УДК 519.46:517.944

В. М. Федорчук[1,2], В. І. Федорчук[2,3]

ПРО ФУНКЦІОНАЛЬНІ БАЗИСИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ІНВАРІАНТІВ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ НЕПЕРЕРВНИХ ПІДГРУП ГРУПИ ПУАНКАРЕ $P(1,4)$

Встановлено, які з функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку розщеплюваних і нерозщеплюваних підгруп групи Пуанкаре $P(1,4)$ належать до абелевих підгруп, а які – до неабелевих підгруп. Отримані множини функціональних базисів прокласифіковано за розмірностями. Вибрано по одному функціональному базису диференціальних інваріантів для кожного типу з розглядуваних підгруп.

Диференціальні інваріанти груп Лі точкових перетворень широко використовуються у теорії диференціальних рівнянь, геометрії, теоретичній і математичній фізиці, газовій динаміці тощо (див., наприклад, [2, 3, 8, 9, 16, 17]).

Група $P(1,4)$ є групою поворотів і зсувів п'ятивимірного простору Мінковського $M(1,4)$. Вона широко використовується при розгляді різних питань теоретичної і математичної фізики (див. [1, 10]).

Для всіх неперервних підгруп [4, 5, 15] групи $P(1,4)$ побудовано нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку. Деякі з отриманих результатів можна знайти в роботах [6, 7, 11–14].

Ця робота присвячена подальшому вивченню функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неперервних підгруп групи $P(1,4)$. Зокрема, встановлено, які з побудованих раніше функціональних базисів відносяться до абелевих підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$, а які – до неабелевих підалгебр. Крім того, функціональні базиси, які відносяться до абелевих і неабелевих підалгебр, прокласифіковано за їх розмірностями.

1. Алгебра Лі групи $P(1,4)$. Алгебра Лі групи $P(1,4)$ задається 15 базисними елементами $M_{\mu\nu} = - M_{\nu\mu}$, $\mu,\nu = 0,1,2,3,4$, і P'_μ, $\mu = 0,1,2,3,4$, які задовольняють комутаційні співвідношення

$$[P'_\mu, P'_\nu] = 0\,,$$

$$[M'_{\mu\nu}, P'_\sigma] = g_{\mu\sigma}P'_\nu - g_{\nu\sigma}P'_\mu\,,$$

$$[M'_{\mu\nu}, M'_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}M'_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M'_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M'_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M'_{\nu\rho}\,,$$

де $g_{\mu\nu}$, $\mu,\nu = 0,1,2,3,4$, – метричний тензор з компонентами $g_{00} = - g_{11} = - g_{22} = - g_{33} = - g_{44} = 1$ і $g_{\mu\nu} = 0$, якщо $\mu \ne \nu$. Тут і всюди надалі $M'_{\mu\nu} = iM_{\mu\nu}$.

У цій роботі розглядатимемо таке зображення для алгебри Лі групи $P(1,4)$:

$$P'_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}\,, \qquad P'_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}\,, \qquad P'_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2}\,,$$

$$P'_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3}\,, \qquad P'_4 = -\frac{\partial}{\partial x_4}\,, \qquad M'_{\mu\nu} = -(x_\mu P'_\nu - x_\nu P'_\mu)\,.$$

Надалі перейдемо від $M'_{\mu\nu}$ і P'_μ до таких лінійних комбінацій:

$$G = M'_{40}\,, \qquad L_1 = M'_{32}\,, \qquad L_2 = -M'_{31}\,, \qquad L_3 = M'_{21}\,,$$

$$P_a = M'_{4a} - M'_{a0}, \qquad C_a = M'_{4a} + M'_{a0}, \qquad a = 1,2,3,$$

$$X_0 = \frac{P'_0 - P'_4}{2}, \qquad X_k = P'_k, \qquad k = 1,2,3, \qquad X_4 = \frac{P'_0 + P'_4}{2}.$$

2. Про функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неперервних розщеплюваних підгруп групи $P(1,4)$**.** Шляхом вивчення структурних сталих для неспряжених розщеплюваних підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ встановлено, які з побудованих раніше функціональних базисів відносяться до абелевих підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$, а які – до неабелевих підалгебр.

Розщеплювані абелеві підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ мають 51 нееквівалентний функціональний базис диференціальних інваріантів першого порядку.

Для розщеплюваних підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ існують функціональні базиси з розмірностями від 2 до 10.

Спочатку розглянемо ***абелеві розщеплювані підалгебри***.

Абелеві розщеплювані підалгебри мають функціональні базиси, починаючи з розмірності 6.

Існує тільки 1 *шестивимірний функціональний базис*. Нижче наведемо базисні елементи відповідної абелевої підалгебри, а також її функціональний базис:

$\langle X_0 + X_4, X_1, X_2, X_3, X_0 - X_4 \rangle$:

$$J_1 = u, \qquad J_2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2, \qquad J_3 = u_0, \qquad J_4 = u_1,$$

$$J_5 = u_2, \qquad J_6 = u_3, \qquad u_\mu \equiv \frac{\partial u}{\partial x_\mu}, \qquad \mu = 0,1,2,3,4.$$

Існує 8 *семивимірних функціональних базисів*. Нижче наведемо базисні елементи однієї з абелевих підалгебр, а також її функціональний базис:

$\langle P_1, P_2, P_3, X_4 \rangle$:

$$J_1 = u, \qquad J_2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2, \qquad J_3 = x_0 + x_4,$$

$$J_4 = \frac{x_1}{x_0+x_4} + \frac{u_1}{u_0-u_4}, \qquad J_5 = \frac{x_2}{x_0+x_4} + \frac{u_2}{u_0-u_4},$$

$$J_6 = \frac{x_3}{x_0+x_4} + \frac{u_3}{u_0-u_4}, \qquad J_7 = u_0 - u_4.$$

Існує 15 *восьмивимірних функціональних базисів*. Нижче наведемо базисні елементи однієї з абелевих підалгебр, а також її функціональний базис:

$\langle G, L_3, X_3 \rangle$:

$$J_1 = u, \qquad J_2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2, \qquad J_3 = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2},$$

$$J_4 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \qquad J_5 = x_1 u_2 - x_2 u_1, \qquad J_6 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),$$

$$J_7 = u_3, \qquad J_8 = u_0^2 - u_4^2.$$

Існує 17 *дев'ятивимірних функціональних базисів*. Нижче наведемо базисні елементи однієї з абелевих підалгебр, а також її функціональний базис:

$\langle L_3, P_3 \rangle$:

$$J_1 = u, \qquad J_2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2, \qquad J_3 = x_0 + x_4,$$

$$J_4 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \qquad J_5 = (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2}, \qquad J_6 = x_1 u_2 - x_2 u_1,$$

$$J_7 = (x_0 + x_4) u_3 + (u_0 - u_4) x_3, \quad J_8 = u_0 - u_4, \quad J_9 = u_1^2 + u_2^2.$$

Існує 10 *десятивимірних функціональних базисів*. Нижче наведемо базисні елементи однієї з абелевих підалгебр, а також її функціональний базис:

$\langle P_3 + C_3 + eL_3,\ e > 2 \rangle$:

$$J_1 = u, \quad J_2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2, \quad J_3 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},$$

$$J_4 = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}, \quad J_5 = x_0, \quad J_6 = 2\arctan\frac{x_1}{x_2} - e\arctan\frac{x_3}{x_4},$$

$$J_7 = x_1u_2 - x_2u_1, \quad J_8 = x_3u_4 - x_4u_3, \quad J_9 = u_0, \quad J_{10} = u_1^2 + u_2^2.$$

Тепер розглянемо ***неабелеві розщеплювані підалгебри***. Розщеплювані неабелеві підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ мають 192 нееквівалентних функціональних базиси диференціальних інваріантів першого порядку.

Неабелеві розщеплювані підалгебри мають функціональні базиси розмірності від 2 до 9.

Існує тільки 1 *двовимірний функціональний базис*. Нижче наведемо базисні елементи відповідних неабелевих підалгебр, а також їх функціональний базис:

$\langle G, P_1, P_2, P_3, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$,

$\langle L_3 + eG, P_1, P_2, P_3, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4,\ e > 0 \rangle$,

$\langle G, L_3, P_1, P_2, P_3, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$,

$\langle G, L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$,

$\langle G, C_1, C_2, C_3, L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$:

$$J_1 = u, \quad J_2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2.$$

Існує 7 *тривимірних функціональних базисів*. Нижче наведемо базисні елементи відповідних неабелевих підалгебр, а також їх функціональний базис:

$\langle G, P_1, P_2, P_3, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$,

$\langle L_3 + eG, P_1, P_2, P_3, X_1, X_2, X_3, X_4,\ e > 0 \rangle$,

$\langle G, L_3, P_1, P_2, P_3, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$,

$\langle G, L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$:

$$J_1 = u, \quad J_2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2, \quad J_3 = \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}.$$

Існує 18 *чотиривимірних функціональних базисів*. Нижче наведемо базисні елементи однієї з неабелевих підалгебр, а також її функціональний базис:

$\langle P_3 + C_3, L_3, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$:

$$J_1 = u, \quad J_2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2, \quad J_3 = u_0, \quad J_4 = u_3^2 + u_4^2.$$

Існує 37 *п'ятивимірних функціональних базисів*. Нижче наведемо базисні елементи однієї з неабелевих підалгебр, а також її функціональний базис:

$\langle G, L_1, L_2, L_3, X_0, X_4 \rangle$:

$$J_1 = u, \quad J_2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2, \quad J_3 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2},$$

$$J_4 = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3, \quad J_5 = u_0^2 - u_4^2.$$

Існує 50 *шестивимірних функціональних базисів.* Нижче наведемо базисні елементи однієї з неабелевих підалгебр, а також її функціональний базис:

$\langle G, L_3, P_1, P_2, X_3 \rangle$:

$$J_1 = u, \quad J_2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2,$$

$$J_3 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2)^{1/2}, \quad J_4 = \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},$$

$$J_5 = \left(x_1 + \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_1\right)^2 + \left(x_2 + \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_2\right)^2, \quad J_6 = u_3 .$$

Існує 50 *семивимірних функціональних базисів.* Нижче наведемо базисні елементи однієї з неабелевих підалгебр, а також її функціональний базис:

$\langle G, P_1, P_2, X_4 \rangle$:

$$J_1 = u, \quad J_2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2, \quad J_3 = x_3, \quad J_4 = \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},$$

$$J_5 = u_1 + \frac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} x_1, \quad J_6 = x_2 + \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_2, \quad J_7 = u_3 .$$

Існує 25 *восьмивимірних функціональних базисів.* Нижче наведемо базисні елементи однієї з неабелевих підалгебр, а також її функціональний базис:

$\langle G, P_3, L_3 \rangle$:

$$J_1 = u, \quad J_2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2, \quad J_3 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},$$

$$J_4 = (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2}, \quad J_5 = x_1 u_2 - x_2 u_1, \quad J_6 = \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},$$

$$J_7 = \frac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} x_3 + u_3, \quad J_8 = u_1^2 + u_2^2 .$$

Існує 4 *дев'ятивимірних функціональних базиси.* Нижче наведемо базисні елементи однієї з неабелевих підалгебр, а також її функціональний базис:

$\langle L_3 + eG, P_3, \ e > 0 \rangle$:

$$J_1 = u, \quad J_2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2, \quad J_3 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},$$

$$J_4 = (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2}, \quad J_5 = \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}, \quad J_6 = x_1 u_2 - x_2 u_1,$$

$$J_7 = \frac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} x_3 + u_3, \quad J_8 = \ln(x_0 + x_4) + e \arctan \frac{x_1}{x_2}, \quad J_9 = u_1^2 + u_2^2 .$$

3. Про функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неперервних нерозщеплюваних підгруп групи $P(1,4)$**.** Шляхом вивчення структурних сталих для неспряжених нерозщеплюваних підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ встановлено, які з побудованих раніше функціональних базисів відносяться до абелевих підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$, а які – до неабелевих підалгебр.

Нерозщеплювані абелеві підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ мають 52 нееквівалентних функціональних базиси диференціальних інваріантів першого порядку.

Для нерозщеплюваних підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ існують функціональні базиси з розмірностями від 3 до 10.

Спочатку розглянемо ***абелеві нерозщеплювані підалгебри***.

Абелеві нерозщеплювані підалгебри мають функціональні базиси, починаючи з розмірності 7.

Існує 3 *семивимірних функціональних базиси*. Нижче наведено базисні елементи однієї з абелевих підалгебр, а також її функціональний базис:

$\langle P_1, P_2 + X_2, P_3 + \gamma X_3, X_4, \ \gamma > 0 \rangle$:

$$J_1 = x_0 + x_4, \quad J_2 = u, \quad J_3 = x_1(u_0 - u_4) + u_1(x_0 + x_4),$$

$$J_4 = \frac{x_2}{x_0+x_4-1} + \frac{u_2}{u_0-u_4}, \quad J_5 = x_3 \frac{u_0-u_4}{x_0+x_4-\gamma} + u_3,$$

$$J_6 = u_0 - u_4, \quad J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2.$$

Існує 14 *восьмивимірних функціональних базисів*. Нижче наведемо базисні елементи однієї з абелевих підалгебр, а також її функціональний базис:

$\langle P_1, P_2 + X_2, X_3 \rangle$:

$$J_1 = x_0 + x_4, \quad J_2 = \frac{x_1^2+x_4^2-x_0^2}{x_0+x_4} + \frac{x_2^2}{x_0+x_4-1}, \quad J_3 = u,$$

$$J_4 = \frac{x_1}{x_0+x_4} + \frac{u_1}{u_0-u_4}, \quad J_5 = \frac{x_2}{x_0+x_4-1} + \frac{u_2}{u_0-u_4}, \quad J_6 = u_3,$$

$$J_7 = u_0 - u_4, \quad J_8 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2.$$

Існує 25 *дев'ятивимірних функціональних базисів*. Нижче наведемо базисні елементи однієї з абелевих підалгебр, а також її функціональний базис:

$\langle G + \alpha X_3, L_3 + \beta X_3, \ \alpha < 0, \ \beta < 0 \rangle$:

$$J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad J_2 = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2}, \quad J_3 = u, \quad J_4 = \frac{x_0-x_4}{u_0+u_4},$$

$$J_5 = x_1 u_1 + x_2 u_2, \quad J_6 = \beta \arctan \frac{u_1}{u_2} + x_3 - \alpha \ln(x_0 + x_4),$$

$$J_7 = u_3, \quad J_8 = u_0^2 - u_4^2, \quad J_9 = u_1^2 + u_2^2.$$

Існує 10 *десятивимірних функціональних базисів*. Нижче наведемо базисні елементи однієї з абелевих підалгебр, а також її функціональний базис:

$\langle P_3 + C_3 + eL_3 + \alpha(X_0 + X_4), \ e > 2, \ \alpha < 0 \rangle$:

$$J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad J_2 = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}, \quad J_3 = ex_0 - \alpha \arctan \frac{x_1}{x_2},$$

$$J_4 = u, \quad J_5 = x_1 u_2 - x_2 u_1, \quad J_6 = x_3 u_4 - x_4 u_3,$$

$$J_7 = 2x_0 + \alpha \arctan \frac{u_4}{u_3}, \quad J_8 = u_0, \quad J_9 = u_1^2 + u_2^2, \quad J_{10} = u_3^2 + u_4^2.$$

Тепер розглянемо ***неабелеві нерозщеплювані підалгебри***.

Нерозщеплювані неабелеві підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ мають 207 нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку.

Неабелеві нерозщеплювані підалгебри мають функціональні базиси з розмірностями від 3 до 9.

Існує 4 *тривимірних функціональних базиси.* Нижче наведемо базисні елементи однієї з неабелевих підалгебр, а також її функціональний базис:

$$\Big\langle L_1 + \frac{1}{2}(P_1 + C_1),\ L_2 + \frac{1}{2}(P_2 + C_2),\ L_3 + \frac{1}{2}(P_3 + C_3),$$

$$L_3 - \frac{1}{2}(P_3 + C_3) + \alpha(X_0 + X_4),\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_0 - X_4,\ \alpha < 0\Big\rangle:$$

$$J_1 = u, \quad J_2 = u_0, \quad J_3 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2.$$

Існує 7 *чотиривимірних функціональних базисів.* Нижче наведемо базисні елементи однієї з неабелевих підалгебр, а також її функціональний базис:

$$\langle L_3 + cG + bX_3,\ P_1,\ P_2,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ c > 0,\ b < 0\rangle:$$

$$J_1 = u, \quad J_2 = cx_3 - b\ln(u_0 - u_4), \quad J_3 = u_3, \quad J_4 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2.$$

Існує 26 *п'ятивимірних функціональних базисів.* Нижче наведемо базисні елементи однієї з неабелевих підалгебр, а також її функціональний базис:

$$\langle G + aX_3,\ L_3 + dX_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_4,\ a < 0,\ d < 0\rangle:$$

$$J_1 = u, \quad J_2 = \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}, \quad J_3 = \left(x_1 + \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_1\right)^2 + \left(x_2 + \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_2\right)^2,$$

$$J_4 = x_3 - a\ln(x_0 + x_4) + \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_3 + d\arctan\left(\frac{x_1(u_0 - u_4) + u_1(x_0 + x_4)}{x_2(u_0 - u_4) + u_2(x_0 + x_4)}\right),$$

$$J_5 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2.$$

Існує 57 *шестивимірних функціональних базисів.* Нижче наведемо базисні елементи однієї з неабелевих підалгебр, а також її функціональний базис:

$$\langle P_1 + \delta X_3,\ P_2 + X_3,\ P_3 - X_2 + \mu X_3,\ X_1,\ X_4,\ \delta > 0\rangle:$$

$$J_1 = x_0 + x_4, \quad J_2 = u, \quad J_3 = x_2(u_0 - u_4) + u_2(x_0 + x_4) + u_3,$$

$$J_4 = x_3(u_0 - u_4) + (x_0 + x_4 - \mu)u_3 - \delta u_1 - u_2, \quad J_5 = u_0 - u_4,$$

$$J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2.$$

Існує 75 *семивимірних функціональних базисів.* Нижче наведемо базисні елементи однієї з неабелевих підалгебр, а також її функціональний базис:

$$\langle L_3,\ P_3 + C_3 + \alpha(X_0 + X_4),\ X_1,\ X_2,\ \alpha < 0\rangle:$$

$$J_1 = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}, \quad J_2 = 2x_0 + \alpha\arctan\frac{x_4}{x_3}, \quad J_3 = u,$$

$$J_4 = x_3u_4 - x_4u_3, \quad J_5 = u_0, \quad J_6 = u_1^2 + u_2^2, \quad J_7 = u_3^2 + u_4^2.$$

Існує 35 *восьмивимірних функціональних базисів.* Нижче наведемо базисні елементи однієї з неабелевих підалгебр, а також її функціональний базис:

$$\langle G + cX_1,\ X_0,\ X_4,\ c < 0\rangle:$$

$$J_1 = x_2, \quad J_2 = x_3, \quad J_3 = u, \quad J_4 = x_1 - c\ln(u_0 - u_4), \quad J_5 = u_1,$$

$$J_6 = u_2, \quad J_7 = u_3, \quad J_8 = u_0^2 - u_4^2.$$

Існує 3 *дев'ятивимірних функціональних базиси*. Нижче наведемо базисні елементи однієї з неабелевих підалгебр, а також її функціональний базис:

$$\langle L_3 + eG + æ_3 X_3,\ X_4,\ e > 0,\ æ_3 < 0 \rangle :$$

$$J_1 = x_1 u_2 - x_2 u_1, \quad J_2 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),$$

$$J_3 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad J_4 = \ln(x_0 + x_4) + e \arctan \frac{x_1}{x_2}, \quad J_5 = u,$$

$$J_6 = æ_3 \ln(u_0 + u_4) + e x_3, \quad J_7 = u_3, \quad J_8 = u_0^2 - u_4^2, \quad J_9 = u_1^2 + u_2^2.$$

1. *Кадышевский В. Г.* Новый подход к теории электромагнитных взаимодействий // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1980. – **11**, № 1. – С. 5–39.
2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 399 с.
3. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир, 1989. – 639 с.
4. *Федорчук В. М.* Нерасщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 5. – С. 696–700.
5. *Федорчук В. М.* Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, № 6. – С. 717–722.
6. *Федорчук В. М., Федорчук В. І.* Диференціальні інваріанти першого порядку розщеплюваних підгруп узагальненої групи Пуанкаре $P(1,4)$ // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 1. – С. 16–21.
7. *Федорчук В. М., Федорчук В. І.* Про диференціальні інваріанти першого порядку розщеплюваних підгруп узагальненої групи Пуанкаре $P(1,4)$ // Доп. НАН України. – 2002. – № 5. – С. 36–42.
8. *Фущич В. И., Егорченко И. А.* Дифференциальные инварианты алгебры Галилея // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 4. – С. 19–34.
9. *Фущич В. И., Егорченко И. А.* Дифференциальные инварианты алгебры Пуанкаре и конформной алгебры // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 5. – С. 46–53.
10. *Фущич В. И., Никитин А. Г.* Симметрия уравнений квантовой механики. – Москва: Наука, 1990. – 400 с.
11. *Fedorchuk V. M., Fedorchuk V. I.* On differential invariants of first- and second-order of the splitting subgroups of the generalized Poincaré group $P(1,4)$ // Proc. 4th Int. Conf. «Symmetry in Nonlinear Math. Phys.» (Ukr. Math. Congr. Dedicated to 200th Anniversary of M. Ostrohrads'kyi), Kyiv, 9–15 July, 2001. – Part 1. – Kyiv: Inst. of Math. of NAS of Ukraine. – 2002. – P. 140–144. – (Proc. Inst. of Math. of NAS of Ukraine. – 2002. – **43**, Part 1).
12. *Fedorchuk V. M., Fedorchuk V. I.* On the differential first-order invariants for the non-splitting subgroups of the generalized Poincare group $P(1,4)$ // Ann. Acad. Paedag. Cracoviensis: Studia Math. IV. – 2004. – Folia 23. – P. 65–74.
13. *Fedorchuk Vas., Fedorchuk Vol.* On the differential first-order invariants of the non-splitting subgroups of the Poincare group $P(1,4)$ // Proc. Inst. Math. of NAS of Ukraine. – 2004. – **50**. – Part 1. – P. 85–91.
14. *Fedorchuk Vas., Fedorchuk Vol.* Some new differential equations of the first-order in the spaces $M(1,3) \times R(u)$ and $M(1,4) \times R(u)$ with given symmetry groups // Funct. Anal. and its Appl.: North-Holland Math. Studies / Ed. Saul Lubkin. – Elsevier, 2004. – **197**. – P. 85–95.
15. *Fushchich W. I., Barannik A. F., Barannik L. F., Fedorchuk V. M.* Continuous subgroups of the Poincare group $P(1,4)$ // J. Phys. A: Math. Gen. – 1985. – **18**, No. 14. – P. 2893–2899.
16. *Lie S.* Über Differentialinvarianten // Math. Ann. – 1884. – **24**, No. 1. – S. 52–89.
17. *Vessiot E.* Sur l'integration des sistem differentiels qui admittent des groupes continus de transformations // Acta math. – 1904. – **28**. – P. 307–349.

О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ БАЗИСАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НЕПРЕРЫВНЫХ ПОДГРУПП ГРУППЫ ПУАНКАРЕ $P(1,4)$

Установлено, какие из функциональных базисов дифференциальных инвариантов первого порядка расщепляемых и нерасщепляемых подгрупп группы Пуанкаре $P(1,4)$ *принадлежат к абелевым подгруппам, а какие – к неабелевым подгруппам. Полученные множества функциональных базисов проклассифицированы по размерностям. Выбрано по одному функциональному базису дифференциальных инвариантов для каждого типа из рассматриваемых подгрупп.*

ON FUNCTIONAL BASES OF THE FIRST-ORDER DIFFERENTIAL INVARIANTS OF CONTINUOUS SUBGROUPS OF POINCARÉ GROUP $P(1,4)$

It is determined which functional bases of differential first-order invariants of splited and not splited subgroups of Poincaré group $P(1,4)$ *belong to the Abelian subgroups and which of them – to the non-Abelian ones. The obtained sets of functional bases are classified according to dimensions. For each type of the subgroups considered one functional basis of differential invariants is chosen.*

[1] Ін-т математики, Педаг. акад. ім. Комісії Нар. Освіти, Краків, Польща,

[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

[3] Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано 23.09.05