

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ПРЯМИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Для початково-крайової задачі теплопровідності зі змішаними граничними умовами розглянуто числові аспекти використання гранично-елементної методики. Зокрема, досліджено ефективність застосування різних способів інтегрування за часовою змінною.

Зниження на одиницю розмірності задачі внаслідок дискретизації тільки граничної поверхні та інтегральне зображення розв'язку зробили метод граничних елементів (МГЕ) доволі популярним серед широкого загалу методів наближеного розв'язування диференціальних рівнянь із частинними похідними, які описують різні фізичні процеси. Проте не всі питання, які виникають безпосередньо під час чисельної реалізації методу, знайшли вичерпну відповідь у відомих на сьогоднішній день публікаціях [1, 5, 6, 8].

Робота присвячена вивченню методом граничних елементів поведінки температурного поля T і теплового потоку q як розв'язку нестационарного рівняння теплопровідності

$$\Delta T = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad x, \tau \in \Omega \times (0, t], \quad (1)$$

де k – коефіцієнт теплопровідності.

Автори роботи [9] вказують на труднощі розв'язання рівняння (1) за допомогою використання числових схем для високоградієнтних задач у початкові моменти часу. Відомо також, що похибка обчислення значень температури в 1% призводить до більше ніж 10% похибки при обчисленні напружень у задачах квазістатичної термопружності.

Метою цієї роботи є проведення порівняльного аналізу результатів, отриманих МГЕ із залученням різних підходів інтегрування за часом при обчисленні коефіцієнтів матриць у випадку використання кусково-сталого функції для дискретизації граничного інтегрального рівняння за часом.

Постановка задачі. Процес поширення тепла, що описується рівнянням (1), розглядаємо у деякій області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ довільної форми. Припускаємо, що в кожній точці $x = (x_1, x_2)$ граничної поверхні $\partial\Omega$ тіла, за винятком скінченної кількості точок, існує однозначно визначена зовнішня одинична нормаль $n = (n_1, n_2)$. Задаємо початковий розподіл температури

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

і вплив оточуючого середовища на поверхню $\Gamma = \partial\Omega$ у вигляді змішаних граничних умов

$$\begin{aligned} T(x, \tau) &= \bar{T}(x, \tau), \quad x \in \Gamma_1, \\ q(x, \tau) &= \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial n} = \bar{q}(x, \tau), \quad x \in \Gamma_2, \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma. \end{aligned} \quad (3)$$

Метод розв'язування. Розв'язок задачі шукаємо в області $\Omega \times (0, t]$ з використанням гранично-елементної методики. Застосування апарату фундаментальних розв'язків

$$\begin{aligned} T^*(\xi, x, t, \tau) &= \frac{1}{4\pi k(t-\tau)} \exp\left[-\frac{r^2}{4k(t-\tau)}\right], \\ q^*(\xi, x, t, \tau) &= \frac{d}{8\pi k^2(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{r^2}{4k(t-\tau)}\right], \end{aligned}$$

де $r^2 = z_i z_i$; $z_i = x_i(\xi) - x_i(x)$; $d = z_i n_i(x)$, $i = 1, 2$, дозволяє звести вихідну задачу (1)–(3) до еквівалентного просторово-часового інтегрального рівняння, яке має єдиний розв'язок [1, 2, 6]:

$$\begin{aligned} T(\xi, t) + k \int_0^t \int_{\Gamma} T(x, \tau) q^*(\xi, x, t, \tau) d\Gamma(x) d\tau = \\ = k \int_0^t \int_{\Gamma} q(x, \tau) T^*(\xi, x, t, \tau) d\Gamma(x) d\tau + \int_{\Omega} T_0(x) T^*(\xi, x, t, 0) d\Omega(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Подальші дискретизації $\{\tau_f = f\Delta\tau\}_{f=0}^F$, де $\Delta\tau = t/F$, проміжку часу інтегрування $[0, t]$ і границі області $\Gamma = \bigcup_{n=1}^{N_e} \Gamma_n$, $\Gamma_n \cap \Gamma_m = \emptyset$, $m \neq n$, застосування класичної схеми колокації із залученням кусково-інтерполюючих функцій просторових $\phi(x)$ і часової змінних $\psi(\tau)$ для апроксимації шуканих функцій температури та теплового потоку дозволили редукувати рівняння (4) у граничній формі до послідовності систем лінійних алгебричних рівнянь [1, 2]

$$\sum_{f=1}^F H_{fF} T_f = \sum_{f=1}^F G_{fF} Q_f + B_0 \bar{T}_0, \quad (5)$$

де $H_{fFij} = \tilde{H}_{fFij} + c_i \delta_{fF} \delta_{ij}$; δ_{fF} , δ_{ij} – символи Кронекера, а елементи матриць \tilde{H} і G обчислюються за формулами

$$h_{fFij}^m = k \int_{\Gamma_j} \phi_m \int_{\tau_{f-1}}^{\tau_f} q^* \psi d\tau d\Gamma, \quad (6)$$

$$g_{fFij}^m = k \int_{\Gamma_j} \phi_m \int_{\tau_{f-1}}^{\tau_f} T^* \psi d\tau d\Gamma. \quad (7)$$

Далі вважатимемо, що інтерполююча функція $\psi(\tau) \equiv 1$, тобто значення T і q є кусково-сталими на кожному часовому кроці. Таке припущення є виправданим, оскільки згадані функції за часовою координатою змінюються повільніше порівняно з функціями T^* і q^* .

Розглянемо способи обчислення інтеграла $\int_{\tau_{f-1}}^{\tau_f} T^* d\tau$ у формулі (7). Автори роботи [1] пропонують таке інтегрування виконувати аналітично, оскільки підінтегральна функція – фундаментальний розв'язок – допускає це. Провівши заміну змінних $y = \frac{r^2}{4k\tau_1}$, одержимо

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{f-1}}^{\tau_f} T^* d\tau &= \int_{\tau_{f-1}}^{\tau_f} \frac{1}{4\pi k(\tau_F - \tau)} \exp\left[-\frac{r^2}{4k(\tau_F - \tau)}\right] d\tau = \\ &= - \int_{\tau_F - \tau_{f-1}}^{\tau_F - \tau_f} \frac{1}{4\pi k\tau_1} \exp\left[-\frac{r^2}{4k\tau_1}\right] d\tau_1 = - \frac{1}{\pi r^2} \int_{\tau_F - \tau_{f-1}}^{\tau_F - \tau_f} \frac{r^2}{4k\tau_1} \exp\left[-\frac{r^2}{4k\tau_1}\right] d\tau_1 = \\ &= \frac{1}{4\pi k} \int_{a_{f-1}}^{a_f} \frac{\exp(-y)}{y} dy = \frac{1}{4\pi k} [E_1(a_{f-1}) - E_1(a_f)], \end{aligned} \quad (8)$$

де $a_f = \frac{r^2}{4k(t_F - \tau_f)}$; $E_1(z)$ – інтегрально-показникова функція, визначена як [4]

$$E_1(z) = \int_z^\infty \frac{\exp(-y)}{y} dy = -C - \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{nn!}, \quad (9)$$

C – стала Ейлера, $C = 0.57721566$.

З роботи [1] відомо, що $E_1(a_f) = 0$. Проте там немає зауважень щодо обчислення інтегрально-показникової функції.

Детальний аналіз результатів значної кількості числових експериментів, проведених для оцінки різних підходів інтегрування елементів матриці G за часом і раціонального вибору кроку, дозволив виробити певні рекомендації з цього питання. Сформулюємо їх в обговоренні поданого нижче прикладу.

Числовий приклад. Розглянемо задачу, наведену у роботі [7]. Результати, отримані МГЕ, зіставимо з аналітичним розв'язком.

Досліджуємо двовимірний тепловий розподіл у прямокутній пластинці з нульовою початковою температурою, яка піддається миттєвому температурному навантаженню з обох сторін, тобто $T(\eta, \tau)|_{\eta \in \Gamma} = 400 H(\tau)$, де $H(\tau)$ –

функція Гевісайда. Інші дві сторони теплоізоляовані.

На рис. 1 схематично зображено область, у якій розв'язували задачу, а також показано значення температури та теплового потоку на границі. Теплофізичні характеристики ма-

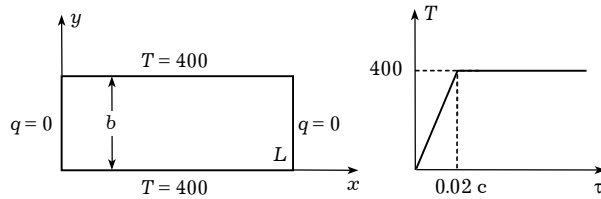


Рис. 1

теріалу та розміри пластинки вибирали такими: $k = 0.0000819 \text{ м}^2/\text{с}$; $b = 0.05 \text{ м}$; $L = 0.2 \text{ м}$.

Розглянемо один із варіантів обчислення інтегралів матриці G , а саме, за допомогою ряду (9). Установлено, що мінімальний крок, при якому розв'язок цієї задачі залишається стійким – $\Delta t = 2.8 \text{ с}$. Така залежність поведінки розв'язку від величини кроку не є випадковою і пояснюється тим, що при великих значеннях аргументу проявляється експоненціальний характер інтегрально-показникової функції $E_1(z)$. Числові експерименти показали, що гарантією стійкості розв'язку є вибір кроку за часом, який задовольняє нерівність $\Delta t > \frac{R^2}{180k}$, де R – діаметр області, що розглядається, тобто найбільша відстань між точками границі. Через такі обмеження на вибір часового кроку ця методика обчислення інтегралів за часом є неприйнятною, оскільки при її використанні стає недоступною інформація про температурний розподіл для малих значень t .

Звичайно, такі інтеграли можна обчислити і чисельно, тим більше, що аналітичне інтегрування, як було показано вище, себе не оправдало. Тому наступним кроком у дослідженні задач нестационарної теплопровідності прямим МГЕ було застосування числового інтегрування за часом, а саме, на основі методу прямокутників.

На рис. 2, 3 зображено відносні похибки обчислення температури відповідно у моменти часу $t = 4.8 \text{ с}$ і $t = 7.2 \text{ с}$, отримані з різними кроками Δt за часом. Провівши їх порівняльний аналіз, приходимо до висновку: метод прямокутників дає мінімальне відхилення числового розв'язку від аналітичного для цієї задачі приблизно на 8–9 часовому кроці (наприклад, для моменту часу $t = 4.8 \text{ с}$ найраціональнішим є крок $\Delta t = 0.6 \text{ с}$, а для моменту ча-

су $t = 7.2$ с – крок $\Delta\tau = 0.8$ с). Очевидно, що у випадку відсутності змоги порівняти отриманий розв'язок з аналітичним вибір оптимального кроку за часом є достатньо складною задачею.

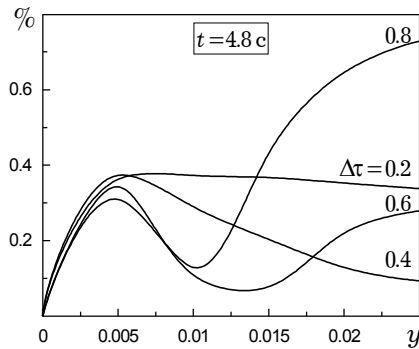


Рис. 2

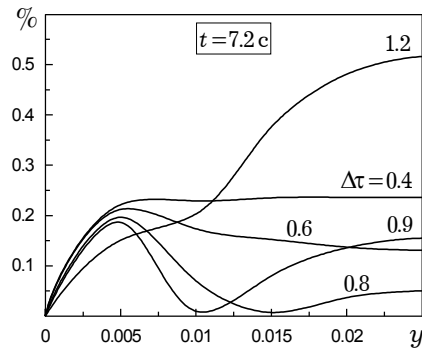


Рис. 3

У цій роботі пропонуємо використовувати інший підхід [3] до інтегрування за часом коефіцієнтів матриці G , точніше – до обчислення інтегрально-показникової функції. В околі точки $z = 0$ інтерполяцію інтегрально-показникової функції утруднює її логарифмічна особливість, тому функція $E_1(z) + \ln(z)$ може служити допоміжною, оскільки особливостей у цій області не має. У випадку великих значень z зручно застосовувати як допоміжну функцію $ze^z E_1(z)$. Вона є більш гладкою і легко інтерполюється. Введені функції апроксимуємо многочленом і раціональною функцією [4]

для $0 \leq z \leq 1$:

$$E_1(z) + \ln(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 + \varepsilon(z), \quad |\varepsilon(z)| < 2 \cdot 10^{-7}, \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} a_0 &= -0.57721566, & a_1 &= 0.99999193, \\ a_2 &= -0.24991055, & a_3 &= 0.05519968, \\ a_4 &= -0.00976004, & a_5 &= 0.00107857; \end{aligned}$$

для $1 < z \leq \infty$:

$$ze^z E_1(z) = \frac{z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4}{z^4 + b_1 z^3 + b_2 z^2 + b_3 z + b_4} + \varepsilon(z), \quad |\varepsilon(z)| < 2 \cdot 10^{-8}, \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} a_1 &= 8.5733287401, & a_2 &= 18.0590169730, \\ a_3 &= 8.6347608925, & a_4 &= 0.2677737343, \\ b_1 &= 9.5733223454, & b_2 &= 25.6329561486, \\ b_3 &= 21.0996530827, & b_4 &= 3.9584969228. \end{aligned}$$

На рис. 4 показано відносні похибки обчислення температури прямим МГЕ у момент часу $t = 4.8$ с, отримані на основі записаних вище апроксимаційних формул (10), (11) для різних кроків інтегрування за часом. При $\Delta\tau = 0.05$ одержані результати збігаються у масштабі рисунку з абсцисою.

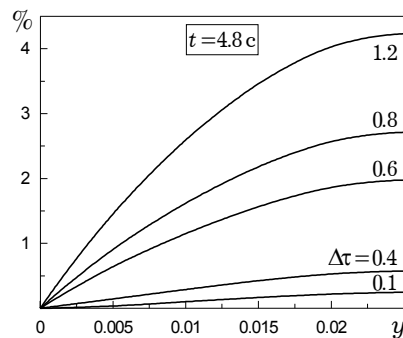


Рис. 4

Висновки. На підставі результатів числових експериментів сформулюємо деякі висновки щодо обчислення інтеграла за часом, підінтегральною функцією якого є фундаментальний розв'язок двовимірної задачі нестационарної теплопровідності:

- Обчислення інтеграла за допомогою формул (8), (9) вимагає суттєвого обмеження на величину мінімального кроку за часом. У зв'язку з цим такий підхід не може бути прийнятним.

- Подібні категоричні висновки, проте, не слід робити стосовно методу прямокутників, застосованого для чисельного інтегрування за часом, оскільки відносні похибки розв'язків задачі, отриманих МГЕ, як свідчать дані рисунків, є досить малими. На жаль, характер зміни точності розв'язків із згущенням часової сітки є непередбачуваним.

- Найбільш ефективним є спосіб обчислення зазначених інтегралів на основі використання апроксимацій допоміжних функцій інтегрально-показникової функції (10), (11). Зменшення кроку за часом дозволяє уточнити температурний розподіл в області.

1. Бреббиа К., Теллес Ж., Вробел Л. Методы граничных элементов. – Москва: Мир, 1987. – 528 с.
2. Бреббиа К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. – Москва: Мир, 1982. – 248 с.
3. Журавчак Л. М., Грицько Є. Г. Метод приграничних елементів у прикладних задачах математичної фізики. – Львів: Карпат. відділення Ін-ту геофізики НАН України, 1996. – 220 с.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
5. Beer G. Programming the boundary element method: An introduction for engineers. – New York: John Wiley & Sons, 2001. – 472 p.
6. Ibanez M. T., Power H. Advanced boundary elements for heat transfer. – WIT Press / Comput. Mech. Publ., 2002. – 144 p.
7. Sládek V., Sládek J. Computation of thermal stresses in quasi-static non-stationary thermoelasticity using boundary elements // Int. J. Num. Meth. Eng. – 1989. – 28. – P. 1131–1144.
8. Wrobel L. C. The boundary element method. – New York: John Wiley & Sons, 2002. – 468 p.
9. Zienkiewicz O. C., Taylor R. J. The finite element method. – Vol. 1: The Basis. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2002. – 688 p.

ЧИСЛОВОЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРЯМЫМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для начально-краевой задачи теплопроводности со смешанными граничными условиями рассмотрены числовые аспекты использования гранично-элементной методики. В частности, исследована эффективность применения разных способов интегрирования по времени.

NUMERICAL ANALYSIS OF HEAT CONDUCTION PROBLEMS BY DIRECT BOUNDARY-ELEMENT METHOD

The numerical aspects of using a boundary-element technique for initially boundary-value heat conduction problem with the mixed boundary conditions are considered. In particular, the effectiveness of application of different modes of time integration are investigated.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів,
Львів. ін-т пожеж. безпеки, Львів

Одержано
07.06.04