

## ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ ХОДИ ДВОНОГОГО РОБОТА

Досліджується задача оптимального керування дев'ятиланковою нелінійною механічною системою, яка моделює ходу двоногого робота. На рух системи накладено основні ритмічні, кінематичні та динамічні обмеження антропоморфного типу, за критерій мінімізації взято квадратичний (за керуючими моментами сил у шарнірах) функціонал. У рамках симетричної ходи (на проміжку подвійного кроку) запропоновано алгоритм побудови наближеного розв'язку сформульованої задачі керування, який ґрунтується на параметризації узагальнених координат системи кубічними згладжувальними сплайнами, концепції обернених задач динаміки та числових методах нелінійного математичного програмування.

Сучасний розвиток техніки ставить у ряд перспективних засобів пересування по рельєфній місцевості робототехнічні крокуючі системи. Це зумовлено багатьма факторами, найважливішими серед яких є висока прохідність та адаптивність до навколишнього середовища. Тому дослідження процесу ходи, пізнання принципів її організації з метою їх втілення у системах керування технічними крокуючими апаратами є актуальними.

Ця стаття продовжує низку робіт [4–7, 12], присвячених математичному моделюванню та оптимізації ходи антропоморфних локомоційних систем, зокрема, двоногих крокуючих роботів та опорно-рухового апарату людини. Тут, на відміну від зазначених статей, у задачі оптимізації ходи двоногого робота розглядаємо квадратичний функціонал, який (за певних припущень) характеризує теплові втрати в керуючих електроприводах. У рамках запропонованої параметризації шуканих законів руху системи виконано порівняльний аналіз субоптимальних процесів, отриманих за допомогою як кубічних згладжувальних сплайнів, так і звичайних інтерполяційних сплайнів. Порівнюються також розв'язки задачі параметричної оптимізації, побудовані за допомогою методу Розенброка [2] і квазіньютонівської модифікації методу лінеаризації Пшеничного [13, 14]. У різноманітних постановках задачі динаміки та оптимізації ходи двоногих роботів досліджувались, зокрема, в працях [3, 8, 9, 15–17].

**1. Механіко-математична модель двоногого робота.** Для моделювання ходи двоногого робота використаємо систему твердих тіл, схематично зображених на рис. 1. Корпус робота моделюємо тілом  $NG$ , дві чотириланкові ноги – тілами  $NK_i$ ,  $K_iA_i$ ,  $A_iH_iM_i$ ,  $M_iS_i$ ,  $i = 1, 2$ . Тіла з'єднані між собою ідеальними циліндричними шарнірами  $N$ ,  $K_i$ ,  $A_i$ ,  $M_i$ , осі яких ортогональні до площини  $OXY$ . Робот здійснює антропоморфне локомоційне переміщення (ходу) по нерухомій горизонтальній поверхні вздовж осі  $OX$ . Рух системи відбувається внаслідок взаємодії керуючих моментів сил  $q_i$ ,  $u_i$ ,  $p_i$ ,  $w_i$  у шарнірах  $N$ ,  $K_i$ ,  $A_i$ ,  $M_i$  сил реакції опорної поверхні та сили тяжіння. Керуючі моменти генеруються приводами, до складу яких входять електродвигуни.

Обмежимося моделюванням руху робота у вертикальній площині  $OXY$ . Введемо вектор узагальнених координат робота  $\xi = (x, y, \psi, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , де  $(x, y)$  – координати точки  $N$  у системі відліку  $OXY$ ;  $\psi$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $\varepsilon_i$  –

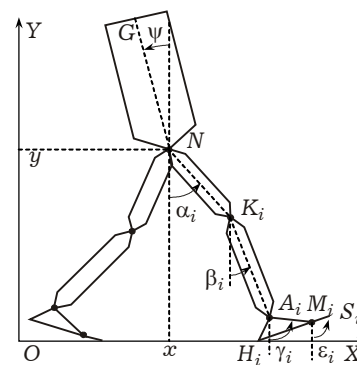


Рис. 1

кути відхилення тіл  $NG$ ,  $NK_i$ ,  $K_iA_i$ ,  $A_iH_iM_i$ ,  $M_iS_i$  від вертикалі,  $i = 1, 2$ . У припущенні, що ступні робота є безінерційними, а їхні маси – зосередженими в шарнірах  $A_1$ ,  $A_2$ , рух механічної моделі можна описати системою нелінійних диференціальних рівнянь [5–7]

$$\begin{aligned}
M\ddot{x} + \sum_{i=1}^2 (K_{ai}\dot{\alpha}_i \cos \alpha_i + K_{bi}\dot{\beta}_i \cos \beta_i)' - K_r(\dot{\psi} \cos \psi)' &= R_{1x} + R_{2x}, \\
M(\dot{y} + g) + \sum_{i=1}^2 (K_{ai}\dot{\alpha}_i \sin \alpha_i + K_{bi}\dot{\beta}_i \sin \beta_i)' - K_r(\dot{\psi} \sin \psi)' &= R_{1y} + R_{2y}, \\
J\ddot{\psi} - K_r(\ddot{x} \cos \psi + \ddot{y} \sin \psi) - gK_r \sin \psi &= -q_1 - q_2, \\
J_i\ddot{\alpha}_i + K_{ai}(\ddot{x} \cos \alpha_i + \ddot{y} \sin \alpha_i) + a_iK_{bi}(\ddot{\beta}_i \cos(\alpha_i - \beta_i) + \dot{\beta}_i^2 \sin(\alpha_i - \beta_i)) + \\
+ gK_{ai} \sin \alpha_i &= q_i - u_i + a_i(R_{ix} \cos \alpha_i + R_{iy} \sin \alpha_i), \\
J_{ci}\ddot{\beta}_i + K_{bi}(\ddot{x} \cos \beta_i + \ddot{y} \sin \beta_i) + a_iK_{bi}(\ddot{\alpha}_i \cos(\alpha_i - \beta_i) - \dot{\alpha}_i^2 \sin(\alpha_i - \beta_i)) + \\
+ gK_{bi} \sin \beta_i &= u_i - p_i + b_i(R_{ix} \cos \beta_i + R_{iy} \sin \beta_i), \quad i = 1, 2, \quad (1)
\end{aligned}$$

та умовами кінетостатичної рівноваги безінерційних ступень

$$\left. \begin{aligned} p_i &= (x_i - x_{Ri})R_{iy} - y_iR_{ix}, \\ w_i &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } x_{Ri} \in [x_{hi}, x_{mi}], \quad y_{hi} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} p_i &= w_i + (x_i - x_{mi})R_{iy} + (y_{mi} - y_i)R_{ix}, \\ w_i &= (x_{mi} - x_{Ri})R_{iy} - y_{mi}R_{ix} \end{aligned} \right\} \text{ при } x_{Ri} \in [x_{mi}, x_{si}], \quad y_{si} = 0. \quad (2)$$

Тут позначено:  $m$ ,  $r$ ,  $J$  – маса тіла  $NG$ , відстань від його центра маси до точки  $N$  і момент інерції відносно шарніра  $N$ ;  $m_{ai}$ ,  $r_{ai}$  – маса тіла  $NK_i$  і відстань від його центра маси до точки  $N$ ;  $m_{bi}$ ,  $r_{bi}$  – маса тіла  $K_iA_i$  і відстань від його центра маси до точки  $K_i$ ;  $J_{ai}$ ,  $J_{bi}$  – моменти інерції тіл  $NK_i$  і  $K_iA_i$  відносно шарнірів  $N$  і  $K_i$  відповідно;  $m_{fi}$  – маса  $i$ -ї ступні;  $M$  – сумарна маса системи;  $(x_{hi}, y_{hi})$ ,  $(x_{mi}, y_{mi})$ ,  $(x_{si}, y_{si})$  – координати точок  $H_i$ ,  $M_i$ ,  $S_i$  у системі відліку  $OXY$ ;  $R_{ix}$ ,  $R_{iy}$  – вертикальна та горизонтальна складові головного вектора сил реакції опорної поверхні, прикладеного в точці  $Z(x_{Ri}, 0)$ ;  $g$  – прискорення сили тяжіння;  $K_{ai} = m_{ai}r_{ai} + a_i(m_{bi} + m_{fi})$ ,  $K_{bi} = m_{bi}r_{bi} + b_i m_{fi}$ ,  $K_r = rm$ ,  $J_i = J_{ai} + a_i^2(m_{bi} + m_{fi})$ ,  $J_{ci} = J_{bi} + b_i^2 m_{fi}$ ,  $a_i = |OK_i|$ ,  $b_i = |K_iA_i|$ ,  $i = 1, 2$ . Тут і нижче крапкою позначено диференціювання за часом  $t$ .

Динаміку крокуючого робота будемо досліджувати на проміжку подвійного кроку  $[0, T]$  у рамках симетричної ходи, за якої рух однієї ноги повторює рух іншої із запізненням у часі  $\tau_2 = 0.5T$ . Із симетричності випливає, що одинарні кроки рівні між собою (як за тривалістю  $\tau_2$ , так і за довжиною  $L$ ). Приймемо таку послідовність фаз руху  $i$ -ї ступні робота на проміжку подвійного кроку [5–7, 12]: переكات через п'ятку  $H_i$ , опора на всю ступню, опора на фаланги  $M_iS_i$ , переكات через носок  $S_i$ , перенесення ступні над поверхнею опори. Відповідні кінематичні умови руху ступні мають вигляд

$$\begin{aligned}
x_{hi}(t) &\equiv x_{hi}^0, & y_{hi}(t) &\equiv 0, & y_{si}(t) &> y_{mi}(t) > 0, & t &\in [\tau_i, \tau_{hi}), \\
x_{hi}(t) &\equiv x_{hi}^0, & y_{hi}(t) &\equiv y_{mi}(t) \equiv y_{si}(t) \equiv 0, & t &\in [\tau_{hi}, \tau_{mi}), \\
x_{mi}(t) &\equiv x_{mi}^0, & y_{hi}(t) &> 0, & y_{mi}(t) &\equiv y_{si}(t) \equiv 0, & t &\in [\tau_{mi}, \tau_{1+i}), \\
x_{si}(t) &\equiv x_{si}^0, & y_{hi}(t) &> y_{mi}(t) > 0, & y_{si}(t) &\equiv 0, & t &\in (\tau_{3-i}, \tau_{si}), \\
y_{hi}(t) &> 0, & y_{mi}(t) &> 0, & y_{si}(t) &> 0, & t &\in [\tau_{si}, \tau_{4-i}), \quad (3)
\end{aligned}$$

де  $\tau_{hi}, \tau_{mi}, \tau_{si}$  – часові параметри фаз руху  $i$ -ї ступні;  $\tau_1 = 0, \tau_3 = T$ ;  $x_{h1}^0 = 0, x_{h2}^0 = x_{h1}^0 + L, x_{mi}^0 = x_{hi}^0 + \ell_1, x_{s1}^0 = x_{m1}^0 + \ell_2, x_{s2}^0 = x_{h1}^0 - L + \ell_1 + \ell_2, \ell_1 = |H_1M_1| = |H_2M_2|, \ell_2 = |M_1S_1| = |M_2S_2|, i = 1, 2$ . Зазначимо, що умови (3) визначені на напіввідкритих інтервалах: для 1-ї ступні – при  $t \in (0, T)$ , для 2-ї – при  $t \in (0, T]$ . На введені часові параметри накладемо антропоморфні ритмічні умови

$$0 < \tau_{s2} < \tau_{m1} < \tau_2 < \tau_{s1} < \tau_{m2} < T, \quad (4)$$

які впливають із аналізу ритмічних характеристик ходи людини в «нормі» [6, 7]. Схематично розподіл фаз руху ступень робота зображено на рис. 2, де наведено точки, які в даний час контактують з опорною поверхнею.

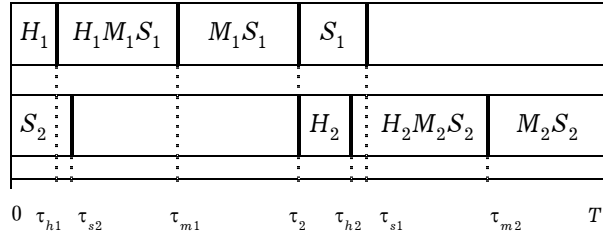


Рис. 2

До умов (3), (4) додамо обмеження динамічного характеру

$$\begin{aligned}
R_{iy} &> 0, & |R_{ix}| &\leq \mu |R_{iy}|, & t &\in \Omega_i = [\tau_i, \tau_{i+1}) \cup [\tau_{3-i}, \tau_{si}), \\
R_{iy}(t) &\equiv R_{ix}(t) \equiv 0, & t &\in [\tau_{si}, \tau_{4-i}), & x_{hi} &\leq x_{Ri} \leq x_{si}, & t &\in [\tau_i, \tau_{mi}), \\
x_{mi} &\leq x_{Ri} \leq x_{si}, & t &\in \Lambda_i = [\tau_{mi}, \tau_{1+i}) \cup [\tau_{3-i}, \tau_{si}), & i &= 1, 2, \quad (5)
\end{aligned}$$

які описують вільне упирання ступень на поверхню крокування, непроковзування ступень ( $\mu$  – коефіцієнт тертя між ступнею та опорною поверхнею) і положення точки  $Z$  прикладання головного вектора опорних реакцій.

Доповнимо кінематичні умови (3) співвідношеннями, які довизначають положення ступень (точок контакту з поверхнею опори) у початковий  $t = 0$  і кінцевий  $t = T$  моменти часу, а також умовами симетричності одинарних кроків робота:

$$\begin{aligned}
x_{m2}(0) &= x_{h1}^0 + l_1 - L, & y_{m2}(0) &= 0, & x_{h1}(T) &= x_{h1}^0 + 2L, & y_{h1}(T) &= 0, \\
\zeta_i(t + \tau_2) &= \zeta_{3-i}(t) + \mathbf{L}, & \dot{\zeta}_i(t + \tau_2) &= \dot{\zeta}_{3-i}(t), & i &= 1, 2, \quad (6)
\end{aligned}$$

де  $\zeta_i = (x, y, \psi, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \varepsilon_i), \mathbf{L} = (L, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ .

**2. Параметрична оптимізація ходи робота.** Для формулювання задачі оптимізації ходи робота введемо позначення міжланкових кутів у шарнірах  $N, K_i, A_i: \eta_{Ni}(t) \equiv \alpha_i(t) - \psi(t), \eta_{Ki}(t) \equiv \alpha_i(t) - \beta_i(t), \eta_{Ai}(t) \equiv \gamma_i(t) - \beta_i(t) - \bar{\gamma}_i$ , де  $\bar{\gamma}_i = 90^\circ - \varphi_{Mi}, \varphi_{Mi} = \angle A_iM_iH_i, i = 1, 2$ . Кут  $\eta_{Ai}$  визначає відхилення ступні  $A_iH_iM_i$  відносно ланки  $A_iK_i$ . Накладемо на міжланкові кути обмеження

$$\theta_{Ni} \leq \eta_{Ni}(t) \leq \Theta_{Ni}, \quad \theta_{Ki} \leq \eta_{Ki}(t) \leq \Theta_{Ki}, \quad \theta_{Ai} \leq \eta_{Ai}(t) \leq \Theta_{Ai},$$

$$t \in [0, T], \quad (7)$$

де  $\theta_{Ni, Ki, Ai}$ ,  $\Theta_{Ni, Ki, Ai}$  – задані на проміжку  $[0, T]$  функції, які визначають нижні та верхні допустимі значення міжланкових кутів,  $i = 1, 2$ .

Сформулюємо таку задачу оптимального керування. На проміжку подвійного кроку  $t \in [0, T]$  у рамках симетричної ходи з довжиною кроку  $L$  визначити закон руху робота  $\xi^*(t)$  і відповідні керування  $q_i^*(t)$ ,  $u_i^*(t)$ ,  $p_i^*(t)$ ,  $w_i^*(t)$ ,  $i = 1, 2$ , які з огляду на рівняння (1), (2) при обмеженнях (3)–(7) мінімізують функціонал

$$\Phi = \frac{1}{2L} \int_0^T \sum_{i=1}^2 [q_i^2(t) + u_i^2(t) + p_i^2(t) + w_i^2(t)] dt. \quad (8)$$

Зазначимо, що квадратичний функціонал (8) є загальноприйнятим функціоналом, який використовують у задачах оптимального керування. У разі, коли керування роботом відбувається за допомогою електродвигунів постійного струму, функціонал (8) (за певних припущень) характеризує сумарну кількість тепла, яка виділяється в обмотках двигунів [1].

Розроблено алгоритм побудови наближеного розв'язку сформульованої задачі оптимального керування. Алгоритм ґрунтується на процедурах параметризації узагальнених координат механічної системи, концепції обернених задач динаміки та числових методах нелінійного математичного програмування. За параметри оптимальності вибираємо значення функцій параметризації у вузлах дискретизації проміжку  $[0, T]$ . Накладені на рух системи обмеження задовольняємо за допомогою методу зовнішніх штрафних функцій.

Наведемо окремі процедурні моменти розробленого алгоритму, необхідні для опису результатів числового моделювання. Більш детально запропонований алгоритм описано в [5]. Враховуючи змінну кількість ступенів вільності системи на прийнятих фазах руху (3), вводимо множину незалежно варійованих функцій

$$\omega = \bigcup_{k=1}^5 \omega_k, \quad \omega_1 = \{x(t), x_g(t), \eta_{K1}(t), \eta_{K2}(t)\}, \quad t \in [0, T],$$

$$\omega_2 = \{\alpha_2(t), \gamma_1(t)\}, \quad t \in [0, \tau_2], \quad \omega_3 = \{\alpha_1(t), \gamma_2(t)\}, \quad t \in [\tau_2, T],$$

$$\omega_4 = \{\gamma_2(t), \eta_{M2}(t)\}, \quad t \in [\tau_{s2}, \tau_2],$$

$$\omega_5 = \{\gamma_1(t), \eta_{M1}(t)\}, \quad t \in [\tau_{s1}, T], \quad (9)$$

де  $x_g = x(t) - r \sin \psi(t)$  – абсциса центра маси корпусу;  $\eta_{Mi} = \varepsilon_i(t) - \gamma_i(t) - \varphi_{Mi}$  – кут у шарнірі  $M_i$  (кут між прямими  $A_i M_i$  і  $M_i S_i$ ). Функції множин  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  параметризуємо за допомогою кубічних згладжувальних сплайнів [10]. Кубічний згладжувальний сплайн  $S^\omega(t)$  визначається часовою сіткою  $\sigma_0^\omega, \sigma_1^\omega, \dots, \sigma_{n^\omega}^\omega$ , значеннями  $z_0^\omega, z_1^\omega, \dots, z_{n^\omega}^\omega$  у вузлах сітки та відповідними коефіцієнтами згладжування  $\rho_0^\omega, \rho_1^\omega, \dots, \rho_{n^\omega}^\omega$ , а також граничними умовами типу

$$\dot{S}^\omega(\sigma_0^\omega) = \dot{a}^\omega, \quad \ddot{S}^\omega(\sigma_0^\omega) = \ddot{a}^\omega, \quad (10)$$

або

$$\dot{S}^\omega(\sigma_0^\omega) = a^\omega, \quad \dot{S}^\omega(\sigma_{n^\omega}^\omega) = b^\omega. \quad (11)$$

Для кожної параметризованої функції величини  $z_0^\omega, z_1^\omega, \dots, z_{n^\omega}^\omega, a^\omega, b^\omega$  приймаємо за параметри оптимізації. При цьому частину цих параметрів використовуємо для задоволення умов (3), (6) у моменти часу  $t = 0, \tau_2, T$ . Коefіцієнти згладжування  $\rho_0^\omega, \rho_1^\omega, \dots, \rho_{n^\omega}^\omega$  є параметрами алгоритму та приймають фіксовані значення. При параметризації функцій з множини  $\omega_1$  використовуємо сплайни з граничними умовами (10), а з множин  $\omega_2, \omega_3$  – сплайни з умовами (11). Функції з множин  $\omega_4, \omega_5$  описують рух ступень на фазах їх перенесення над поверхнею опори. Враховуючи безінерційність ступень, їх рух на фазі перенесення  $[\tau_{si}, \tau_{4-i}]$  задаємо у вигляді лінійних функцій від часу  $t$ :

$$\gamma_i(t) \equiv [\gamma_i(\tau_{4-i}) - \gamma_i(\tau_{si})] \frac{t - \tau_{si}}{\tau_{4-i} - \tau_{si}},$$

$$\eta_{Mi}(t) \equiv \eta_{Mi}(\tau_{si}) \frac{\tau_{4-i} - t}{\tau_{4-i} - \tau_{si}},$$

де момент часу завершення двоопорної фази  $\tau_{si}$  обчислюємо на основі аналізу розміщення точок  $A_i, M_i, S_i$  відносно прямої  $OX$ ,  $i = 1, 2$ . Координати цих точок знаходимо за допомогою побудованих раніше функцій  $x, \eta_{Ki}, \gamma_{3-i}, \alpha_i$  і нескладних тригонометричних перетворень. Керуючі моменти  $q_i, u_i, p_i, w_i$ , а також реакції  $R_{ix}, R_{iy}$  і точку їх прикладання  $Z(x_{Ri}, 0)$  обчислюємо з рівнянь руху (1), (2), у яких на одноопорних фазах  $[\tau_{s2}, \tau_2), [\tau_{s1}, T)$  для переносної ноги задаємо

$$R_{1x}(t) \equiv R_{1y}(t) \equiv 0, \quad x_{R1}(t) \equiv 0 \quad \text{при } t \in [\tau_{s2}, \tau_2),$$

$$R_{2x}(t) \equiv R_{2y}(t) \equiv 0, \quad x_{R2}(t) \equiv 0 \quad \text{при } t \in [\tau_{s1}, T).$$

На двоопорних фазах  $[0, \tau_{s2}), [\tau_2, \tau_{s1})$  шукані функції  $x_{R1}, x_{R2}$ , а також  $R_{2x}$  при  $t \in [0, \tau_{s2})$  і  $R_{1x}$  при  $t \in [\tau_2, \tau_{s1})$  довизначаємо за допомогою лінійної інтерполяції за їх значеннями на суміжних одноопорних фазах. Накладені на рух системи обмеження (3), (5)–(7) подаємо в інтегральній формі:

$$\begin{aligned} Q_{Ni} &= \int_0^T [((\eta_{Ni} - \Theta_{Ni})_+)^2 + ((\theta_{Ni} - \eta_{Ni})_+)^2] dt, \\ Q_{Ki} &= \int_0^T [((\eta_{Ki} - \Theta_{Ki})_+)^2 + ((\theta_{Ki} - \eta_{Ki})_+)^2] dt, \\ Q_{Ai} &= \int_0^T [((\eta_{Ai} - \Theta_{Ai})_+)^2 + ((\theta_{Ai} - \eta_{Ai})_+)^2] dt, \\ Q_{Ri} &= \int_{\Omega_i} ((-R_{iy})_+)^2 dt, \quad Q_{\mu i} = \int_{\Omega_i} ( (|R_{ix}| - \mu |R_{iy}| )_+ )^2 dt, \\ Q_{xi} &= \int_{\tau_{s,3-i}}^{\tau_{mi}} [((x_{Hi} - x_{Ri})_+)^2 + ((x_{Ri} - x_{Si})_+)^2] dt + \\ &\quad + \int_{\tau_{mi}}^{\tau_{i+1}} [((x_{Mi} - x_{Ri})_+)^2 + ((x_{Ri} - x_{Si})_+)^2] dt, \\ Q_{yi} &= \int_0^T [((-y_{hi})_+)^2 + ((-y_{mi})_+)^2 + ((-y_{si})_+)^2] dt, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (12)$$

де  $(v)_+ = \begin{cases} v, & v \geq 0, \\ 0, & v < 0. \end{cases}$  Співвідношення (12), а також функціонал (8) обчислює-

мо за допомогою стандартних процедур числового інтегрування. Остаточно вихідна задача оптимального керування ходом робота зводиться до задачі нелінійного математичного програмування

$$Q_0(\mathbf{C}) \rightarrow \min_{\mathbf{C}}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{C}) = \mathbf{0}, \quad (13)$$

де  $\mathbf{C}$  – вектор параметрів оптимізації, цільова функція  $Q_0(\mathbf{C})$  формується на основі функціонала (8), вектор-функція  $\mathbf{Q}$  – на основі (12).

**3. Числове моделювання ходи робота.** Опишемо числові результати розв’язування задачі параметричної оптимізації ходи робота з такими конструктивними параметрами:  $M = 73.2$  кг,  $m = 46.6$  кг,  $r = 0.39$  м,  $J = 7.1$  Нм<sup>2</sup>,  $m_{a1} = m_{a2} = 8.5$  кг,  $a_1 = a_2 = 0.47$  м,  $r_{a1} = r_{a2} = 0.26$  м,  $J_{a1} = J_{a2} = 0.26$  Нм<sup>2</sup>,  $m_{b1} = m_{b2} = 3.5$  кг,  $b_1 = b_2 = 0.53$  м,  $r_{b1} = r_{b2} = 0.21$  м,  $J_{b1} = J_{b2} = 0.22$  Нм<sup>2</sup>,  $m_{f1} = m_{f2} = 1.2$  кг,  $\ell_1 = 0.19$  м,  $\ell_2 = 0.1$  м,  $\varphi_{M1} = \varphi_{M2} = 38^\circ$ ,  $|A_1M_1| = |A_2M_2| = 0.17$  м. Тривалість подвійного кроку  $T = 1.14$  с, довжина кроку  $L = 0.755$  м, коефіцієнт тертя  $\mu = 0.9$ . Нижню і верхню межі  $\theta_{Ni, Ki, Ai}$ ,  $\Theta_{Ni, Ki, Ai}$  областей зміни міжланкових кутів задавали на підставі експериментальних досліджень ходи людини [18]. Параметрам числової схеми алгоритму надавали таких значень:  $n^x = n^{xg} = 25$ ,  $n^{\alpha_1} = n^{\alpha_2} = 14$ ,  $n^{\gamma_1} = n^{\gamma_2} = 21$ ,  $n^{\eta_{K1}} = n^{\eta_{K2}} = 23$ ,  $\rho^x = \rho^{xg} = \rho^{\alpha_1} = \rho^{\alpha_2} = \rho^{\gamma_1} = \rho^{\gamma_2} = 10^{-2}$ ,  $\rho^{\eta_{K1}} = \rho^{\eta_{K2}} = 10^{-4}$ . Загальна кількість параметрів оптимізації становила 77.

Для розв’язування задачі (13) використовували метод Розенброка спільно з методом зовнішніх штрафних функцій [2]. Початковий крок методу Розенброка становив 0.01, коефіцієнт зміни довжини кроку – 1.5. Проводились 4 ітерації методу зовнішніх штрафних функцій, де на першій ітерації коефіцієнти при штрафних функціях (12) приймали значення:  $Q_{Ni}$ ,  $Q_{Ki}$ ,  $Q_{Ai}$  –  $10^5$ ,  $Q_{Xi}$  –  $10^6$ ,  $Q_{\mu i}$  –  $10^4$ , а на кожній наступній ітерації вони збільшувалися в 10 разів. Коефіцієнти при штрафних функціях  $Q_{Ri}$ ,  $Q_{yi}$  на всіх ітераціях задавались відповідно  $10^5$  і  $10^3$ . Точність за параметрами оптимізації і значенням цільової функції становили відповідно  $10^{-6}$  і  $10^{-1}$ , час розв’язування задачі (13) на комп’ютері типу AMD Sempron 2200+ МГц – близько 4 хв.

Отриманий субоптимальний закон руху двоногого робота характеризується такими ритмічними параметрами:  $\tau_{h1} = 0.11T$ ,  $\tau_{h2} = 0.38T$ ,  $\tau_{s1} = 0.56T$ ,  $\tau_{h2} = 0.61T$ ,  $\tau_{m2} = 0.88T$ ,  $\tau_{s2} = 0.06T$ . Під час оптимізації значення цільової функції (8) було зменшене приблизно в 7 раз та остаточно стало рівним  $\Phi^* = 5433.7$ . Кінематичні та динамічні характеристики побудованого субоптимального процесу зображено на рис. 3–14 (жирні лінії). Тут час  $t$  виражено у відсотках щодо тривалості подвійного кроку, кути – в градусах, динамічні характеристики віднесено до сумарної маси системи та виражено: моменти – в Нм/кг, реакції – в Н/кг. На рис. 3–5 наведено графіки міжланкових кутів  $\eta_{N1}$ ,  $\eta_{K1}$ ,  $\eta_{A1}$ , де тонкими лініями показано області допустимих значень цих кутів [18]. Згідно з числовими даними відносна похибка відхилення кутів від їх допустимих областей не перевищує 0.2% [5]. Відповідні керуючі моменти в шарнірах системи, а також реакції опорної поверхні зображено на рис. 6–11. Для порівняння на рис. 6–8, 10, 11 тонкими лініями показані області зміни відповідних моментів і реакцій [18]. На

графіках видно, що динамічні характеристики, отримані шляхом розв'язання задачі параметричної оптимізації (13), добре узгоджуються із загальноприйнятими областями зміни цих характеристик. Зміну (в часі) положення точки  $Z$  показано на рис. 12. Тут  $x_{R1}$  виражено в м, час  $t$  розглядається на проміжку опори 1-ї ступні  $[0, \tau_{s1})$ . Тонкі криві 1, 2, 3 задають відповідно абсиси точок  $H_1$ ,  $M_1$  і  $S_1$ . Видно, що при опорі на ступню точка  $Z$  знаходиться у межах опорного відрізка і в процесі руху ступні переміщується від п'ятки  $H_1$  до носка  $S_1$ , що співпадає з результатами експериментальних досліджень [18].

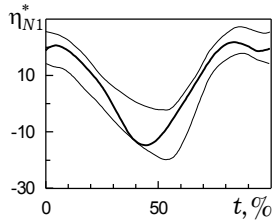


Рис. 3

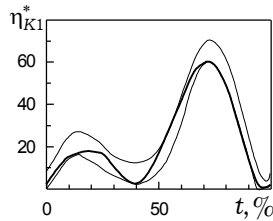


Рис. 4

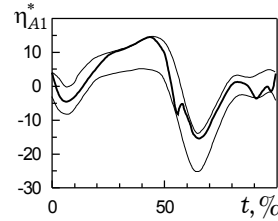


Рис. 5

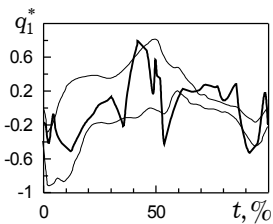


Рис. 6

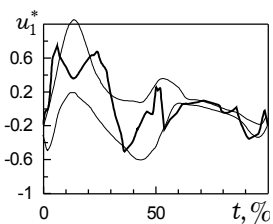


Рис. 7

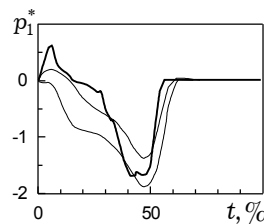


Рис. 7

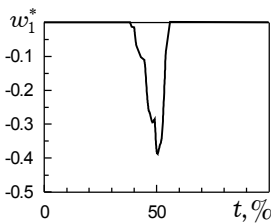


Рис. 9

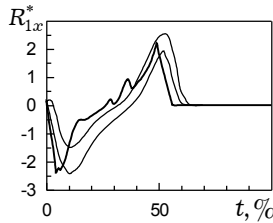


Рис. 10

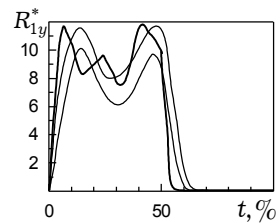


Рис. 11

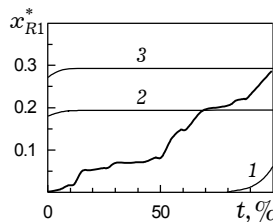


Рис. 12

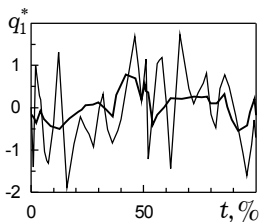


Рис. 13

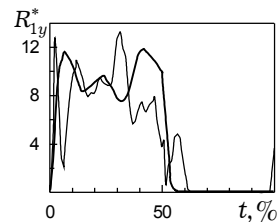


Рис. 14

Побудований субоптимальний закон руху робота характеризується незначними коливаннями корпусу: кутові коливання відбуваються з амплітудою  $0.6^\circ$  відносно прямої, відхиленої назад від вертикалі на  $1.1^\circ$ , вертикальні коливання точки корпусу  $N$  проходять на середній висоті  $1.115$  м і їх амплітуда не перевищує  $0.014$  м. Швидкість кутових коливань корпусу не перевищує  $10^\circ \text{с}^{-1}$ , швидкість вертикальних коливань точки  $N$  —  $0.21 \text{мс}^{-1}$ . Максимальна швидкість горизонтального переміщення точки  $N$  становить  $1.44 \text{мс}^{-1}$ .

Для дослідження впливу коефіцієнтів згладження  $\rho_0^0, \rho_1^0, \dots, \rho_{n^0}^0$  на процес побудови розв'язку, на його кінематичні та динамічні характерис-

тики наведений вище алгоритм параметризації був реалізований для звичайних інтерполяційних сплайнів, тобто  $\rho_0^0 = \rho_1^0 = \dots = \rho_{n^0}^0 = 0$ . Для порівняння на рис. 13, 14 тонкими лініями зображено графіки моменту  $q_1$  і реакції  $R_{1y}$ , які відповідають звичайним сплайнам. На графіках видно, що для згладжених сплайнів (жирні лінії) динамічні характеристики мають менший рівень осциляції і менші порогові значення. При цьому процес побудови субоптимального розв'язку при згладжених сплайнах має стійкіший характер порівняно зі звичайними сплайнами. Для звичайних сплайнів часто не можна було досягнути заданої точності виконання обмежень у задачі (13).

Паралельно з методом Розенброка задачу параметричної оптимізації (13) розв'язували також за допомогою квазіньютонівської модифікації методу лінеаризації (КММЛ) з різницевою апроксимацією похідних [13, 14]. При цьому використовували квазіньютонівський перерахунок Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно (BFGS). Для обчислення градієнтів використовували чисельне диференціювання за формулою центральних різниць з кроком  $10^{-5}$ . Параметр пошуку величини кроку руху  $\varepsilon = 0.01$ , а сам пошук здійснювали алгоритмом поділу навпіл. Порівняння зазначених методів проводили для різних початкових (стартових) точок у просторі параметрів оптимізації. У табл. 1 подано окремі результати паралельного розв'язання задачі (13). Тут  $\Phi^*$  – субоптимальне значення цільової функції (8),  $E$  – питомі (на одиницю шляху) механічні енерговитрати на переміщення системи [3–7, 12],  $\Delta_t$  – час розв'язання задачі параметричної оптимізації. Порівняльний аналіз отриманих розв'язків свідчить, що для більшості початкових точок КММЛ є ефективнішим: менший час розв'язання задачі, досягнуте значення цільової функції є меншим. При цьому для побудованих за допомогою КМЛМ субоптимальних законів руху питомі енерговитрати системи  $E$  також є меншими, ніж енерговитрати, отримані методом Розенброка. Аналіз числових результатів свідчить також про (локальну) багатоекстремальність задачі параметричної оптимізації (13).

Таблиця 1

№ точки	Метод	$\Phi^*$	$E$ , Дж/м	$\Delta_t$ , хв:с
1	Розенброк	6324	141.2	2:56
	КММЛ	4825	127.5	3:06
2	Розенброк	5900	137.6	3:27
	КММЛ	5124	130.5	1:37
3	Розенброк	5867	154.2	2:24
	КММЛ	5896	145.6	0:55
4	Розенброк	5433	137.9	3:39
	КММЛ	5900	134.4	1:00
5	Розенброк	5985	135.4	2:58
	КММЛ	5678	138.2	0:50

**4. Висновки.** У рамках плоских систем твердих тіл побудовано математичну модель ходи двоногого робота по нерухомій горизонтальній поверхні. В моделі враховуються основні ритмічні, кінематичні та динамічні обмеження антропоморфного типу, зокрема, природна послідовність фаз руху ступень, вільне упирання ступень на опорну поверхню, рух «колінками» вперед. У класі симетричної ходи на проміжку подвійного кроку сформульовано задачу пошуку оптимальних законів руху двоногого робота, які при накладених обмеженнях мінімізують квадратичний функціонал. Запропоновано чисельно-аналітичний алгоритм побудови наближеного розв'язку досліджуваної задачі, який ґрунтується на параметризації узагальнених координат.



нат системи сім'єю згладжувальних кубічних сплайнів, розв'язанні оберневих задач динаміки та використанні процедур параметричної оптимізації у поєднанні з методами зовнішніх штрафних функцій. Як показали результати числових досліджень, розроблений алгоритм дає можливість за допомогою сучасних комп'ютерних систем за відносно короткий час (~2 хв.) побудувати субоптимальний керований процес для двоногого крокуючого робота. При цьому отримані числові результати добре співвідносяться з відповідними даними експериментальних досліджень. Проведені числові розрахунки свідчать також про суттєві переваги використання згладжених кубічних сплайнів при параметризації шуканих законів руху порівняно зі звичайними інтерполяційними сплайнами. Для звичайних сплайнів кінематичні та динамічні характеристики субоптимальних процесів мають більш виражений осцилюючий характер, часто в процесі розв'язання задачі параметричної оптимізації (13) не можна було досягнути заданої точності виконання обмежень, накладених на рух системи.

1. Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н. Синтез оптимального управления транспортными движениями манипуляционных роботов // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1986. – № 4. – С. 21–29.
2. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование: Теория и алгоритмы. – Москва: Мир, 1982. – 583 с.
3. Белецкий В. В. Двухногая ходьба: модельные задачи динамики и управления. – Москва: Наука, 1984. – 228 с.
4. Бербюк В. Е. Динамика и оптимизация робототехнических систем. – Киев: Наук. думка, 1989. – 188 с.
5. Бербюк В. Е., Демидюк М. В., Литвин Б. А. Математическое моделирование и оптимизация ходьбы человека с протезированной голенью // Проблемы управления и информатики. – 2005. – № 3. – С. 128–144.
6. Бербюк В. Е., Демидюк М. В., Литвин Б. А. Математичне моделювання ходи людини на підставі експериментальних даних // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикладна математика та інформатика. – 2000. – Вип. 3. – С. 88–93.
7. Бербюк В. Е., Литвин Б. А. Математичне моделювання ходи людини на основі оптимізації керованих процесів біодинамічних систем // Мат. методи та фіз. мех. поля. – 1998. – 41, № 3. – С. 153–161.
8. Бордюг Б. А., Ларин В. Б. Моделирование движения электромеханического шагающего аппарата // Проблемы управления и информатики. – 1995. – № 4. – С. 115–119.
9. Бордюг Б. А., Ларин В. Б., Тимошенко А. Г. Задачи управления шагающими аппаратами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 263 с.
10. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. – Москва: Наука, 1980. – 352 с.
11. Ларин В. Б. Управление статически неустойчивыми шагающими аппаратами // Прикл. механика. – 2000. – 36, № 6. – С. 37–66.
12. Литвин Б. А. Використання кубічних згладжувальних сплайнів у задачі оптимального керування рухом двоногого крокуючого робота // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикладна математика та інформатика. – 1999. – Вип. 1. – С. 156–160.
13. Щербина Ю. Н., Голуб Б. М. Квазиньютоновская модификация метода линеаризации // Кибернетика. – 1988. – № 6. – С. 66–71.
14. Щербина Ю. Н., Голуб Б. М. Модификация метода линеаризации для решения задачи математического программирования на простом множестве типа «параллелепипеда» // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1989. – Вып. 30. – С. 24–28.
15. Cabodevila G., Abba G. Quasi optimal gait for a bipedal robot using genetic algorithm // Proc. IEEE Conf. on System, Man and Cybernetics, Orlando (USA). – 1997. – Vol. 4. – P. 3960–3965.
16. Chessé S., Bessonnet G. Optimal dynamics of constrained multibody systems. Application to bipedal walking synthesis // Proc. 2001 IEEE Int. Conf. on Robotics & Automation, 2001. – P. 2499–2505.
17. Roussel L., Canudas-de-Wit D., Goswami A. Generation of energy optimal complete gait cycles for biped robots // Proc. 2001 IEEE Int. conf on Robotics & Automation, 2001. – P. 2036–2041.
18. Winter D. A. The biomechanics and motor control of human gait. – Univ. of Waterloo Press, Waterloo, Canada, 1991.

## ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ХОДЬБЫ ДВУНОГОГО РОБОТА

Исследуется задача оптимального управления девятизвенной нелинейной механической системой, моделирующей ходьбу двуногого робота. На движение системы наложены основные ритмические, кинематические и динамические ограничения антропоморфного типа, в качестве критерия минимизации выбран квадратичный (по управляющим моментам сил в шарнирах) функционал. В рамках симметричных походок (на интервале двойного шага) предложен алгоритм построения приближенного решения сформулированной задачи управления, основанный на параметризации обобщенных координат системы кубическими сглаживающими сплайнами, концепции обратных задач динамики и численных методов нелинейного математического программирования.

## PARAMETRIC OPTIMIZATION OF BIPEDAL ROBOT GAIT

*The optimal control problem for a nine-link nonlinear mechanical system, that models the bipedal walking robot gait, is investigated. The motion of the system has to satisfy the basic rhythmic, cinematic and dynamic restrictions of anthropomorphic type. A quadratic objective functional (on the control torques in the joints) is used. The algorithm for approximate solution of the given problem in the class of symmetric gaits (on the double stride period) is proposed. This algorithm is based on the parameterization of the system generalized coordinates by the cubic smoothing splines, inverse dynamic approach and numerical methods of nonlinear mathematical programming.*

<sup>1</sup> Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

Одержано  
08.06.05

<sup>2</sup> Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка