

ДОСЛІДЖЕННЯ РУЙНУВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ ПІВПЛОЩИНИ З ПІДКРІПЛЕННЯМ

За умов плоскої задачі досліджено граничну рівновагу та руйнування ортотропної півбезмежної пластини, підкріпленої гнучкою нерозтяжливою кінцевою міцністю на розрив накладкою при дії розтягувального навантаження на пластину. В околах кінців накладки уздовж її межі з пластиною розвиваються локалізовані зони передруйнування (ослабленого контакту), просувуючись від кожного краю до центру. Їм можуть відповідати області накопичення пошкодження, пластичного деформування, часткового розриву зв'язку тощо. Розглянуто два варіанти розвитку руйнування: а) розрив накладки, б) її відшарування. З використанням деформаційного критерію отримано аналітичні залежності між величинами граничного (руйнуючого) навантаження і фізико-механічними характеристиками матеріалу півплощини, а також розмірами накладки. Встановлено критичну довжину накладки зміни характеру руйнування, яка разом з пружними та міцнісними характеристиками визначає механізм можливого руйнування в композиції.

Дослідження та огляд праць класичної плоскої контактної задачі Мелана [17] для ідеально пружного тіла виконано в монографіях [1, 4, 5, 14] і в широкому колі праць. Присутня в пропонованих постановках задач і їхніх розв'язках сингулярність контактних напружень на кінцях накладки в явному вигляді виділена у статті [2]. Задачу для періодичної системи накладок сформульовано та розв'язано у праці [3], а в публікації [11] для розв'язання інтегрального рівняння запропоновано застосовувати метод ортогональних многочленів. Вплив малих зон пластичності матеріалу ізотропної півплощини в околах країв накладки на розподіл контактних напружень досліджено в праці [6] з використанням ітераційного методу пружних розв'язків О. Ільюшина. Отримано обмежені напруження в околах кінців підкріплюючого ребра, а найбільших значень пластичні деформації досягають в околах завантажених кінців стрингера. Автором у працях [7–9] запропоновано двофазну модель зони передруйнування, що враховує можливість виникнення в області країв накладок часто спостережуваних зон ослабленого контакту з пластиною. Досліджено напружено-деформований стан у системі «півплощина – накладка» та умови її граничної рівноваги. Запровадження зони передруйнування дало можливість уникнути особливостей напружень в околах кінців накладки та отримати обмежені напруження в усіх точках композиції, які дають механічно коректну картину деформування, що задовольняє також і закон парності дотичних напружень. У розвиток [7–9] у цій праці відповідна модельна схема застосована до аналізу гранично рівноважного стану ортотропної півплощини з накладкою за умов силового навантаження на нескінченності.

Постановка задачі та її розв'язок. В умовах плоскої задачі теорії пружності розглянемо півбезмежну ортотропну пластину одиничної товщини, що займає нижню півплощину і віднесена до декартової системи координат xOy (рис. 1) і розтягується на нескінченності паралельно до її краю. До краю пластини прикріплена абсолютно гнучка нерозтяжлива накладка довжини $2a$ кінцевої міцності на розрив P_{ut} . За пружним роз-

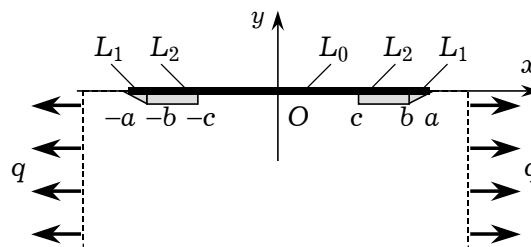


Рис. 1

в'язком задачі (див., наприклад, [1, 4, 5, 14]) найбільша концентрація напружень виникає в околах кінців підкріплення, де насамперед і слід сподіватися виникнення й зі збільшенням навантаження розвитку локалізованих зон передруйнування, що можуть імітувати області пластичного деформування, накопичення пошкоджень, часткового розриву зв'язку та ін. Крім того, аналіз двовимірного напруженого стану в околах кінців накладки свідчить, що максимальні дотичні напруження τ_{\max} мають місце уздовж межі між пластиною і накладкою. Тому вважатимемо, що саме тут розвиваються локалізовані зони передруйнування (ослабленого контакту), просуваючись від кожного краю до центральної частини.

Приймаємо, що кожна зона передруйнування складається з двох частин: 1) ділянки розпушення $L_1 \approx b < |x| < a$ та 2) ділянки пластичного деформування $L_2 \approx c < |x| < b$. При цьому на ділянках розпушення (ослабленого, неідеального контакту) дотичні напруження лінійно зростають від нуля до свого граничного значення τ_s^* :

$$\tau_{xy} = \tau_s^* \left(1 - \frac{|x| - b}{a - b}\right) \operatorname{sgn}(x), \quad x \in L_1, \quad (1)$$

а на ділянках пластичного деформування вони є сталими:

$$\tau_{xy} = \tau_s^* \operatorname{sgn}(x), \quad x \in L_2. \quad (2)$$

Тут τ_s^* – зсувна міцність контактної межі «пластина – накладка», а при пластичному деформуванні – її зсувний поріг пластичності;

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

На ділянці $|x| \leq c$ зв'язок накладки з пластиною ідеальний, і тому позовжні деформації там відсутні:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = 0, \quad x \in L_0. \quad (3)$$

На нескінченності задано одинісний напружений стан

$$\sigma_{xx}^\infty = q. \quad (4)$$

Значення параметра c знаходимо в процесі розв'язку задачі, а параметр b задаємо. Запровадження зони передруйнування дало можливість уникнути особливостей напружень в околах кінців накладки та отримати обмежені напруження в усіх точках композиції.

Для розв'язування задачі використаємо відомі [10, 15] подання напружень і деформацій в півплощині через функції комплексних змінних $z_j = x + s_j y$, $j=1, 2$:

$$\begin{aligned} \frac{s_2 \sigma_{yy} + \tau_{xy}}{s_2 - s_1} &= \Phi(z_1) - \Phi(\bar{z}_2) + g_1 \left[\overline{\Phi(z_1)} - \overline{\Phi(z_2)} \right], \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\chi_2} (u q_2 - v p_2) &= \chi_1 \Phi(z_1) + \Phi(\bar{z}_2) + g_2 \overline{\Phi(z_1)} + g_1 \overline{\Phi(z_2)}, \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{s_2 - \bar{s}_1}{s_2 - s_1}, \quad g_2 = \frac{p_2 \bar{q}_1 - q_2 \bar{p}_1}{g_3 (q_2 \bar{p}_2 - p_2 \bar{q}_2)}, \quad g_3 = \frac{s_2 - s_1}{s_2 - \bar{s}_2}, \\ \chi_1 &= \frac{1}{\chi_2} (p_1 q_2 - p_2 q_1), \quad \chi_2 = g_3 (p_2 \bar{q}_2 - q_2 \bar{p}_2), \quad p_1 = a_{11} s_1^2 + a_{12}, \end{aligned}$$

$$p_2 = a_{11}s_2^2 + a_{12}, \quad q_1 = \frac{1}{s_1}(a_{12}s_1^2 + a_{22}), \quad q_2 = \frac{1}{s_2}(a_{12}s_2^2 + a_{22}),$$

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}.$$

Параметри s_1, s_2 є коренями характеристичного рівняння

$$s^4 + \left(\frac{E_1}{G} - 2\nu_{12}\right)s^2 + \frac{E_1}{E_2} = 0$$

і визначаються співвідношеннями $s_1 \cdot s_2 = -\alpha_0$, $s_1 + s_2 = i[2(\alpha_0 + \beta_0)]^{1/2}$, у яких $\alpha_0 = \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{1/2}$; $\beta_0 = \frac{E_1}{2G} - \nu_{12}$; E_1, E_2 – модулі Юнга для розтягу (стиску) по головних напрямках Ox та Oy ; G – модуль зсуву, що характеризує зміну кута між головними напрямками Ox та Oy ; ν_{12} – коефіцієнт Пуассона, що описує скорочення в напрямку Oy при розтязі в напрямку Ox . Розглядуваний випадок ортотропії найбільш часто зустрічається на практиці. Для таких матеріалів, як боропластики, вуглепластики, склопластики, деревина з правильними річними прошарками, фанера, тобто для багатьох ортотропних матеріалів, значення s_1, s_2 , отримані із розв'язку характеристичного рівняння є чисто уявними: $s_1 = i\beta_1, s_2 = i\beta_2$, де β_1, β_2 – дійсні числа.

Функцію напружень $\Phi(z)$ знаходимо, підставляючи вирази (5) у крайові умови (1)–(3). В результаті отримуємо задачу лінійного спряження [12] з кусково-неперервними коефіцієнтами

$$\Phi^+(x) - g_0(x)\Phi^-(x) = f_0(x), \quad (6)$$

$$\text{де } g_0(x) = \begin{cases} -1, & x \in L_3, \\ 1, & x \in L_1 + L_2, \end{cases} \quad f_0(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in L_1, \\ f_2(x), & x \in L_2, \\ 0, & x \in L_3, \end{cases}$$

$$f_1(x) = \frac{\tau_s^*}{s_2 - s_1} \left(1 - \frac{|x| - b}{a - b}\right) \text{sgn}(x), \quad f_2(x) = \frac{\tau_s^*}{s_2 - s_1} \text{sgn}(x).$$

Розв'язок відповідної до (6) однорідної задачі вибираємо у вигляді

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - c^2}}, \quad z = x + iy.$$

Тоді загальним розв'язком задачі спряження (6) з урахуванням умови на нескінченності (4) буде функція напружень

$$\Phi(z) = \tau_s^* \frac{a\Gamma_1(z, a, c) - b\Gamma_1(z, b, c) - z[\Gamma_2(z, a, c) - \Gamma_2(z, b, c)]}{2\pi i(s_2 - s_1)(a - b)}, \quad (7)$$

$$\text{де } \Gamma_1(z, w, c) = \ln \frac{\xi^-(w)}{\xi^+(w)}, \quad \xi^\pm(w) = w\sqrt{z^2 - c^2} \pm z\sqrt{w^2 - c^2},$$

$$\Gamma_2(z, w, c) = \ln \frac{\eta^-(w)}{\eta^+(w)}, \quad \eta^\pm(w) = \sqrt{w^2 - c^2} \pm \sqrt{z^2 - c^2}.$$

При цьому має місце співвідношення, що враховує обмеженість напружень у вершинах зон передруйнування $x = \pm c$:

$$\frac{q}{2\tau_s^*} - \frac{s_1 + s_2}{i\pi(a - b)} f_3(a, b, c) = 0, \quad (8)$$

де

$$f_3(a, b, c) = b \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - c^2}}{c} - a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - c^2}}{c} + \sqrt{b^2 - c^2} + \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Формули (7), (8) разом з поданням (5) описують поле напружень і деформацій у пластині з накладкою і дають можливість дослідити умови її руйнування при формулюванні відповідних критеріїв.

Деформаційний критерій відшарування. Рівняння (8) подає зв'язок між розмірами зон передруйнування, навантаженням і механічними характеристиками пластини. За результатами його розв'язування на рис. 2 подано залежності відносної довжини зон передруйнування $\varepsilon_c = (a - c)/a$ від знерозміреного параметра навантаження $\tilde{q} = q/(2\tau_s^*)$ за безмежно малих ділянок розпушення $\gamma = (a - b)/a$.

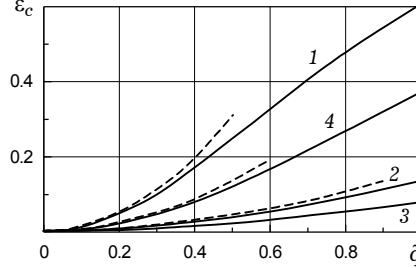


Рис. 2

Кривим 1-4 відповідають такі значення параметрів ортотропії матеріалу пластини:

1 - епоксидна смола, армована склом, $E_1 = 54\,900$ МПа, $E_2 = 18\,300$ МПа, $G_{12} = 8\,800$ МПа, $s_1 = 2.2712i$, $s_2 = 0.762i$, $\alpha_0 = 1.73$, $\beta_0 = 2.87$;

2 - епоксидна смола, армована бором, $E_1 = 2.81 \cdot 10^5$ МПа, $E_2 = 2.81 \cdot 10^4$ МПа, $G_{12} = 1.05 \cdot 10^4$ МПа, $s_1 = 5.0773i$, $s_2 = 0.6228i$, $\alpha_0 = 3.16$, $\beta_0 = 13.14$;

3 - епоксидна смола, армована графітом, $E_1 = 2.81 \cdot 10^5$ МПа, $E_2 = 1.12 \cdot 10^4$ МПа, $G_{12} = 5.6 \cdot 10^3$ МПа, $s_1 = 6.9992i$, $s_2 = 0.7144i$, $\alpha_0 = 5.01$, $\beta_0 = 24.86$;

4 - ізотропія, $E_1/E_2 = 1$, $E_1/G_{12} = 2.5$, $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 1$.

Для всіх матеріалів $\nu_{12} = 0.25$, а анізотропія матеріалу виражена через параметри α_0 , β_0 . Характеристики матеріалів взяті з праці [16]. Ортотропія матеріалу півплощини зменшує розміри зон передруйнування за інших однакових умов.

Для смуг передруйнування, малих порівняно з довжиною накладки ($a - c \ll a$), виконавши в формулі (8) розвинення у ряд за степенями $\varepsilon_c = (a - c)/a$, при збереженні перших доданків отримаємо співвідношення

$$\sqrt{\varepsilon_c} = \sqrt{2} \pi i \frac{q}{2(s_1 + s_2) \tau_s^*}, \quad (9)$$

результати розрахунків за яким подано на рис. 2 відповідно пунктирними лініями.

На відміну від зони пружного контакту з півплощиною, у смугах розпушення і пластичного деформування ($c \leq |x| \leq a$, $y = 0$) матеріал пластини зміщується (проковзує) стосовно накладки. Згідно з формулою (5) маємо

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = 2(p_1 - p_2)\Phi(x).$$

Звідси, використовуючи рівність (7), після інтегрування знаходимо, що

$$u(x) = \frac{(p_2 - p_1)\tau_s^*}{2\pi i(s_2 - s_1)(a - b)} f_4(x, a, b, c),$$

де

$$f_4 = 2x [b \Gamma_2(x, b, c) - a \Gamma_1(x, a, c)] - 2\sqrt{x^2 - c^2} \left(\sqrt{a^2 - c^2} - \sqrt{b^2 - c^2} \right) - (b^2 + x^2) \Gamma_2(x, b, c) + (a^2 + x^2) \Gamma_1(x, a, c).$$

Звідси випливає, що найбільшого значення переміщення досягають в околах кінців накладки в точках $x = \pm a$ і їх величини обчислюємо за формулою

$$u(a) = \frac{(p_2 - p_1) \tau_s^*}{i\pi(s_2 - s_1)} \cdot \frac{f_5(a, b, c)}{a - b}, \quad (10)$$

причому

$$f_5(a, b, c) = 2a^2 \ln \frac{a}{c} + c^2 - a^2 + \sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} + ab \Gamma_1(a, b, c) - \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \Gamma_2(a, b, c).$$

За розв'язком системи рівнянь (10), (8) на рис. 3 подано залежності знерозмірених величин переміщень $\tilde{u}(a) = E_1 u(a) / (\tau_s^* a)$ від параметра навантаження $\tilde{q} = q / (2\tau_s^*)$ за безмежно малих ділянок розпушення $\gamma = (a - b) / a$. Кривим 1-4 відповідають ті самі параметри ортотропії, що й на рис. 2. Ортотропія матеріалу півплощини зменшує величину відносних переміщень у зонах передруйнування за інших однакових умов.

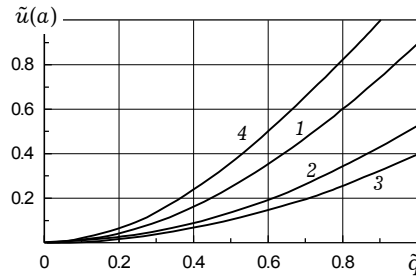


Рис. 3

Приймаючи довжину ділянки розпушення γ рівною нулеві, отримуємо простіші залежності:

$$u(a) = \frac{2(p_1 - p_2) \tau_s^*}{i\pi(s_1 - s_2)} a \ln \frac{a}{c}$$

або

$$u(a) = \frac{2(p_1 - p_2) \tau_s^* a}{i\pi(s_1 - s_2)} \ln \left(\operatorname{ch} \frac{i\pi q}{2(s_1 + s_2) \tau_s^*} \right). \quad (11)$$

При досягненні максимальними відносними переміщеннями $u(a)$ деякого граничного значення δ_{2c} , яке є характеристикою системи «пластина – накладка» і визначається експериментально, можлива часткова втрата зв'язку між накладкою і пластиною. Аналогічно до відомої δ_c -моделі [13], приймаючи умову

$$u(a) = \delta_{2c}$$

за критеріальну, отримаємо взаємозв'язок між довжиною зони передруйнування і характеристикою δ_{2c} :

$$\frac{i(s_2 - s_1) \delta_{2c}}{(p_2 - p_1) \tau_s^*} = \frac{f_5(a, b, c)}{\pi(a - b)}. \quad (12)$$

Формули (8), (12) встановлюють зв'язок між геометричними та силовими параметрами в системі «півплощина – накладка».

Автономність зон передруйнування біля кінців макроскопічної накладки впливає із зображення формули (12) у першому наближенні після роз-

винення в ряд за степенями ε_c за виконання умов $a \gg \delta_{2c}$ та $a - c \ll a$:

$$a - c = \frac{i\pi(s_2 - s_1)\delta_{2c}}{(p_2 - p_1)\tau_s^*}. \quad (13)$$

Величина в правій частині формули (13) не залежать від характеру навантаження чи розміру накладки, тобто за критерієм $u(a) = \delta_{2c}$ довжина зони передруйнування в гранично рівноважному стані є величиною сталою і, отже, для макроскопічних накладок справджується гіпотеза автономності зон.

Залежно від довжини накладки, міцнісних і пружних параметрів можливий один із наступних механізмів руйнування: **а)** розривні зусилля у накладці досягнуть величини її міцності і пройде розрив; **б)** відносні переміщення точок пластини під накладкою досягнуть деякого граничного значення і пройде розшарування між накладкою і пластиною.

Розглянемо спочатку можливість відшарування накладки з використанням деформаційного критерію $u(a) = \delta_{2c}$. Значення граничного навантаження $q = q^*$, що відповідає можливому відшаруванню, знаходимо з розв'язку системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{q^*}{2\tau_s^*} - \frac{s_1 + s_2}{i\pi(a - b)} f_3(a, b, c) &= 0, \\ \frac{E_1\delta_{2c}}{(s_1 + s_2)\tau_s^*} - \frac{f_5(a, b, c)}{i\pi(a - b)} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Виконавши в цій системі розвинення в ряд за степенями ε_c і зберігаючи перші доданки, отримаємо наближену, але просту формулу

$$q^* = \sqrt{\frac{1}{i\pi a} E_1(s_1 + s_2)\delta_{2c}\tau_s^*}. \quad (15)$$

Порівняння результатів розрахунків за формулами (14) і (15) дозволяє оцінити мінімальний розмір макроскопічної накладки. Різниця між граничними навантаженням при $\frac{1}{a\tau_s^*} E_1(s_1 + s_2)\delta_{2c} < 0.16$ за співвідношеннями (14) і (15) не перевищує 5%. Тому формулу (15) з вказаною похибкою доцільно використовувати при $a \geq E_1(s_1 + s_2)\gamma_\tau^*/(\tau_s^*)^2$, де $\gamma_\tau^* = \delta_{2c}\tau_s^*/2$.

У випадку $a - b = 0$ (смуги розпушення відсутні) отримаємо просту залежність для граничного навантаження розшарування:

$$q^* = \frac{2\tau_s^*(s_1 + s_2)}{i\pi} \operatorname{arch} \left(\exp \frac{i\pi(s_1 - s_2)\delta_{2c}}{2(p_1 - p_2)\tau_s^*a} \right).$$

Розрив накладки. Розподіл дотичних напружень σ_{xy} під накладкою ($y = 0$) на ділянці $|x| \leq c$ описується формулою

$$\sigma_{xy}(x) = (s_2 - s_1)\Phi(x),$$

звідки після перетворень отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(x) = \frac{2\tau_s^*}{\pi(a - b)} \left[a \cdot \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{a^2 - c^2}}{a\sqrt{c^2 - x^2}} - b \cdot \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{b^2 - c^2}}{b\sqrt{c^2 - x^2}} + \right. \\ \left. + x \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{\sqrt{b^2 - c^2}} \right) \right], \quad |x| \leq c. \end{aligned} \quad (16)$$

На ділянках $c \leq |x| \leq a$ дотичні напруження задані формулами (1), (2). Параметри навантаження та ортотропії у формулі (16) відсутні, але значення довжини зон передруйнування залежить від навантаження і фізико-механічних характеристик за співвідношеннями (8), (12).

Дотичні напруження уздовж поверхні зчеплення спричиняють у поперечному перерізі накладки осьові зусилля $P(x) = \int_x^a \sigma_{xy}(x) dx$, які при певних умовах можуть її розірвати. Розподіл осьових зусиль на різних ділянках накладки визначаємо за формулами

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(a-b)} \tau_s^* (a-x)^2, & b \leq |x| \leq a, \\ \frac{1}{2} \tau_s^* (a+b-2x), & c \leq |x| \leq b, \\ \frac{1}{\pi(a-b)} \tau_s^* f_7(x, a, b, c), & 0 \leq |x| \leq c, \end{cases}$$

де

$$\begin{aligned} f_7(x, a, b, c) = & 2x \left(b \cdot \operatorname{arctg} \frac{x \sqrt{b^2 - c^2}}{b \sqrt{c^2 - x^2}} - a \cdot \operatorname{arctg} \frac{x \sqrt{a^2 - c^2}}{a \sqrt{c^2 - x^2}} \right) + \\ & + (b^2 + x^2) \cdot \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{\sqrt{b^2 - c^2}} + \sqrt{c^2 - x^2} \left(\sqrt{b^2 - c^2} - \sqrt{a^2 - c^2} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \pi (a^2 - b^2) - (a^2 + x^2) \cdot \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що найбільшого значення розривні зусилля досягають на середині довжини накладки ($x = 0$):

$$P(0) = \frac{1}{\pi(a-b)} \tau_s^* f_8(a, b, c), \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} f_8(a, b, c) = & c \left(\sqrt{b^2 - c^2} - \sqrt{a^2 - c^2} \right) + b^2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{c}{\sqrt{b^2 - c^2}} - \\ & - a^2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}} + \frac{1}{2} \pi (a^2 - b^2). \end{aligned}$$

Залежність знерозмірених розривних зусиль $\tilde{P}(0) = P(0)/(\tau_s^* a)$ від параметра навантаження за результатами розв'язку системи рівнянь (8), (17) подано на рис. 4 за тих самих параметрів ортотропії, що й вище. Ортотропія матеріалу півплощини сприяє меншим осьовим зусиллям порівняно з ізотропним матеріалом за інших однакових умов. Зі збільшенням навантаження і розвитком зон передруйнування осьові зусилля також зростають. Збільшення розривних зусиль відбувається до моменту початку відшарування накладки чи, що те саме, до досягнення переміщеннями $u(a)$ граничного значення δ_{2c} . Після цього осьові зусилля уже будуть меншими. Тому максимальні осьові зусилля, на які необхідно орієнтуватися при виборі накладки, знаходимо із розв'язку системи рівнянь

$$\begin{aligned} P_{\max} - \frac{1}{\pi(a-b)} \tau_s^* f_8(a, b, c) &= 0, \\ \pi i E_1 \delta_{2c} (a-b) - (s_1 + s_2) \tau_s^* f_5(a, b, c) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

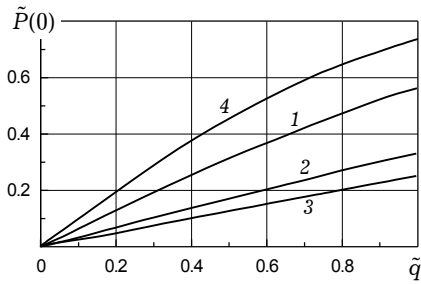


Рис. 4

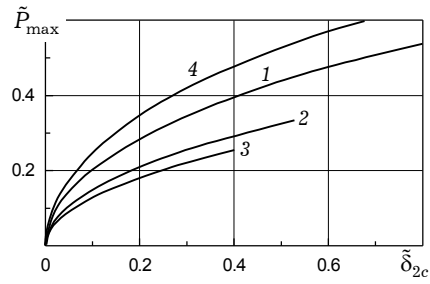


Рис. 5

На рис. 5 подано числовий розв'язок системи рівнянь (18) стосовно знерозмірених змінних $\tilde{P}_{\max} = P_{\max}/(\tau_s^* a)$ та $\tilde{\delta}_{2c} = E_1 \delta_{2c}/(\tau_s^* a)$ за тих самих параметрів ортотропії, що й вище. Лінії 2, 3 обриваються обмеженням на навантаження: $q \leq 2\tau_s^*$. У першому наближенні, виконавши у формулах (18) розвинення в ряд за степенями ϵ_s і зберігши перші доданки, маємо

$$P_{\max} = 2 \sqrt{\frac{i E_1 \delta_{2c} \tau_s^* a}{\pi(s_1 + s_2)}}.$$

З іншої сторони, міцність накладки на розрив обмежена. Для запобігання її розриву необхідно, щоб максимальні осьові зусилля P_{\max} не перевищували її міцності P_{ut} , тобто $P_{\max} \leq P_{ut}$. Приймаючи цю умову за критеріальну та розв'язуючи систему рівнянь

$$\pi P_{ut}(a - b) - \tau_s^* f_8(a, b, c) = 0,$$

$$\pi i q^{**}(a - b) - 2\tau_s^*(s_1 + s_2)f_3(a, b, c) = 0, \quad (19)$$

знаходимо значення граничного навантаження $q = q^{**}$ розриву накладки. Виконавши у рівняннях (19) розвинення у ряд Тейлора за степенями ϵ_c , отримаємо формулу в нульовому наближенні:

$$q^{**} = 2P_{ut} / a. \quad (20)$$

Отримані результати дозволяють також встановити критичну довжину накладки зміни характеру руйнування, яка разом з фізико-механічними характеристиками системи визначає механізм руйнування. При довжині накладки, більшій від критичної a_{cr} , яка визначається із розв'язку системи рівнянь

$$\pi P_{ut}(a_{cr} - b) - \tau_s^* f_8(a_{cr}, b, c) = 0,$$

$$\pi i E_1 \delta_{2c}(a_{cr} - b) - \tau_s^*(s_1 + s_2)f_5(a_{cr}, b, c) = 0, \quad (21)$$

руйнування буде проходити шляхом розриву накладки. У системі рівнянь (21) невідомими є a_{cr} і c . Відповідне граничне навантаження знаходимо із розв'язку системи рівнянь (19) чи за наближеною формулою (20). При довжині накладки, меншій від критичної a_{cr} , руйнування буде проходити шляхом її відшарування. Граничне навантаження при цьому знаходимо із розв'язку системи рівнянь (14) чи за наближеною формулою (15).

У першому наближенні критичну довжину можна оцінити за формулою

$$a_{cr} = \frac{4\pi i}{E_1(s_1 + s_2)\delta_{2c}\tau_s^*} (P_{ut})^2.$$

Для аналізу зміни механізму руйнування залежно від критичної довжини накладки використаємо наближені формули граничних навантажень відшарування (15) і розриву накладки (20). На рис. 6 схематично подано залежність граничних навантажень розриву $q^{**} = c_1 / a$ (крива 1) і відшарування $q^* = c_2 / \sqrt{a}$ (крива 2) від півдовжини накладки a при тому, що $c_1 = c_2 = 1$. Точка перетину ліній встановлює критичну довжину накладки зміни характеру руйнування. Змінюючи значення параметрів c_1 та c_2 , лише змістимо точку перетину кривих 1 і 2 на координатній площині, але якісний характер залишиться таким самим, тобто точка перетину $a = a_{cr}$ буде визначати механізм руйнування.

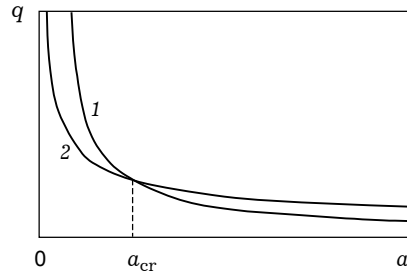


Рис. 6

Отримані результати дозволяють, наприклад, за заданим навантаженням і фізико-механічними характеристиками композиції підібрати довжину підкріплення так, щоб не проходило його руйнування чи відшарування від пластини.

1. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – Москва: Наука, 1983. – 488 с.
2. Арутюнян Н. Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением // Прикл. математика и механика. – 1968. – **32**, № 4. – С. 632–646.
3. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками // Прикл. математика и механика. – 1969. – **33**, № 5. – С. 813–843.
4. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – Москва: Машиностроение, 1980. – 411 с.
5. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. – Москва: Наука, 1973. – 303 с.
6. Кудилишин Ю. И. Контактная задача о подкреплении бесконечной плоскости стрингером с учетом пластических свойств материала // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1981. – № 4. – С. 83–92.
7. Кундрат М. М. Гранична рівновага та локальне руйнування пластини з накладкою // Вісн. Рівн. держ. техн. ун-ту. Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. Спецвипуск. – Рівне, 1999. – С. 200–204.
8. Кундрат М. М., Делявський М. В. Напруження в ослабленій тріщиною півплощині з накладкою // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – **36**, № 6. – С. 24–28.
9. Кундрат М. М., Сулим Г. Т. Термопружна та гранична рівновага півбезмежної пластини з накладкою в модельному формулюванні // VI-й Міжнар. симп. укр. інженерів-механіків: Тези доп. – Львів, 2003. – С. 49–50.
10. Лехницький С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
11. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К периодической контактной задаче для полуплоскости с упругими накладками // Прикл. математика и механика. – 1971. – **35**, № 1. – С. 172–178.
12. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
13. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1968. – 248 с.
14. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – Москва: Наука, 1982. – 344 с.
15. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. – Минск: Изд-во БГУ, 1972. – 200 с.
16. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. – Москва: Мир, 1982. – 232 с.
17. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen // Ingenieur – Archiv. – 1932. – Bd. 3, Heft 2. – S. 123–129.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ

В условиях плоской задачи исследовано предельное равновесие и разрушение ортотропной полубесконечной пластины, подкрепленной гибкой нерастяжимой конечной прочностью на разрыв накладкой при действии растягивающей нагрузки на пластину. В окрестностях концов накладки вдоль ее границы с пластиной развиваются локализованные зоны предразрушения (ослабленного контакта), продвигаясь от каждого края к центру. Им могут соответствовать области накопления повреждений, пластического деформирования, разрыва связи и др. Рассмотрены два варианта развития разрушения: а) разрыв накладки, б) ее отслоение. С использованием деформационного критерия получены аналитические зависимости между величинами предельной (разрушающей) нагрузки и физико-механическими характеристиками полуплоскости, а также размерами накладки. Установлена критическая длина накладки смены характера разрушения, которая вместе с упругими и прочностными характеристиками определяет механизм возможного разрушения в композиции.

FRACTURE ANALYSIS OF ORTHOTROPIC REINFORCED HALF-PLANE

Limiting equilibrium and fracture of an orthotropic semi-infinite plate, reinforced by flexible not extensible rupture finite-strength stringer are investigated under the conditions of plane problem. Localized zones of prefracture (weakened contact) are developed in the vicinities of the stringer ends along its boundary with plane. They can correspond to the regions of damages, plastic deformation, partial break of connection etc. Two variants of fracture development are studied: a) rupture of stringer and b) debonding of stringer. The analytical dependence between the values of limiting (critical) load and physico-mechanical parameters of the half-plane material are obtained using the criterion of deformation. The critical length of stringer for the change of fracture nature is determined, which together with elastic and mechanical properties defines the mechanism of possible fracture in the composition.

Нац. ун-т водн. госп-ва
та природокористування, Рівне

Одержано
27.04.04