УДК 513.6

В. І. Андрійчук

ПРО СЛАБКУ АПРОКСИМАЦІЮ У ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ ГРУПАХ НАД ПСЕВДОГЛОБАЛЬНИМИ ПОЛЯМИ

Нехай G – зв'язна лінійна алгебраїчна група над полем K алгебраїчних функцій від однієї змінної з псевдоскінченним полем констант характеристики нуль. Припустимо, що G має спеціальне K-накриття з ядром μ. Тоді для кожної скінченної підмножини Σ множини всіх нормувань поля K дефект $A_\Sigma(G)$ слабкої апроксимації дорівнює коядру відображення обмеження $H^1(K,\mu) \to \prod_{v\in\Sigma} H^1(K_v,\mu)$.

Недавно Ж.-Л. Колліо-Телен, П. Жілл і Р. Парімала [9] довели, що більшість відомих властивостей лінійних алгебраїчних груп і їхніх однорідних просторів над цілком уявними числовими полями мають аналоги над полями таких типів:

(***gl***) функціональне поле K від двох змінних над полем k, тобто поле функцій на гладкій проективній зв'язній поверхні над k; (***ll***) поле дробів K гензелевої ексцелентної двовимірної локальної області A з полем лишків k; (***sl***) поле рядів Лорана $K = l((t))$ над полем l характеристики нуль і когомологічної розмірності 1.

Усі ці поля K мають такі властивості:

(**I**) їхня когомологічна розмірність дорівнює 2;

(**II**) для кожного скінченного розширення L/K і кожної центральної простої алгебри з діленням D над полем L індекс алгебри D/L дорівнює її показнику;

(**III**) $H^1(K,G)=1$ для кожної напівпростої однозв'язної групи G над полем K.

У цій роботі розглядаємо редуктивні лінійні алгебраїчні групи над полем K алгебраїчних функцій від однієї змінної з псевдоскінченним [9] полем констант k. Таке поле K називаємо *псевдоглобальним.* Нагадаємо, що досконале поле k називають псевдоскінченним, якщо воно має єдине розширення степеня n для кожного натурального числа n і якщо кожен абсолютно незвідний афінний многовид, визначений над k, має k-раціональну точку. Виявляється, що псевдоглобальні поля теж мають властивості (**I**)–(**III**).

Назвемо *спеціальним накриттям* або *спеціальною ізогенією* кожну центральну K-ізогенію $G' \to G$ редуктивних груп, де G' – добуток напівпростої однозв'язної групи та квазітривіального K-тора, тобто тора, ізоморфного добутку торів вигляду $\prod_i R_{L_i/K}(G_m)$, де L_i – скінченні розширення поля K. Інакше кажучи, лінійна алгебраїчна група G має спеціальне накриття, якщо існує точна послідовність

$$1 \to \mu \to G' \to G \to 1, \tag{1}$$

де G' – добуток напівпростої однозв'язної групи та квазітривіального тора, а $G' \to G$ – ізогенія з ядром μ. Відомо [9], що група μ має в'ялу резольвенту

$$1 \to \mu \to F \to P \to 1, \tag{2}$$

де F – в'ялий тор, а P – квазітривіальний тор ($H^{-1}(H,\hat{F})=0$ для всіх підгруп h абсолютної групи Ґалуа поля K, де $\hat{F}$ − група характерів тора F). Для поля K, наділеного множиною нормувань V^K, підмножини $\Sigma \subset V^K$ та алгебраїчної лінійної групи G позначимо через $A_\Sigma(G)$ факторгрупу групи $\prod_{v\in\Sigma} G(K_v)$ за замиканням образу групи $G(K)$ при діагональному зануренні, причому $A(G) = A_{V^K}(G)$. Якщо μ − комутативна група, то через $Ч^1_\Sigma(K,\mu)$ позначаємо коядро обмеження $H^1(K,\mu) \to \prod_{v\in\Sigma} H^1(K_v,\mu)$, а через $Ч^1_\omega(K,\mu)$ − проективну границю груп $Ч^1_\Sigma(K,\mu)$, де Σ пробігає скінченні підмножини множини V^K. Через $\bar{K}$ позначаємо алгебраїчне замикання поля K.

Теорема 1. *Нехай G − зв'язна лінійна алгебраїчна група над псевдоглобальним полем K характеристики нуль. Припустимо, що G має спеціальне накриття $G' \to G$ з ядром μ. Нехай $\Sigma \subset V^K$ − скінченна підмножина. Тоді*:

(***i***) $A_\Sigma(G) = Ч^1_\Sigma(K,\mu)$;

(***ii***) *дефект $A(G)$ слабкої апроксимації є скінченною комутативною групою і $A(G) = Ч^1_\omega(K,\mu)$*;

(***iii***) $A(G) = A_{\Sigma_0}(G)$, *де Σ_0 − придатна скінченна підмножина в Σ, яка складається з розгалужених у $K(\hat{\mu})/K$ нормувань, де $\hat{\mu} = \mathrm{Hom}(\mu, K)$.*

Ж.-Л. Колліо-Телен, П. Жілл і Р. Парімала довели [9], що, коли G/K − однозв'язна група над полем K типу (***gl***) або (***ll***), причому у випадку (***gl***) група G не має E_8-множників, то для кожної скінченної множини нормувань $\Sigma \subset V^K$ діагональне відображення $G(K) \to \prod_{v\in\Sigma} G(K_v)$ має щільний образ, тобто G має властивість слабкої апроксимації. Цей результат є правильним і для однозв'язних груп над псевдоглобальним полем K.

Теорема 2. *Кожна однозв'язна лінійна алгебраїчна група над псевдоглобальним полем K має властивість слабкої апроксимації.*

Д о в е д е н н я. Застосовуємо схему міркувань з роботи [9, теорема 4.7]. В. І. Черноусов і В. П. Платонов [8] довели, що однозв'язні лінійні алгебраїчні групи без множників типу A_n над p-адичними та чисто уявними числовими полями є раціональними многовидами. Отже, ці групи мають властивість слабкої апроксимації. У [9] також доведено, що цей результат залишається правильним для однозв'язних груп над полями K характеристики нуль з властивостями: ***а***) $\mathrm{cd}(K) \le 2$; ***б***) $\mathrm{cd}(K^{\mathrm{ab}}) \le 1$; ***в***) для кожного скінченного розширення L поля K індекси 2-примарних і 3-примарних компонент центральних простих алгебр над L дорівнюють їх показникам. Тут через $\mathrm{cd}(K)$ і $\mathrm{cd}(K^{\mathrm{ab}})$ позначено відповідно когомологічні розмірності поля K і максимального абелевого розширення поля K.

Тепер зауважимо, що когомологічна розмірність псевдоскінченного поля констант k псевдоглобального поля K дорівнює 1. Тому за твердженням 11 з книги [3, розд. 2] $\mathrm{cd}(K) = 2$. Всі скінченні розширення поля констант k поля K є абелевими (насправді − циклічними), тому максимальне абелеве розширення поля K містить підполе $\bar{k}K$ ($\bar{k}$ − алгебраїчне замикання поля k). Використовуючи той факт, що за теоремою Тзена $\mathrm{cd}(\bar{k}K) = 1$, і K^{ab} є алгебраїчним розширенням поля $\bar{k}K$, отримуємо, що K^{ab} має когомологічну розмірність 1. Нарешті, рівність порядку та показника для центральних простих алгебр над псевдоглобальними полями доведено у [6].

Тому для доведення теореми 2 досить розглянути лише групи типу A_n, оскільки в інших випадках K-многовид G є K-раціональним і тому має властивість слабкої апроксимації.

Для груп типу A_n досить буквально повторити доведення з [9]. Якщо група G має тип ${}^1A_n$, то $G = \mathrm{SL}_1(D)$ для деякої центральної простої алгебри D/K. Нехай $D^1 = \{x \in D : \mathrm{Nrd}_{D/K}(x) = 1\}$ – підгрупа елементів у D^* зі редукованою нормою 1. Розглянемо множину $\{g_v\}_{v\in\Sigma} \in \prod_{v\in\Sigma} D_v^{*1}$. Оскільки кожне поповнення K_v є C_2-полем [3, розд. 2, твердження 11], то згідно з результатами В. І. Янчевського [4] всі елементи g_v є добутками комутаторів елементів з $D_{K_v}^{*1}$. Далі, оскільки множина нормувань Σ є скінченною, то існує ціле число $n > 0$ таке, що кожен елемент g_v для $v \in \Sigma$ є добутком точно n комутаторів елементів з $D_{K_v}^{*1}$. Тепер, використовуючи той факт, що D^* є множиною K-точок відкритого підмноговиду афінного простору над полем K, отримуємо, що діагональне відображення $D^* \to \prod_{v\in\Sigma} D_{K_v}^*$ має щільний образ. Апроксимуючи всі входження n комутаторів, одержуємо, що група $G(K)$ є щільною у добутку $\prod_{v\in\Sigma} G(K_v)$.

Тепер припустимо, що G має тип ${}^2A_n$, тобто $G = \mathrm{SU}(B,\tau)$, де L/K – квадратичне сепарабельне розширення поля K, а B/L – центральна проста алгебра, наділена інволюцією τ другого роду. Розглянемо гомоморфізм $B^* \to L^*$, означений правилом $b \mapsto \mathrm{Nrd}(b)/\tau\,\mathrm{Nrd}(b) : B^* \to L^*$. Цей гомоморфізм визначає точну послідовність алгебраїчних K-груп:

$$1 \to H \to R_{L/K}(\mathrm{GL})_{1,B} \to R^1_{L/K}(\mathbb{G}_m) \to 1.$$

Оскільки G і H є стабільно K-біраціонально еквівалентними K-многовидами, то слабка апроксимація для одного з них еквівалентна слабкій апроксимації для іншого. Нехай Σ – скінченна множина нормувань поля K і нехай $\{g_v\}_{v\in\Sigma} \in \prod_{v\in\Sigma} H_{K_v}$. За результатами В. І. Янчевського [5], застосованими до поповнення K_v, довільний елемент з $H(K_v)$ є добутком τ-симетричних елементів з $B_{K_v}^*$. Оскільки множина Σ скінченна, то існує ціле число $n > 0$ таке, що кожен елемент g_v для $v \in \Sigma$ є добутком точно n τ-симетричних елементів з $B_{K_v}^*$. Множина τ-симетричних елементів з B^* є множиною K-раціональних точок відкритої (за Зариським) підмножини афінного простору над полем K. Таким чином, слабка апроксимація виконується для такої множини і звідси одержуємо, що група $H(K)$ щільна в добутку $\prod_{v\in\Sigma} H(K_v)$. ◊

Теорема 3. *Нехай K – псевдоглобальне поле характеристики нуль і нехай G – зв'язна лінійна алгебраїчна K-група.*

(***i***) *Якщо група G однозв'язна, то $H^1(K,G) = 1$.*

(***ii***) *Нехай G – напівпроста однозв'язна група, $1 \to \mu \to G \to G^{\mathrm{ad}} \to 1$ – центральна ізогенія, відповідна центру μ групи G, де G^{ad} – приєднана група. Тоді:*

а) *граничне відображення $\delta : H^1(K,G^{\mathrm{ad}}) \to H^2(K,\mu)$ є бієкцією;*

б) *якщо група G не є групою типу A, то вона ізотропна.*

Д о в е д е н н я. Властивість (***i***) випливає з [9, теорема 1.2 (v)], де доведено, що, коли індекси 2-примарних і 3-примарних компонент центральних простих алгебр дорівнюють їх показникам над скінченними розширеннями поля K і когомологічна розмірність поля K^{ab} не більша ніж 1, то $H^1(K,G)=1$. При доведенні теореми 2 було зауважено, що ці умови виконуються для псевдоглобального поля K.

Раніше вже було зауважено, що $\mathrm{cd}(K)\le 2$ для псевдоглобального поля K і індекси центральних простих алгебр дорівнюють їх показникам над скінченними розширеннями поля K. Тому за теоремою 2.1 з [9] напівпроста однозв'язна група G над псевдоглобальним полем K характеристики нуль має властивості (***ii***). Це завершує доведення. ◊

Зауваження 4. Такі ж міркування, як при доведенні теореми 3, показують, що $H^1(K,G)=1$ для однозв'язної лінійної алгебраїчної групи G' над загальними локальними полями, тобто над повними дискретно нормованими полями, поля лишків яких є досконалими і мають єдине розширення степеня n для кожного натурального числа n (і, зокрема, над кожним поповненням K_v псевдоглобального поля).

Д о в е д е н н я **теореми 1**. Доведення відповідного факту для випадку груп над числовими полями належить Кнезеру. Міркування Кнезера можна використати і у випадку псевдоглобального основного поля. Для зручності читача відтворимо це доведення (див. [10, доведення теореми 3.3]). Запишемо комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccccccc}
G'(K) & \to & G(K) & \xrightarrow{\varphi} & H^1(K,\mu) & \to & H^1(K,G') \\
\downarrow & & \downarrow i & & \downarrow \theta & & \downarrow \\
\prod\limits_{v\in\Sigma} G'(K_v) & \to & \prod\limits_{v\in\Sigma} G(K_v) & \xrightarrow{\chi} & \prod\limits_{v\in\Sigma} H^1(K_v,\mu) & \to & \prod\limits_{v\in\Sigma} H^1(K_v,G')
\end{array} \qquad (3)$$

для спеціального накриття $G'\to G$ групи G з ядром μ, визначеним точною послідовністю (1). Розглянемо групу $X=\chi^{-1}(\mathrm{Im}\,\theta\varphi)$ і доведемо, що ця група є замиканням образу $i(G(K))$. Для цього розглянемо ще одну комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccccccc}
G'(K) & \xrightarrow{\rho} & G(K) & \xrightarrow{\bar\varphi} & \mathrm{Im}\,\varphi & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \bar i & & \downarrow \bar\theta & & \\
\prod\limits_{v\in\Sigma} G'(K_v) & \xrightarrow{\psi} & X & \xrightarrow{\bar\chi} & \mathrm{Im}\,\theta\varphi & \to & 0.
\end{array}$$

Всі групи $H^1(K_v,\mu)$ є скінченними, отже, добуток $\prod\limits_{v\in\Sigma} H^1(K_v,\mu)$ скінченний і дискретний. Звідси випливає, що X − інваріантна відкрита підгрупа в $\prod\limits_{v\in\Sigma} G(K_v)$, тому вона містить замикання образу групи $G(K)$. Доведемо, що група $i(G(K))$ замкнена в групі X. Нехай U − непорожня відкрита множина групи X і g − такий елемент групи $G(K)$, для якого елемент $\bar\chi\circ\bar i(g)$ належить образу $\bar\chi(U)$ множини U. Відкрита множина $\psi^{-1}(\bar i(g)^{-1}\cdot U)\subset$ $\subset\prod\limits_{v\in\Sigma} G'(K_v)$ непорожня. Крім цього, група $G'(K)$ має властивість слабкої апроксимації, оскільки вона є добутком напівпростої однозв'язної групи, яка має цю властивість за теоремою 1, і квазітривіального тора (який є K-раціональним многовидом, отже, має властивість слабкої апроксимації).

Звідси випливає, що множина $\psi^{-1}(\bar{i}(g)^{-1} \cdot U)$ перетинає образ групи $G'(K)$. Отже, можна вибрати такий елемент $a \in G'(K)$, що $\bar{i}(g \cdot \rho(a)) \in U$. Це означає, що група X є замиканням групи $i(G(K))$ у добутку $\prod\limits_{v \in \Sigma} G(K_v)$ і тому $A_\Sigma(G)$ наділяється структурою скінченної абелевої групи. Більше того, група $A_\Sigma(G)$ ізоморфна факторгрупі групи $\operatorname{Im}\chi$ за підгрупою $\bar{\theta}(\operatorname{Im}\varphi)$.

У діаграмі (3) групи $H^1(K, G')$ та $H^1(K_v, G')$ тривіальні. Це випливає з теореми 3, зауваження 4 та з тривіальності одновимірних когомологій для квазітривіального тора. Отже, маємо комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & \operatorname{Im}\varphi & \to & H^1(K,\mu) & \to & 0 \\
 & & \downarrow \bar{\theta} & & \downarrow & & \\
0 & \to & \operatorname{Im}\chi & \to & \prod\limits_{v\in\Sigma} H^1(K_v,\mu) & \to & 0
\end{array}$$

з точними рядками. Ця діаграма показує, що відображення χ індукує ізоморфізм груп $A_\Sigma(G) \xrightarrow{\sim} Ч^1_\Sigma(K,\mu)$, і завершує доведення твердження (***i***) теореми.

Твердження (***ii***) та (***iii***) випливають з теореми 1 з [1], де, зокрема, доведено, що (як і у випадку глобального основного поля) для кожного скінченного модуля M над псевдоглобальним полем K маємо рівність $Ч^1_\omega = Ч^1_\Sigma(K,\mu) = Ч^1_{\Sigma_0}(K,\mu)$, де Σ_0 − скінченна підмножина нормувань поля K, що складається з розгалужених нормувань з нециклічними групами розкладу в скінченному розширенні Ґалуа, над яким двоїстий модуль $\operatorname{Hom}(M, K^{*\mathrm{sep}})$ стає сталим. ◊

Існує тісний зв'язок між властивостями слабкої апроксимації та R-еквівалентністю на зв'язній лінійній алгебраїчній групі, визначеній над полем з нормуваннями, зокрема, над псевдоглобальним полем K. Нагадаємо, що дві точки $x, y \in X(K)$, де X − гладкий алгебраїчний многовид, визначений над полем K, називають R-еквівалентними, якщо існує послідовність точок $z_i \in X(K)$, $x = z_1$, $\ldots$, $y = z_n$, така, що для кожної пари z_i, z_{i+1} існує K-раціональне відображення $f_i : \mathbb{P}^1 \to X$, регулярне в точках 0 і 1, таке, що $f_i(0) = z_i$, $f_i(1) = z_{i+1}$, $1 \le i \le n-1$. Позначимо через $X(K)/R$ множину класів R-еквівалентності на $X(K)$. Для лінійної алгебраїчної групи G, визначеної над полем K, групова операція на $G(K)$ узгоджена з R-еквівалентністю, тому вона індукує групову структуру на множині $G(K)/R$. Наступний факт відображає деякі прояви цього зв'язку.

Наслідок 5. (***i***) *Нехай G − зв'язна лінійна алгебраїчна група над псевдоглобальним полем K характеристики нуль. Нехай $\Sigma \subset V^K$ − скінченна підмножина. Тоді замикання $\overline{G(K)}$ образу групи $G(K)$ відносно діагонального відображення $G(K) \to \prod\limits_{v\in\Sigma} G(K_v)$ є нормальною підгрупою, а відповідна факторгрупа $A_\Sigma(G) = \prod\limits_{v\in\Sigma} G(K_v) / \overline{G(K)}$ є скінченною абелевою групою.*

(***ii***) *Якщо група G має спеціальне накриття* (1), *то для дефекту слабкої апроксимації $G(K)/R$ маємо ізоморфізм $G(K)/R \simeq H^1(K,F)$, де F − в'ялий тор з точної послідовності* (2). *Композиції відображень*

$G(K) \to H^1(K, \mu) \to H^1(K, F)$ *і* $G(K_v) \to H^1(K_v, \mu) \to H^1(K_v, F)$ *індукують ізоморфізми скінченних абелевих груп*

$$A_\Sigma(G) \simeq \mathrm{Coker}\left[H^1(K, F) \to \prod_{v \in \Sigma} H^1(K_v, F) \right],$$

$$A_\Sigma(G) \simeq \mathrm{Coker}\left[G(K)/R \to \prod_{v \in \Sigma} G(K_v)/R \right], \tag{4}$$

де $G(K)/R$ *− група класів* R*-еквівалентності групи* G.

Д о в е д е н н я. З аналізу доведення теореми 4.13 з [9] випливає, що для доведення сформульованих у наслідку 5 властивостей досить, щоб виконувалися такі умови на поле K: $\mathrm{cd}(K) \le 2$, $\mathrm{cd}(K^{\mathrm{ab}}) \le 1$, і для центральних простих алгебр над скінченними розширеннями поля K індекси дорівнювали показникам. Раніше вже було вказано, що псевдоглобальні поля мають всі ці властивості. ◊

Наслідок 6. *Нехай* G *− напівпроста лінійна алгебраїчна група над псевдоглобальним полем* K *характеристики нуль. Припустимо, що* G *має один з таких типів:*

(***i***) G *однозв'язна;*

(***ii***) G *приєднана;*

(***iii***) G *абсолютно майже проста;*

(***iiii***) G *− внутрішня форма групи, що розкладається в метациклічному розширенні поля* K.

Тоді $G(K)/R = 0$.

Д о в е д е н н я. Досить дослівно повторити міркування з доведення наслідку 4.11 з роботи [9] з урахуванням того, що когомологічна розмірність псевдоглобального поля дорівнює 2. ◊

Наслідок 7. *Нехай* G *− напівпроста лінійна алгебраїчна група над псевдоглобальним полем* K *характеристики нуль. Якщо* G *має один з чотирьох типів з попереднього наслідку 6, то* $A_\Sigma(G) = 0$ *для кожної скінченної підмножини* $\Sigma \subset V^K$, *тобто група* G *має властивість слабкої апроксимації.*

Д о в е д е н н я випливає з (4) та аналогічних властивостей R-еквівалентності з попереднього наслідку (див. наслідок 4.14 у [9]). ◊

1. *Андрійчук В. І.* Скінченні модулі над псевдоглобальними полями // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. − 2000. − Вип. 4. − С. 23−27.
2. *Воскресенский Е. В.* Алгебраические торы. − Москва: Наука, 1977. − 224 с.
3. *Серр Ж.-П.* Когомологии Галуа. − Москва: Мир, 1968. − 208 с.
4. *Янчевский В. И.* Коммутаторные подгруппы простых алгебр с сюрьективной приведенной нормой // Докл. АН СССР. − 1975. − **221**. − С. 1056−1058.
5. *Янчевский В. И.* Приведенная унитарная K-теория. Приложения к алгебраическим группам // Мат. сб. − 1976. − **110**, № 4. − С. 579−596.
6. *Andriychuk V.* On the Brauer group and the Hasse principle for pseudoglobal fields // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Мех.-мат. − 2003. − Вип. 61. − С. 3−12.
7. *Ax J.* The elementary theory of finite fields // Ann. Math. − 1968. − **88**, No. 2. − P. 239−271.
8. *Chernousov V. I., Platonov V. P.* The rationality problem for semisimple group varieties // J. Reine angew. Math. − 1998. − **504**. − P. 1−28.
9. *Colliot-Thélène J.-L., Gille P., Parimala R.* Arithmetic of linear algebraic groups over 2-dimensional geometric fields // Duke Math. J. − 2004. − **121**. − P. 285−341.
10. *Sansuc J.-J.* Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéares sur un corps de nombres // J. Reine angew. Math. − 1981. − **327**, No. 3. − P. 12−80.

О СЛАБОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУППАХ НАД ПСЕВДОГЛОБАЛЬНЫМИ ПОЛЯМИ

Пусть G − связная линейная алгебраическая группа над полем K алгебраических функций от одной переменной с псевдоконечным полем констант характеристики нуль. Пусть G допускает специальное K-накрытие с ядром μ. Тогда для каждого конечного подмножества Σ множества всех нормирований поля K дефект $A_{\Sigma}(G)$ слабой аппроксимации совпадает с коядром отображения ограничения $H^1(K,\mu) \to \prod_{v\in\Sigma} H^1(K_v,\mu)$.

ON WEAK APPROXIMATION IN LINEAR ALGEBRAIC GROUPS OVER PSEUDOGLOBAL FIELDS

Let G be a connected reductive linear algebraic group over an algebraic function field K from one variable with pseudofinite constant field of characteristic zero. Suppose that G admits a special K-covering with kernel μ. Then for any finite subset Σ of the set of all valuations of K the defect $A_{\Sigma}(G)$ of weak approximation coincides with the cokernel of the restriction map $H^1(K,\mu) \to \prod_{v\in\Sigma} H^1(K_v,\mu)$.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
01.09.05