я. Нехай матриця A має вигляд

$$A = \left\| \begin{matrix} a & 0 \\ b & c \end{matrix} \right\|,$$

де елемент a не належить жодному максимально неголовному правому ідеалу.

Позначимо через X множину всіх дільників x елемента a таких, що $(x \quad 0)$ є першим рядком матриць, еквівалентних до матриці A. Оскільки x є дільником (лівим або правим) елемента a, то жоден з елементів множини X не належить жодному максимально неголовному правому ідеалу. Нехай елемент $a_1 \in X$ є мінімальним стосовно правої подільності, тобто, якщо $a_1 = p_2 a_2 q_2$ для деякого елемента $a_2 \in X$, то елемент $q_2 \in U(R)$. Покажемо, що такий елемент існує. Нехай

$$a = p_1 a_1 q_1 = p_1 p_2 a_2 q_2 q_1 = \ldots,$$

$$aR \subset p_1 a_1 R \subset p_1 p_2 a_2 R \subset \ldots . \tag{1}$$

Оскільки елемент a не належить жодному максимально неголовному правому ідеалу, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} p_i a_i R = yR$ − правий ідеал.

На підставі того, що $y \in p_i a_i R$, маємо $yR = p_i a_i R$, тобто ланцюг (1) обривається на скінченному кроці.

Таким чином, $A \sim \begin{Vmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{Vmatrix}$, де a_1 не належить жодному максимально неголовному правому ідеалу та $a_1 \in X$ є мінімальним стосовно правої подільності.

Нехай $Ra_1 + Rb_1 = Ra_2$. Оскільки R − область Безу, то існує оборотна матриця $P_1 \in \mathrm{GL}_2(R)$ така, що

$$P_1 \begin{Vmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{Vmatrix},$$

де $a_2 = pa_1$ для деякого $p \in R$. Оскільки довільний максимально неголовний правий ідеал є ідеалом, то елемент a_2 не належить жодному максимально неголовному правому ідеалу.

Аналогічно маємо $\begin{Vmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{Vmatrix} Q_1 = \begin{Vmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & c_3 \end{Vmatrix}$ для деякої матриці $Q_1 \in \mathrm{GL}_2(R)$ та $a_2 R + b_2 R = a_3 R$ і $a_2 = a_3 q$ для деякого елемента $q \in R$. Звідси випливає, що $a_1 = pa_3 q$. На підставі мінімальності елемента a_1 елемент $q \in U(R)$, тому $b_2 \in a_2 R$, тобто $b_2 = a_2 z$ для деякого $z \in R$. Таким чином,

$$\begin{Vmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{Vmatrix},$$

що й потрібно довести.

Тепер розглянемо випадок, коли елемент a стоїть на довільному місці матриці A. Перестановкою рядків і стовпців поставимо його на місце (1, 1), тобто можемо вважати, що матриця має вигляд $A = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$. Нехай $aR + bR = a'R$. Згідно з означенням елемента a і з того, що a' є лівим дільником елемента a, випливає, що a' також не належить жодному максимально неголовному правому ідеалу. Оскільки область Безу є кільцем Ерміта [7], то тоді очевидно, що матриця A еквівалентна матриці $\begin{Vmatrix} a' & 0 \\ c' & d' \end{Vmatrix}$. Згідно з доведеним вище матриця A еквівалентна діагональній. Твердження доведено повністю. ◊

Твердження 7. *Якщо* R *– область Безу, в якій виконується умова Дубровіна, то* R *є кільцем елементарних дільників тоді й тільки тоді, коли для довільної матриці* $A = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{Vmatrix}$, *де* $RaR + RbR + RcR = R$, *існує канонічна діагональна форма.*

Д о в е д е н н я. *Необхідність* очевидна. Доведемо *достатність*. Із обмежень, накладених на кільце R, випливає, що воно є ермітовим. Отже, достатньо довести, що матриця вигляду $A = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{Vmatrix}$ зводиться до канонічної діагональної форми.

Нехай

$$RaR = a_*R = Ra_*, \qquad RbR = b_*R = Rb_*, \qquad RcR = c_*R = Rc_*$$

і

$$a_*R + b_*R + c_*R = \alpha R = R\alpha = Ra_* + Rb_* + Rc_*.$$

Тоді $a = \alpha a_1 = a_2\alpha$, $b = \alpha b_1 = b_2\alpha$, $c = \alpha c_1 = c_2\alpha$ для деяких елементів a_1, a_2, $b_1, b_2, c_1, c_2 \in R$. Звідси $Ra_1R + Rb_1R + Rc_1R = Ra_2R + Rb_2R + Rc_2R$. Тоді

$$\begin{Vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha a_1 & 0 \\ \alpha b_1 & \alpha c_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & c_2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{Vmatrix}.$$

Оскільки R – область, то для довільних унімодулярних матриць $P, Q \in$ $\in \mathrm{GL}_2(R)$ можна знайти такі унімодулярні матриці $P', Q' \in \mathrm{GL}_2(R)$, що

$$\begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{Vmatrix} P = P' \begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{Vmatrix}, \qquad Q \begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{Vmatrix} Q'.$$

Згідно з обмеженнями, накладеними на кільце R, матриці $\begin{Vmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{Vmatrix}$ і $\begin{Vmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & c_2 \end{Vmatrix}$ зводяться до канонічної діагональної форми. Тоді й матриця $\begin{Vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{Vmatrix}$ зводиться до канонічної діагональної форми. Твердження доведено. ◊

Теорема 3. *Нехай* R *– область Безу стабільного рангу* 1, *у якій виконується умова Дубровіна, і довільний максимально неголовний правий ідеал є ідеалом. Тоді* R *є кільцем елементарних дільників.*

Д о в е д е н н я. Згідно з попереднім твердженням для доведення досить показати, що для довільної матриці $A = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{Vmatrix}$, де $RaR + RbR + RcR =$ $= R$, існує канонічна діагональна форма.

Оскільки R – область Безу стабільного рангу 1, то для довільних елементів $a, b \in R$ існують такі елементи $x, d \in R$, що $xa + b = d$, де $Ra + Rb =$ $= Rd$ [12]. Тоді

$$\begin{Vmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} xa + b & c \\ a & 0 \end{Vmatrix},$$

де $a = a_0 d$ для деякого $a_0 \in R$.

Нехай $cR + dR = zR$, $cy + d = z$ для деякого $y \in R$. Тоді

$$\begin{Vmatrix} d & c \\ a & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} d + cy & c \\ a & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} z & c \\ a & 0 \end{Vmatrix},$$

де $d = zt$, $c = zc_0$ для деяких елементів $t, c_0 \in R$. Отже, матриця $A = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{Vmatrix}$

еквівалентна матриці $\begin{Vmatrix} z & c \\ a & 0 \end{Vmatrix}$, де $a = a_0 zt$, $c = zc_0$. Оскільки $RaR + RbR + RcR = R$, то $RzR + RcR + RaR = RaR + RbR + RcR = R$. Зважаючи на те, що $a = a_0 zt$ і $c = zc_0$, маємо $RaR + RzR + RcR = RzR$. Отже, $RzR = R$.

Елемент z не міститься у жодному максимально неголовному правому ідеалі, оскільки в супротивному випадку туди потрапляє 1, що неможливо. Тоді згідно з твердженням 6 матриця $\begin{Vmatrix} z & c \\ a & 0 \end{Vmatrix}$, а, отже, й матриця A зводяться до канонічної діагональної форми. Теорему доведено. ◊

1. *Дубровин Н. И.* О кольцах главных правых идеалов // Изв. вузов. Математика. – 1981. – № 2. – С. 30–37.
2. *Забавский Б. В.* Об одном обобщении теоремы Коэна // XIX Всесоюз. алгебр. конф., Львов, 9–11 сент. 1987 г.: Тез. сообщ. – Львов, 1987. – Ч. 1. – С. 99.
3. *Забавский Б. В.* О максимальных элементах множества неглавных идеалов коммутативной области Безу // XVII Всесоюз. алгебр. конф., Минск, 14–17 сент. 1983 г.: Тез. сообщ. – Минск, 1983. – Ч. 2. – С. 75.
4. *Забавский Б. В.* О некоммутативных кольцах элементарных делителей // Укр. мат. журн. –1987. – **39**, № 4. – С. 440–444.
5. *Забавский Б. В.* Факториальные элементы коммутативной области Безу // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1985. – Вып. 22. – С. 32–33.
6. *Забавський Б. В.* Факторіальний аналог дистрибутивних областей Безу // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 11. – С. 1564–1567.
7. *Amitsur S. A.* Remarks of principal ideal rings // Osaka Math. J. – 1963. – **15.** P. 59–69.
8. *Caruth A.* On Cohen's theorem // Coll. Math. – 1982. – **46**, No. 2. – P. 137–141.
9. *Chandran R.* On two analogies of Cohen's theorem // Indian J. Pure and Appl. Math. – 1977. – **8**, No. 1. – P. 54–59.
10. *Cohen I. S.* Commutative rings with restricted minimum conditions // Duke Math. J. – 1950. – **17**. – P. 24–42.
11. *Michler G.* Prime right ideals and right Noetherian rings // Proc. Conf. on Ring Theory. – New York – London: Acad. Press, 1972. – P. 251–255.
12. *Zabavsky B. V.* Diagonalizability theorem for matrices over rings with finite stable range // Algebra and Discrete Math. – 2005. – No. 1. – P. 134–148.

СТРОГО ФАКТОРИАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ДУО-ОБЛАСТИ

Изучаются максимально неглавные идеалы дуо-колец и их связь с элементами, имеющими конечное число атомных делителей. Также рассматривается редукция матриц над классом колец, в которых любой максимально неглавный правый идеал является двусторонним.

STRONG FACTORIAL ELEMENTS OF DUO-DOMAIN

We investigate the maximal non-principal ideals of a duo-ring and their relation to the elements with finite number of atomic divisors. Also we investigate the reduction of matrices over a class of rings, in which any maximal non-principal ideal is a two-sided ideal.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
31.10.05