УДК 512.64

В. М. Прокіп

ПРО СПІЛЬНІ ДІЛЬНИКИ МАТРИЦЬ НАД ФАКТОРІАЛЬНИМИ ОБЛАСТЯМИ

Досліджується задача про спільні дільники матриць над факторіальними областями. Встановлено необхідні, а при деяких обмеженнях і достатні умови існування спільного неособливого дільника двох матриць. Отримані в роботі результати мають безпосереднє застосування в дослідженні спільних унітальних дільників многочленних матриць над факторіальною областю.

Нехай R – факторіальна область з одиницею $e \neq 0$; $R_{n,m}$ і $R_{n,m}[x]$ – множина $(n \times m)$-матриць над R і кільцем многочленів $R[x]$; I_k – одинична матриця порядку k; O – нульова матриця, розмір якої визначається із контексту формули. Надалі через d_A^k позначатимемо найбільший спільний дільник (н. с. д.) мінорів k-го порядку матриці $A \in R_{n,m}$, $k = 1, 2, \ldots, \min\{n, m\}$. Під записом (a, b) будемо розуміти н. с. д. елементів $a, b \in R$. Елемент $a \neq 0$ кільця R називатимемо регулярним (за аналогією з [10, с. 22]), якщо він не є дільником одиниці в R. Матрицю $D \in R_{n,n}$ будемо називати регулярною, якщо її визначник $\det D = d$ є регулярним елементом, а через D^* позначатимемо взаємну матрицю для D, тобто $DD^* = D^*D = d \cdot I_n$.

Матриці $B \in R_{n,m}$ і $C \in R_{n,k}$ мають спільний лівий дільник, якщо вони допускають зображення у вигляді добутків $B = DF$, $C = DG$, де $D \in R_{n,n}$ – регулярна матриця. Задача про спільні дільники матриць вивчалась у роботах [1–4, 7, 8, 11–13, 15–18], де наведено достатньо повну бібліографію досліджень у цьому напрямку. Зокрема, відмітимо, що задача про спільні дільники многочленних матриць над полем відіграє важливу роль у теорії систем диференціальних рівнянь і її застосуваннях у ряді напрямків прикладного характеру [13, 16, 18].

У цій роботі встановлено умови існування спільних лівих дільників матриць над областями головних ідеалів. На підставі здобутих результатів для многочленних матриць над факторіальною областю наведено умови існування спільних унітальних дільників.

Твердження 1. *Нехай регулярна матриця* $D \in R_{n,n}$ *із визначником* $\det D = d$ *є спільним лівим дільником матриць* $B \in R_{n,n}$, $\operatorname{rank} B \geq n-1$, *та* $C \in R_{n,m}$, *тобто* $B = DB_1$ *і* $C = DC_1$. *Тоді* $B^*C = 0 \pmod{d}$.

Д о в е д е н н я. Нехай регулярна матриця $D \in R_{n,n}$ є спільним лівим дільником матриць $B \in R_{n,n}$, $\operatorname{rank} B \geq n-1$, та $C \in R_{n,m}$, тобто $B = DB_1$ і $C = DC_1$. Оскільки $\operatorname{rank} B \geq n-1$, то $B^* = B_1^* D^*$ – ненульова матриця. Отже, $B^*C = B_1^* D^* D C_1 = dB_1^* C_1$, тобто $B^*C = 0 \pmod{d}$, що й доводить твердження. ◊

Наслідок 1. *Нехай для матриць* $B \in R_{n,n}$, $\operatorname{rank} B \geq n-1$, *і* $C \in R_{n,m}$ *виконується умова* $B^*C \neq O$. *Якщо елементи матриці* B^*C *взаємно прості, то матриці* B і C *взаємно прості зліва, тобто їхніми спільними лівими дільниками є лише оборотні матриці.*

Припустимо, що для матриць $B \in R_{n,n}$, $\operatorname{rank} B \ge n-1$, і $C \in R_{n,m}$ виконується $B^*C = 0 \,(\operatorname{mod} d)$, де $d \in R$ – регулярний елемент. З огляду на твердження 1 закономірно виникає питання: за яких умов із рівності $B^*C = 0(\operatorname{mod} d)$, де $d \in R$ – регулярний елемент, випливає, що для матриць B і C існує спільний лівий дільник $D \in R_{n,n}$ із визначником $\det D = d$?

Нехай $R = K$ – область головних ідеалів. Опишемо класи матриць над областю головних ідеалів K, для яких умови твердження 1 будуть також і достатніми для існування спільного лівого дільника з заданим визначником.

Теорема 1. *Нехай* $B \in K_{n,n}$, $\operatorname{rank} B \ge n-1$, *і* $C \in K_{n,m}$. *Нехай, далі,* $d \in K$ – *регулярний елемент такий, що* $d \mid \det B$. *Якщо* $\left(d, \dfrac{\det B}{d}, d_B^{n-1}\right) = e$, *то для матриць* B *і* C *існує спільний лівий дільник* $D \in K_{n,n}$ *з визначником* $\det D = d$ *тоді й тільки тоді, коли* $B^*C = 0 \,(\operatorname{mod} d)$. *Якщо ж шуканий дільник існує, то він однозначно з точністю до асоційовності справа визначається елементом* d.

Д о в е д е н н я. *Необхідність* випливає з твердження 1.

Достатність. Спочатку доведемо таке

Твердження 2. *Нехай для матриць* $F \in K_{n,n}$, $\det F \ne 0$, *і* $G \in K_{n,m}$ *виконується рівність* $FG = aG_1$ ($GF = aG_1$), *де* $a \in K$ – *регулярний елемент. Якщо* $(\det F, a) = e$, *то* $G = 0 \,(\operatorname{mod} a)$.

Д о в е д е н н я. Оскільки $\det F \ne 0$ і $FG = aG_1 \ne O$, то з цієї рівності випливає $G(\det F) = F^*G_1 a$. Так як $(\det F, a) = e$, то з останньої рівності отримуємо $G = 0 \,(\operatorname{mod} a)$. Випадок $GF = aG_1$ доводиться аналогічно. Твердження доведено. ◊

Нагадаємо, що для матриці $A \in K_{n,m}$, $\operatorname{rank} A = r$, існують матриці $U \in \operatorname{GL}(n,K)$ та $V \in \operatorname{GL}(m,K)$ такі, що $UAV = F_A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_r, 0, \dots, 0)$ – діагональна матриця з елементами $a_j \ne 0$, $1 \le j \le r$, на головній діагоналі, а на всіх решті місцях розміщаються нулі, і $a_1 \mid a_2 \mid \dots \mid a_r$. Матрицю F_A називають канонічною діагональною формою матриці A.

Нехай $\operatorname{rank} B = n$. На підставі наслідку 1 із [9] матриці B і C допускають зображення у вигляді добутків

$$B = U_1 T F_B V, \qquad C = U_1 F_C W,$$

де $F_B = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n) \in K_{n,n}$; $F_C = \operatorname{diag}(c_1, c_2, \dots, c_r, 0, \dots, 0) \in K_{n,m}$; $U_1 \in \operatorname{GL}(n,K)$, $V \in \operatorname{GL}(n,K)$, $W \in \operatorname{GL}(m,K)$ і $T \in \operatorname{GL}(n,K)$ – нижня трикутна матриця. Тепер рівність $B^*C = 0 \,(\operatorname{mod} d)$ запишемо у вигляді

$$V^* F_B^* T^* U_1^* U_1 F_C W = V^* F_B^* T^* F_C W (\det U_1) = 0 \,(\operatorname{mod} d).$$

Оскільки V і W – оборотні матриці, то з останньої рівності на підставі твердження 2 отримуємо

$$F_B^* T^* F_C = 0 \,(\operatorname{mod} d). \tag{1}$$

З огляду на те, що $\left(d, \dfrac{\det B}{d}, d_B^{n-1}\right) = e$, згідно з теоремою 1 із [6] для матриці F_B існує факторизація $F_B = F_1 F_2$ така, що $F_1 = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) \in K_{n,n}$ і $F_2 = \operatorname{diag}(g_1, g_2, \dots, g_{n-1}, g_n) \in K_{n,n}$ – неособливі d-матриці, причому $\det F_1 = d$ і $(d_i, g_j) = e$ для всіх $1 \le i \le n$ та $1 \le j \le n$, за винятком $i = j = n$. Очевидно, що $F_B^* = \operatorname{diag}\left(\frac{b}{d_1 g_1}, \ \frac{b}{d_2 g_2}, \ \dots \ \frac{b}{d_n g_n} \right)$, де $b = \det F_B$. Поклавши

$$T^* F_C = \begin{Vmatrix} c_1 & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ c_{21} & c_2 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_r & 0 & \dots & 0 \\ c_{r+1,1} & c_{r+1,2} & \dots & c_{r+1,r} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ c_{n,1} & c_{n2} & \dots & c_{n,r} & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix},$$

рівність (1) запишемо в розгорнутому вигляді

$$\begin{Vmatrix} \frac{c_1 b}{d_1 g_1} & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ \frac{c_{21} b}{d_2 g_2} & \frac{c_2 b}{d_2 g_2} & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \frac{c_{r1} b}{d_r g_r} & \frac{c_{r2} b}{d_r g_r} & \dots & \frac{c_r b}{d_r g_r} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{c_{r+1,1} b}{d_{r+1} g_{r+1}} & \frac{c_{r+1,2} b}{d_{r+1} g_{r+1}} & \dots & \frac{c_{r+1,r} b}{d_{r+1} g_{r+1}} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \frac{c_{n,1} b}{d_n g_n} & \frac{c_{n,2} b}{d_n g_n} & \dots & \frac{c_{n,r} b}{d_n g_n} & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} = 0 \,(\operatorname{mod} d).$$

Звідси отримуємо, що $\frac{c_k b}{d_k g_k} = 0 \,(\operatorname{mod} d)$ для всіх $k = 1, 2, \dots, r$, а також $\frac{c_{\ell k} b}{d_\ell g_\ell} = 0 \,(\operatorname{mod} d)$ для всіх $2 \le \ell \le n$ та $1 \le k \le r$.

Із рівності $\frac{c_k b}{d_k g_k} = 0 \,(\operatorname{mod} d)$ випливає, що $c_k g_1 g_2 \dots g_{k-1} g_{k+1} \dots g_n = 0 \,(\operatorname{mod} d_k)$. Оскільки $(d_i, g_j) = e$ при $i \ne j$, то з останньої рівності маємо $c_k = 0 \,(\operatorname{mod} d_k)$. Отже, $c_k = d_k h_k$ для всіх $k = 1, 2, \dots, r$. Як і в попередньому випадку, з рівності $\frac{c_{\ell k} b}{d_\ell g_\ell} = 0 \,(\operatorname{mod} d)$ здобуваємо $c_{mk} g_1 g_2 \dots g_{k-1} g_{k+1} \dots g_n = 0 \,(\operatorname{mod} d_\ell)$. Аналогічно з цієї рівності отримуємо $c_{\ell k} = 0 \,(\operatorname{mod} d_\ell)$ для всіх $k = 1, 2, \dots, r$, тобто $c_{\ell k} = d_k h_{\ell k}$ для всіх $2 \le \ell \le n$ та $1 \le k \le r$.

Отже, із рівності (1) випливає $T^* F_C = F_1 H$. Оскільки $T \in \mathrm{GL}(n, K)$, то з останньої рівності отримуємо $T^{-1} F_C = F_1 G$. Тепер неважко переконатись у тому, що для матриць B і C існують факторизації

$$B = U_1 T F_1 Q Q^{-1} F_2 V = D B_1, \qquad C = U_1 T F_1 Q Q^{-1} G W = D C_1,$$

де $D = U_1 T F_1 Q$, а матриця $Q \in \mathrm{GL}(n, K)$ вибрана так, що $\det D = d$. Отже, матриця D − спільний лівий дільник матриць B і C.

Тепер розглянемо випадок, коли $\operatorname{rank} B = n - 1$. Так як $\det B = 0$, то зі співвідношення $\left(d, \frac{\det B}{d}, d_B^{n-1} \right) = e$ випливає $(d, d_B^{n-1}) = e$. На підставі теореми 1 із [6] матриця B, яку запишемо у вигляді добутку $B = UF_A V$, де U, $V \in \mathrm{GL}(n,K)$, допускає факторизацію $B = UF_1F_AV$, де $F_1 = \mathrm{diag}\,(e,e,\ldots,e,d) \in$ $\in R_{n,n}$. Очевидно, що $B^* = V^*\mathrm{diag}\,(0,0,\ldots,0,a)U^*$, $a = d_B^{n-1}$. Матрицю C запишемо у вигляді добутку $C = UC_1$. Враховуючи твердження 2, із рівності $B^*C = 0\,(\mathrm{mod}\,d)$ отримуємо $\mathrm{diag}\,(0,0,\ldots,0,a)C_1 = 0\,(\mathrm{mod}\,d)$. Із цього співвідношення випливає, що

$$\left\| ag_{n1} \;\; ag_{n2} \;\; \ldots \;\; ag_{n,m-1} \;\; ag_{n,m} \right\| = 0\,(\mathrm{mod}\,d),$$

де $\left\| g_{n1} \; g_{n2} \; \cdots \; g_{n,m-1} \; g_{n,m} \right\|$ − останній рядок матриці C_1. Оскільки $(d, d_B^{n-1}) =$ $= e$, то з останньої рівності отримуємо $g_{n,j} = 0\,(\mathrm{mod}\,d)$ для $j = 1,2,\ldots,m$. Оскільки $U \in \mathrm{GL}(n,K)$, то для матриці C існує факторизація $C = UF_1C_2$, тобто матриця $D = UF_1$ є спільним лівим дільником матриць B і C. Очевидно, що матриця $D = UF_1Q$, де матриця $Q \in \mathrm{GL}(n,K)$ вибрана так, що $\det D = d$, є спільним лівим дільником матриць B і C у випадку, коли $\mathrm{rank}\,B = n-1$.

Отже, для матриць B і C існують факторизації $B = DB_1$ та $C = DC_1$ такі, що $D \in R_{n,n}$ матриця із визначником $\det D = d$. Оскільки $\left(d, \frac{\det B}{d}, d_B^{n-1}\right) = e$, то згідно з теоремою 1 із [6] матриця D однозначно (з точністю до асоційовності справа) визначена елементом d для матриці B. Отже, матриця D − єдиний спільний дільник для матриць B і C із заданим визначником $\det D = d$. Теорему доведено. ◊

Наслідок 2. *Нехай* $B \in K_{n,n}$, $\mathrm{rank}\,B \geq n-1$, *та* $C \in K_{n,m}$. *Нехай, далі,* $d \in K$ − *регулярний елемент такий, що* $d \mid \det B$. *Якщо виконується одна з умов:*

(***i***) $\mathrm{rank}\,B = n$, $\left(d, \frac{\det B}{d}\right) = e$,

(***ii***) $\mathrm{rank}\,B \geq n-1$, $d_B^{n-1} = e$,

то для матриць B *та* C *існує спільний лівий дільник* $D \in K_{n,n}$ *із визначником* $\det D = d$ *у тому й тільки в тому випадку, коли* $B^*C = 0\,(\mathrm{mod}\,d)$. *Якщо ж шуканий дільник існує, то він однозначно з точністю до асоційовності справа визначається елементом* d.

Нехай $B \in K_{n,n-1}$, $\mathrm{rank}\,B = n-1$. Розглянемо матрицю $B_1 = \left\| \begin{matrix} B & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{matrix} \right\|$.

Очевидно, що $\mathrm{rank}\,B_1 = n-1$ і $B_1^* = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{matrix} \right\| \neq O$, де $b_j = (-1)^{j+1}h_j$,

а h_j − мінор $(n-1)$-го порядку матриці B, отриманий із неї шляхом викреслення j-го рядка. Матриці B поставимо у відповідність рядок $\bar{b} =$ $= \left\| b_1 \;\; b_2 \;\; \cdots \;\; b_n \right\|$. З огляду на те, що множини лівих дільників матриць B і B_1 співпадають, то, враховуючи наведене вище та теорему 1, отримуємо

Наслідок 3. *Нехай* $B \in K_{n,n-1}$, $\operatorname{rank} B = n-1$, *та* $C \in K_{n,m}$. *Нехай, далі,* $d \in K$ *− регулярний елемент такий, що* $(d, d_B^{n-1}) = e$. *Для матриць* B, C *існує спільний лівий дільник* $D \in K_{n,n}$ *із визначником* $\det D = d$ *тоді й тільки тоді, коли* $\bar{b}C = 0 \,(\operatorname{mod} d)$. *Якщо ж шуканий дільник існує, то він однозначно з точністю до асоційовності справа визначається визначником* $\det D = d$.

Враховуючи наслідки 2 і 3, легко довести наступні твердження, які сформулюємо у вигляді таких зауважень.

Зауваження 1. Нехай матриці $B \in K_{n,n}$ і $C \in K_{n,m}$ такі, що $d_B^{n-1} = e$ і $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} C = n-1$. Якщо $B^*C = O$ − нульова матриця, то для довільного регулярного елемента $d \in R$ для матриць B і C існує спільний лівий дільник $D \in K_{n,n}$ із визначником $\det D = d$, який однозначно з точністю до асоційовності справа визначається елементом d.

Зауваження 2. Нехай матриці $B \in K_{n,n-1}$ та $C \in K_{n,m}$ такі, що $d_B^{n-1} = e$ і $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} C = n-1$. Якщо $\bar{b}C = 0$ − нульовий рядок, то для довільного регулярного елемента $d \in R$ для матриць B і C існує спільний лівий дільник $D \in R_{n,n}$ із визначником $\det D = d$, який однозначно з точністю до асоційовності справа визначається заданим елементом d.

Надалі розглядатимемо многочленні матриці над факторіальною областю R. Нехай многочлен $d(x) = x^{nr} + d_1 x^{nr-1} + \ldots + d_{nr-1}x + d_{nr} \in R[x]$ є дільником визначника матриці $B(x) \in R_{n,n}[x]$, яку запишемо у вигляді матричного многочлена

$$B(x) = B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ldots + B_{s-1}x + B_s, \qquad B_i \in R_{n,n}, \qquad i = 0, 1, \ldots, s.$$

Матриці $B(x)$ і многочлену $d(x)$ поставимо у відповідність матриці

$$M = \left\| \begin{array}{cccccccc} B_0 & B_1 & \ldots & B_{s-1} & B_s & & & \\ & B_0 & B_1 & \ldots & B_{s-1} & B_s & & \\ & & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & & & B_0 & B_1 & \ldots & B_{s-1} & B_s \\ I_n & I_n d_1 & \ldots & I_n d_{n,r-1} & I_n d_{nr} & & & \\ & I_n & I_n d_1 & \ldots & I_n d_{n,r-1} & I_n d_{nr} & & \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & & & I_n & I_n d_1 & \ldots & I_n d_{n,r-1} & I_n d_{nr} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} (n-1)r \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} s-r \end{array},$$

$$N = \left\| B_0 d_1 - B_1 \;\ldots\; B_0 d_s - B_s \;\ldots\; B_0 d_{s+1} \;\ldots\; B_0 d_{nr} \;\; \underbrace{O \ldots O}_{t} \right\|.$$

На незаповнених місцях у матриці M містяться нулі; нульова матриця O має порядок n; $t = nr + s - r - \max\{s, nr\}$. Надалі через $d_B(x)$ позначимо н.с.д. мінорів $(n-1)$-го порядку матриці $B(x) \in R_{n,n}[x]$.

Теорема 2. *Нехай* $B(x) \in R_{n,n}[x]$, $\operatorname{rank} B(x) \geq n-1$, $C(x) \in R_{n,m}[x]$. *Нехай, далі, многочлен* $d(x) = x^{nr} + d_1 x^{nr-1} + \ldots + d_{nr-1}x + d_{nr} \in R[x]$, *де* $\deg B(x) \geq r$, *є дільником визначника матриці* $B(x)$. *Якщо* $\left(d(x), \dfrac{\det B(x)}{d(x)}, d_B(x) \right) = e$, *то для матриць* $B(x)$ *та* $C(x)$ *існує спільний* *лівий унітальний дільник* $D(x) = I_n x^r + D_1 x^{r-1} + \ldots + D_r \in R_{n,n}[x]$ *із визначником* $\det D(x) = d(x)$, *тобто* $B(x) = D(x)B_1(x)$ *і* $C(x) = D(x)C_1(x)$, *тоді й тільки тоді, коли виконуються такі дві умови:*

(***i***) *рівняння* $ZM = N$ *розв'язне;*

(***ii***) $B^*(x)C(x) = 0 \,(\operatorname{mod} d(x))$.

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай матриця $D(x) = I_n x^r + D_1 x^{r-1} + \ldots + D_r \in R_{n,n}[x]$ із визначником $\det D(x) = d(x)$ є спільним лівим дільником матриць $B(x) \in R_{n,n}[x]$, $\operatorname{rank} B(x) \geq n-1$, і $C(x) \in R_{n,m}[x]$, тобто $B(x) = D(x)B_1(x)$ і $C(x) = D(x)C_1(x)$. Згідно з твердженням 1 маємо $B^*(x)C(x) = 0 \,(\operatorname{mod} d(x))$. Із рівності $B(x) = D(x)B_1(x)$ на підставі теореми 2 з [5] випливає розв'язність рівняння $ZM = N$. Необхідність доведено.

Достатність. Оскільки $\left(d(x), \dfrac{\det B(x)}{d(x)}, d_B(x)\right) = e$, то з розв'язності рівняння $ZM = N$ за теоремою 2 з [5] для матриці $B(x) \in R_{n,n}[x]$ існує факторизація $B(x) = D(x)B_0(x)$, де $D(x) = I_n x^r + D_1 x^{r-1} + \ldots + D_r \in R_{n,n}[x]$ – унітальна многочленна матриця із визначником $\det D(x) = d(x)$.

Нехай P – поле часток кільця R, тобто $R \subset P$. Враховуючи те, що $B^*(x)C(x) = 0 \,(\operatorname{mod} d(x))$ і $\left(d(x), \dfrac{\det B(x)}{d(x)}, d_B(x)\right) = e$, то на підставі теореми 1 матриці $B(x) \in P_{n,n}[x]$ і $C(x) \in P_{n,m}[x]$ допускають факторизації $B(x) = D_1(x)B_1(x)$ і $C(x) = D_1(x)C_1(x)$, де $D_1(x) \in P_{n,n}[x]$ – неособлива матриця із визначником $\det D_1(x) = d(x)$.

Отже, для матриці $B(x) \in P_{n,n}[x]$ існує зображення у вигляді добутків $B(x) = D(x)B_0(x) = D_1(x)B_1(x)$. З цієї рівності за теоремою 1 з [6] для матриць $D(x) \in P_{n,n}[x]$ і $D_1(x) \in P_{n,n}[x]$ отримуємо $D(x) = D_1(x)W(x)$, де $W(x) \in \mathrm{GL}(n, P[x])$. Тепер неважко переконатись в тому, що для матриць $B(x) \in P_{n,n}[x]$ і $C(x) \in P_{n,m}[x]$ існують факторизації

$$B(x) = D(x)B_0(x),$$

$$C(x) = D_1(x)C_1(x) = D_1(x)W(x)W^{-1}(x)C_1(x) = D(x)C_0(x).$$

Оскільки $C(x) \in R_{n,m}[x]$ і $D(x) = I_n x^r + D_1 x^{r-1} + \ldots + D_r \in R_{n,n}[x]$ – унітальна многочленна матриця, то з рівності $C(x) = D(x)C_0(x)$ випливає $C_0(x) \in R_{n,m}[x]$. Отже, унітальна многочленна матриця $D(x) \in R_{n,n}[x]$ – спільний лівий дільник матриць $B(x) \in R_{n,n}[x]$ і $C(x) \in R_{n,m}[x]$. Теорему доведено. ◊

Наслідок 4. *Нехай* $B(x) \in R_{n,n}[x]$, $\operatorname{rank} B(x) \geq n-1$, $C(x) \in R_{n,m}[x]$. *Нехай, далі, многочлен* $d(x) = x^{nr} + d_1 x^{nr-1} + \ldots + d_{nr-1}x + d_{nr} \in R[x]$, *де* $\deg B(x) \geq r$, *є дільником визначника матриці* $B(x)$. *Якщо виконується одна з умов*:

($\boldsymbol{i}$) $\operatorname{rank} B(x) = n$, $\left(d(x), \dfrac{\det B(x)}{d(x)} \right) = e$,

($\boldsymbol{ii}$) $d_B(x) = \text{const} \neq 0$,

то для матриць $B(x)$ *та* $C(x)$ *існує спільний лівий унітальний дільник* $D(x) = I_n x^r + D_1 x^{r-1} + \ldots + D_r \in R_{n,n}[x]$ *із визначником* $\det D(x) = d(x)$, *тобто* $B(x) = D(x) B_1(x)$ *і* $C(x) = D(x) C_1(x)$, *тоді й тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови:*

($\boldsymbol{a}$) *рівняння* $ZM = N$ *розв'язне,*

($\boldsymbol{б}$) $B^*(x) C(x) = 0 \,(\operatorname{mod} d(x))$.

Наведені вище результати справджуються для матриць над адекватним кільцем [14]. Крім цього, розроблений у роботі підхід можна застосувати для опису структури спільних дільників матриць над ширшими класами кілець елементарних дільників (див. [9, с. 1148]). Зауважимо також, що отримані результати можуть бути використані для знаходження спільних розв'язків матричних многочленних рівнянь $\sum\limits_{i=0}^{p} X^{p-i} B_i = O$, $\sum\limits_{i=0}^{p} X^{q-j} C_j = O$, де $B_i \in R_{n,n}$, $C_j \in R_{n,l}$, а X – невідома $(n \times n)$-матриця.

1. *Джалюк Н. С., Петричкович В. М.* Про спільні унітальні дільники многочленних матриць із заданою канонічною діагональною формою // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 3. – С. 7–13.
2. *Зеліско В. Р., Кучма М. І.* Спільні дільники та спільна факторизація матричних многочленів // Мат. студії. – 1999. – **11**, № 2. – С. 111–118.
3. *Петричкович В. М., Прокіп В. М., Прухницький Ф. А.* Про спільні унітальні дільники із заданою канонічною діагональною формою матричних многочленів // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1994. – Вып. 37. – С. 28–32.
4. *Прокіп В. М.* Про дільники многочленних матриць із заданими канонічними діагональними формами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 2. – С. 58–63.
5. *Прокіп В. М.* Про дільники многочленних матриць над факторіальною областю // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 4. – С. 22–26.
6. *Прокіп В. М.* Про один клас дільників багаточленних матриць над областями цілісності // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 10. – С. 1438–1440.
7. *Прокіп В. М.* Про спільні унітальні дільники многочленних матриць // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 3. – С. 19–24.
8. *Прокіп В. М.* Про структуру дільників матриць над областю головних ідеалів // Доп. НАН України. – 2002. – № 6. – С. 27–32.
9. *Прокіп В. М.* Структура матриць та їх дільників над областю головних ідеалів // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 8. – С. 1143–1148.
10. *Родосский К. А.* Алгоритм Евклида. – Москва: Наука, 1988. – 240 с.
11. *Руссаковский Е. М.* К теории безутианты и результанта матричных многочленов. – Харьков, 1981. – 41 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 5321-81. – (Препр. / Харьков. гос. ун-т им. Горького.)
12. *Хайниг Г.* О понятиях безутианты и результанта для операторных пучков // Функ. анализ и его приложения. – 1977. – **11**, № 3. – С. 94–95.
13. *Barnett S.* Matrices in control theory with applications to linear programming. – London: Van Nostrand Reinhold Co., 1971. – 221 p.
14. *Helmer O.* The elementary divisors theorem for certain rings without chain condition // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**. – P. 225–236.
15. *Lancaster P.* Common eigenvalue, divisors and multiples of matrix polynomials // Linear Algebra and its Appl. – 1986. – **84**. – P. 139–160.
16. *Rosenbrock H. H.* State space and multivariable theory. – New York: Nelson-Wiley, 1970. – 257 p.
17. *Stewart B. M.* A note on least common and left multiples // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – **55**. – P. 587–591.
18. *Wolovich W. A.* Linear multivariable system. – New-York: Springer-Verlag, 1974. – 358 p.

ОБ ОБЩИХ ДЕЛИТЕЛЯХ МАТРИЦ НАД ФАКТОРИАЛЬНЫМИ ОБЛАСТЯМИ

Исследуется задача об общих делителях матриц над факториальными областями. Установлены необходимые, а при некоторых ограничениях и достаточные условия существования общего неособенного делителя двух матриц. Полученные в работе результаты имеют непосредственное применение в исследовании общих унитальных делителей многочленных матриц над факториальной областью.

ON COMMON DIVISORS OF MATRICES OVER FACTORIAL DOMAINS

The problem on common divisors of matrices over the factorial domains is investigated. The necessary and, with certain restrictions, sufficient conditions are established for existence of a common left nonsingular divisor of two matrices. The results obtained in this paper have found their immediate application in the investigation of common unital divisor of polynomial matrices over a factorial domain.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
04.10.05