УДК 512.64

Б. З. Шаваровський

ПРО ПОДІБНІСТЬ НАБОРІВ МАТРИЦЬ І КВАЗІДІАГОНАЛЬНУ ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ МАТРИЦЬ

Задача про одночасну подібність одного типу наборів квадратних матриць над полем комплексних чисел зводиться до задачі спеціальної блочно-діагональної еквівалентності відповідних цим наборам прямокутних матриць. Вказано, як за довільною матрицею із класу спеціально блочно-діагонально еквівалентних матриць можна знайти відповідний їй набір квадратних матриць.

Розглянемо деякі аспекти задачі класифікації наборів квадратних матриць над полем з точністю до подібності. Класифікаційним задачам присвячено багато статей. Відмітимо серед них для прикладу роботи [1, 5–7]. Під подібністю наборів будемо розуміти одночасну подібність. Для виділеного в цій роботі класу наборів матриць задача їх класифікації відносно подібності зводиться до задачі класифікації відповідних прямокутних матриць відносно спеціальної блочно-діагональної еквівалентності. Деякі з результатів цієї роботи анонсовано у [8].

Розглянемо набір

$$(N_1, \ldots, N_t) \tag{1}$$

квадратних матриць порядку n над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Поставимо йому у відповідність многочленну матрицю

$$N(x) = Ex^t + N_1 x^{t-1} + \ldots + N_t \,, \tag{2}$$

яку назвемо характеристичною матрицею набору (1) (тут E – одинична матриця порядку n). Характеристичні корені матриці $N(x)$, тобто корені рівняння $\det N(x) = 0$, називаються характеристичними коренями набору (1). Будемо припускати, що всі елементарні дільники матриці $N(x)$ попарно взаємно прості і ця матриця допускає виділення зліва унітального лінійного дільника, спектр якого не перетинається зі спектром відповідного правого дільника, тобто

$$N(x) = (Ex - \bar{N}_1)\bar{N}_2(x), \qquad (\det(Ex - \bar{N}_1),\ \det \bar{N}_2(x)) = 1. \tag{3}$$

Зазначимо, що в роботі [2] досліджується подібність унітальних квадратних тричленів з попарно різними характеристичними коренями у зв'язку з розкладністю їх на лінійні множники.

Той факт, що матриця $N(x)$ має попарно взаємно прості елементарні дільники, означає рівність одиниці перших її $n-1$ інваріантних множників. На основі [3] матриця $N(x)$ напівскалярно еквівалентними перетвореннями зводиться до вигляду

$$CN(x)Q(x) = \left\| \begin{matrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ f_1(x) & \ldots & f_{n-1}(x) & \Delta(x) \end{matrix} \right\|, \tag{4}$$

де $\deg f_i(x) < \deg \Delta(x)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Позначимо через $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ характеристичні многочлени відповідно лівого та правого множників у розкладі (3) матриці $N(x)$ і зафіксуємо деяку нумерацію коренів кожного з цих многочленів. Нехай коренями многочленів $\Delta_1(x)$ і $\Delta_2(x)$ згідно із зафіксованим їх розміщенням є

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2005. – 48, № 4. – С. 38-42.

$$(a_1, \dots, a_q), \qquad (b_1, \dots, b_p), \tag{5}$$

а

$$(\ell_1, \dots, \ell_q), \qquad (k_1, \dots, k_p), \tag{6}$$

– відповідно кратності цих коренів, причому $l_1 + \dots + \ell_q = n$. За таких умов можемо однозначно побудувати матриці значень рядка

$$\bar{f}(x) = \| 1 \quad f_1(x) \quad \dots \quad f_{n-1}(x) \|,$$

утвореного за матрицею (4) на множині коренів многочленів $\Delta_1(x), \Delta_2(x)$. Таким чином, дотримуючись позначень монографії [3], отримаємо матриці

$$A_0 = M_{\bar{f}(x)}(\Delta_1), \qquad B_0 = M_{\bar{f}(x)}(\Delta_2). \tag{7}$$

Для побудови матриць (7) не використовується ні розклад (3) матриці $N(x)$, ні паралельний йому розклад $\Delta(x) = \Delta_1(x)\,\Delta_2(x)$ характеристичного многочлена $\Delta(x)$ цієї матриці. Досить знати лише характеристичні корені матриці $N(x)$, щоб на основі теореми 2 [3, р. II, § 4] впевнитися, чи належить виділеному вказаними вище умовами класу набір матриць (1) і знайти характеристичні корені (з урахуванням їх кратностей) правого та лівого дільників деякого потенційно можливого розкладу (3) матриці $N(x)$. Перша з матриць (7) є квадратною і неособливою згідно із згаданою вже теоремою 2 з [3, р. II, § 4]. Тому існує обернена матриця $\left(M_{\bar{f}(x)}(\Delta_1)\right)^{-1}$. Друга з матриць (7) є прямокутною розміру $n(t-1) \times n$. Поставимо у відповідність набору матриць (1) числову ($n(t-1) \times n$)-матрицю вигляду

$$N_0 = B_0 A_0^{-1} = M_{\bar{f}(x)}(\Delta_2)\left(M_{\bar{f}(x)}(\Delta_1)\right)^{-1}. \tag{8}$$

Нехай

$$(K_1, \dots, K_t) \tag{9}$$

– деякий інший набір квадратних матриць порядку n над полем чисел $\mathbb{C}$. Припустимо, що форми Сміта характеристичної матриці $N(x)$ (2) набору (1) і характеристичної матриці

$$K(x) = Ex^t + K_1 x^{t-1} + \dots + K_t$$

набору (9) збігаються і матриця $K(x)$ допускає виділення вліво лінійного унітального дільника з характеристичним многочленом $\Delta_1(x)$. Нагадаємо, що вказані припущення є необхідними умовами подібності наборів (1) і (9). Аналогічно до N_0 побудуємо матрицю K_0, що відповідає набору (9), дотримуючись тої самої нумерації (5) характеристичних коренів лівого та правого дільників матриці $K(x)$.

Справджується така

Теорема 1. *Для подібності наборів матриць* (1) *і* (9) *необхідно та достатньо еквівалентності відповідних їм матриць* N_0 *і* K_0 *так, що* $K_0 = RN_0S$, *де перетворювальні матриці* R, S *мають таку блочно-діагональну будову*:

$$R = \oplus_{i=1}^{p} \left\| \begin{matrix} r_{i0} & & & & \\ r_{i1} & r_{i0} & & & 0 \\ r_{i2} & C_2^1 r_{i1} & r_{i0} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ r_{i,k_i-1} & C_{k_i-1}^1 r_{i,k_i-2} & C_{k_i-1}^2 r_{i,k_i-3} & \dots & r_{i0} \end{matrix} \right\|, \tag{10}$$

$$S = \oplus_{j=1}^{q} \left\| \begin{matrix} s_{j0} & & & & \\ s_{j1} & s_{j0} & & 0 & \\ s_{j2} & C_2^1 s_{j1} & s_{j0} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ s_{j,\ell_j-1} & C_{\ell_j-1}^1 s_{j,\ell_j-2} & C_{\ell_j-1}^2 s_{j,\ell_j-3} & \dots & s_{j0} \end{matrix} \right\|. \qquad (11)$$

Д о в е д е н н я цієї теореми аналогічне до доведення твердження 4 з роботи [4]. ◊

Звернемо увагу, що числа k_i та ℓ_j, які фігурують як порядки прямих доданків матриць R, S у теоремі 1, є кратностями характеристичних коренів правого та лівого дільників у розкладі (3) матриці $N(x)$. Таким чином, класу $\{T(N_1, \dots, N_t)T^{-1}\}$ подібних наборів при фіксованій нумерації (5) коренів характеристичного многочлена матриці $N(x)$ відповідає клас еквівалентних матриць $\{RN_0S\}$ таких, що матриці R, S мають вигляд (10), (11). Ця відповідність є взаємно однозначною. Нашою найближчою метою є показати, як за довільною матрицею із класу $\{RN_0S\}$ можна знайти деякий набір із класу $\{T(N_1, \dots, N_t)T^{-1}\}$ подібних наборів за відомими характеристичними коренями матриці $N(x)$, кратності яких дорівнюють порядкам діагональних блоків перетворювальних матриць R, S.

Нехай задано деяку матрицю K із класу $\{RN_0S\}$ (при фіксованих порядках k_i, ℓ_j прямих доданків матриць R, S). Очевидно, перетворення матрицями R, S можна підібрати так, що в матриці $M_0 = RKS$ у рядках із номерами $1,\ k_1+1,\ k_1+k_2+1,\ \dots,\ k_1+\dots+k_{p-1}+1$ сума елементів з номерами $1,\ \ell_1+1,\ \ell_1+\ell_2+1,\ \dots,\ \ell_1+\dots+\ell_{q-1}+1$ дорівнює одиниці, а в кожному іншому рядку сума елементів із вказаними номерами дорівнює нулеві. Побудуємо далі блочну матрицю

$$\left\| \begin{matrix} E \\ M_0 \end{matrix} \right\|$$

і додаванням до першого стовпця її стовпців з номерами $\ell_1+1,\ \ell_1+\ell_2+1$, $\dots,\ \ell_1+\dots+\ell_{q-1}+1$ перейдемо від неї до матриці

$$\left\| \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix} \right\|.$$

Очевидно, що $M_2M_1^{-1} = M_0$. За інтерполяційними формулами Ньютона побудуємо рядок

$$\bar{h}(x) = \| \, h_0(x) \quad h_1(x) \quad \dots \quad h_{n-1}(x) \, \|$$

степеня, меншого ніж nt, так, що

$$M_{\bar{h}(x)}\big[a_1^{(\ell_1)}, \dots, a_q^{(\ell_q)}, b_1^{(k_1)}, \dots, b_p^{(k_p)}\big] = \left\| \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix} \right\|.$$

Тоді, очевидно, $h_0(x) \equiv 1$.

Важливою є

Теорема 2. *Для того щоб існував набір* $(N_1, \dots, N_t)$ *квадратних матриць порядку* n *з наперед заданими характеристичними коренями* (5) *кратностей* (6), *якому відповідає клас матриць* $\{RN_0S\}$, *де перетворю-*

вальні матриці R, S *мають вигляд* (10), (11), *необхідно та достатньо, щоб виконувались умови*

$$\operatorname{rang} M_{\bar{h}(x)\| E \ \ Ex \ \ \dots \ \ Ex^{t-1} \|}\left[a_1^{(\ell_1)}, \dots, a_q^{(\ell_q)}, b_1^{(k_1)}, \dots, b_p^{(k_p)}\right] = nt\,. \tag{12}$$

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай набору матриць (1) відповідає клас матриць $\{RN_0S\}$. Згідно з теоремою про регуляризацію (теорема 3 з [3, р. III, § 2]) матриця

$$M_{\|1 \ \ f_1(x) \ \ \dots \ \ f_{n-1}(x)\| \| E \ \ Ex \ \ \dots \ \ Ex^{t-1} \|}\left[a_1^{(\ell_1)}, \dots, a_q^{(\ell_q)}, b_1^{(k_1)}, \dots, b_p^{(k_p)}\right], \tag{13}$$

де $f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)$ взято із матриці (4), має повний ранг (рівний nt). Подамо матрицю (13) у вигляді

$$M_{\|1 \ \ f_1(x) \ \ \dots \ \ f_{n-1}(x)\| \| E \ \ Ex \ \ \dots \ \ Ex^{t-1} \|}\left[a_1^{(\ell_1)}, \dots, a_q^{(\ell_q)}, b_1^{(k_1)}, \dots, b_p^{(k_p)}\right] =$$

$$= \left\| \begin{matrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{t-1} \\ B_0 & B_1 & \dots & B_{t-1} \end{matrix} \right\|,$$

де всі $A_0, A_1, \dots, A_{t-1}$ – квадратні блоки порядку n.

Неважко переконатися, що

$$A_m = U_m A_0, \quad B_m = V_m B_0, \quad U_m S = S U_m, \quad V_m R = R V_m, \qquad m = 1, \dots, t-1.$$

Матриці U_m, V_m мають ту саму блочно-діагональну структуру з трикутними діагональними блоками, що й матриці S, R відповідно. Зауважимо також, що $\det A_0 \ne 0$ і $B_0 A_0^{-1} = N_0 = R M_0 S$, де N_0 – матриця (8). Тому нескладно прослідкувати істинність ланцюжка таких рівностей:

$$\left\| \begin{matrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{t-1} \\ B_0 & B_1 & \dots & B_{t-1} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} A_0 & U_1 A_0 & \dots & U_{t-1} A_0 \\ B_0 & V_1 B_0 & \dots & V_{t-1} B_0 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} E & U_1 & \dots & U_{t-1} \\ N_0 & V_1 N_0 & \dots & V_{t-1} N_0 \end{matrix} \right\| (\underbrace{A_0 \oplus \dots \oplus A_0}_{t}) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} E & U_1 & \dots & U_{t-1} \\ R M_0 S & V_1 R M_0 S & \dots & V_{t-1} R M_0 S \end{matrix} \right\| (A_0 \oplus \dots \oplus A_0) =$$

$$= (S^{-1} \oplus R) \left\| \begin{matrix} E & U_1 & \dots & U_{t-1} \\ M_0 & V_1 M_0 & \dots & V_{t-1} M_0 \end{matrix} \right\| (\underbrace{S \oplus \dots \oplus S}_{t}) \, (A_0 \oplus \dots \oplus A_0) =$$

$$= (S^{-1} \oplus R) \left\| \begin{matrix} M_1 & U_1 M_1 & \dots & U_{t-1} M_1 \\ M_2 & V_1 M_2 & \dots & V_{t-1} M_2 \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times (\underbrace{M_1^{-1} \oplus \dots \oplus M_1^{-1}}_{t}) \, (S \oplus \dots \oplus S) \, (A_0 \oplus \dots \oplus A_0) =$$

$$= (S^{-1} \oplus R) M_{\bar{h}(x)\| E \ \ Ex \ \ \dots \ \ Ex^{t-1} \|}\left[a_1^{(\ell_1)}, \dots, a_q^{(\ell_q)}, b_1^{(k_1)}, \dots, b_p^{(k_p)}\right] \times$$

$$\times (\underbrace{M_1^{-1} \oplus \dots \oplus M_1^{-1}}_{t}) \, (S \oplus \dots \oplus S) \, (A_0 \oplus \dots \oplus A_0),$$

що й доводить першу частину теореми.

Достатність. Якщо виконується умова (12), то згідно з уже згадуваною теоремою про регуляризацію матриця

$$H(x) = \begin{Vmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ h_1(x) & \dots & h_{n-1}(x) & \Delta(x) \end{Vmatrix},$$

де $\Delta(x) = (x - a_1)^{\ell_1} \dots (x - a_q)^{\ell_q} (x - b_1)^{k_1} \dots (x - b_p)^{k_p}$, регуляризується справа, тобто існує оборотна матриця $P(x) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}[x])$ така, що

$$H(x)P(x) = Ex^t + N_1 x^{t-1} + \dots + N_t .$$

Згідно з теоремою 2 [3, р. III, § 3] коефіцієнти $N_1, \dots, N_t$ можна визначити таким чином:

$$\begin{Vmatrix} N_t \\ \dots \\ N_1 \end{Vmatrix} = -\left(M_{\bar{h}(x) \| E \quad Ex \quad \dots \quad Ex^{t-1} \|} \left[a_1^{(\ell_1)}, \dots, a_q^{(\ell_q)}, b_1^{(k_1)}, \dots, b_p^{(k_p)} \right] \right)^{-1} \times$$

$$\times M_{\bar{h}(x)x^t} \left[a_1^{(\ell_1)}, \dots, a_q^{(\ell_q)}, b_1^{(k_1)}, \dots, b_p^{(k_p)} \right].$$

Очевидно, знайдений набір коефіцієнтів $(N_1, \dots, N_t)$ є шуканим набором матриць. Теорему доведено. ◊

1. *Бондаренко В. М.* Про класифікацію медулярних зображень узагальнених груп кватерніонів // Доп. НАН України. – 2004. – № 11. – С. 11–16.
2. *Казимирский П. С., Зелиско В. Р., Петричкович В. М.* О подобии матричных квадратных трехчленов // Теорет. и прикл. вопросы алгебры и дифференц. уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 40–45.
3. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
4. *Шаваровский Б. З.* Редукция матриц при помощи эквивалентных и подобных преобразований // Мат. заметки. – 1998. – **64**, вып. 5. – С. 769–782.
5. *Belitskii G. R.* Normal forms in matrix spaces // Integr. Equat. and Oper. Theory. – 2000. – **30**, No. 30. – P. 251–283.
6. *Drozd Yu. A.* Derived tame and derived wild algebras // Algebra and Discrete Math. – 2004. – No. 1. – P. 57–74.
7. *Sergeichuk V. V.* Canonical matrices for linear matrix problems // Linear Algebra and Appl. – 2000. – **317**. – P. 53–102.
8. *Shavarovs'kii B.Z.* On similarity of some collection of matrices // 5th Int. Algebr. Conf. in Ukraine (July 20–27, 2005, Odessa): Abstracts. – P. 186–187.

О ПОДОБИИ НАБОРОВ МАТРИЦ И КВАЗИДИАГОНАЛЬНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МАТРИЦ

Задача об одновременном подобии одного типа наборов квадратных матриц над полем комплексных чисел сводится к задаче специальной блочно-диагональной эквивалентности соответствующих этим наборам прямоугольных матриц. Показано, как для произвольной матрицы из класса специально блочно-диагонально эквивалентных матриц можно найти соответствующий ей набор квадратных матриц.

ON SIMILARITY OF COLLECTION OF MATRICES AND ON QUASI-DIAGONAL EQUIVALENCE OF MATRICES

The problem on simultaneous similarity of one type of collection of square matrices over the field of complex numbers is reduced to the problem on the special quasi-diagonal equivalence of rectangular matrices, corresponding to these collections. It is shown that it is possible to find a collection of square matrices according to the arbitrary matrix from a class of specially quasi-diagonal equivalent matrices, corresponding to it.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.09.05