

## ВПЛИВ ШОРСТКОСТІ КОНТАКТУЮЧИХ ТІЛ НА ХАРАКТЕР ЇХ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

Запропоновано математичну модель задачі про взаємодію жорсткої шорсткої поверхні (мікрорівнини у формі зрізаного клина) та гладкого пружного півпростору. Отримано формули для контактної тиску та фактичної області контакту. Досліджено взаємовплив мікрорівнин і розподіл максимальних дотичних напружень у півпросторі.

Однією з найактуальніших проблем сучасного машинобудування є підвищення зносостійкості фрикційних вузлів і з'єднань. У загальному випадку тертя і зношування – це комплекс складних, багатofункціональних і взаємозв'язаних процесів. Оскільки всі фізико-хімічні перетворення в зоні тертя відбуваються під дією контактних напружень, то важливим фактором впливу на процес тертя і зношування є формування напружено-деформованого стану у приповерхневих шарах контактуючих тіл. Детальне вивчення розподілу напружень і деформацій у приповерхневих шарах вимагає залучення різноманітних експериментальних та аналітичних методів [2, 5, 8]. Експериментальні дослідження ускладнені тим, що всі механічні впливи при контактуванні локалізуються у безпосередній близькості до поверхні. Перспективними для розв'язання цих проблем слід вважати розрахункові методи. У більшості відомих робіт нез'ясованим залишається питання взаємовпливу окремих мікрорівнин при контактуванні шорстких поверхонь.

У цій роботі досліджується напружено-деформований стан у пружному півпросторі при його контактуванні з жорстким шорстким штампом, мікрорівнини якого розподілені періодично (рис. 1).

Припускаємо, що мікронерівності шорсткого штампа мають форму зрізаного симетричного клина. Введемо такі позначення:  $\ell$  – період,  $2b$  – величина області контакту,  $2a$  – величина плоскої ділянки,  $d$  – ширина основи мікрорівнини. Перевагою такої моделі є те, що її можна розглядати як узагальнення вже досліджених моделей [3, 7], оскільки одержані там результати можна отримати і тут, вибравши певним чином параметри взаємодії. Крім того, ця модель мікронерівностей досить повно описує властивості рельєфу реальних поверхонь, а у низці випадків може використовуватися на практиці, зокрема, при вивченні процесу тертя і зношування поверхонь, оброблених шліфуванням, фрезеруванням, струганням.

Побудову інтегрального рівняння для визначення контактної тиску виконаємо за алгоритмом [7]. Внаслідок його застосування періодична контактна задача зводиться до розв'язання інтегрального рівняння першого роду з ядром Гільберта та розривною правою частиною:

$$\int_{\ell/2-b}^{\ell/2+b} p(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{\ell} dt = g(x), \quad (1)$$

де  $g(x) = \ell E_* \operatorname{ctg} \gamma \begin{cases} 1, & \ell/2 - b \leq x \leq \ell/2 - a, \\ 0, & \ell/2 - a \leq x \leq \ell/2 + a, \\ -1, & \ell/2 + a \leq x \leq \ell/2 + b; \end{cases} \frac{1}{E_*} = \frac{1 - \nu_p^2}{E_p} + \frac{1 - \nu^2}{E}; \nu_p, E_p$  –

відповідно коефіцієнт Пуассона та модуль Юнга шорсткої поверхні.

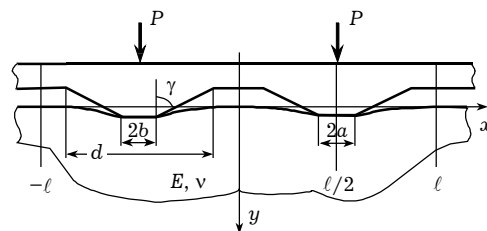


Рис. 1

Розв'язок рівняння (1) шукаємо за таких умов:

$$P = \int_{\ell/2-b}^{\ell/2+b} p(x) dx, \quad p(\ell/2 \pm b) = 0. \quad (2)$$

Для розв'язання інтегрального рівняння (1) використаємо алгоритм, наведений в [1]. У рівнянні (1) виконаємо заміну змінних  $t = \ell(z + \pi)/2\pi$ ,  $x = \ell(\tau + \pi)/2\pi$  і перейдемо до такого інтегрального рівняння:

$$\frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} p\left(\frac{\ell(z + \pi)}{2\pi}\right) \operatorname{ctg} \frac{z - \tau}{2} dz = g(\tau) = \frac{\pi E_* \operatorname{ctg} \gamma}{2} \begin{cases} 1, & -\beta \leq \tau \leq -\alpha, \\ 0, & -\alpha \leq \tau \leq \alpha, \\ -1, & \alpha \leq \tau \leq \beta. \end{cases} \quad (3)$$

Розв'язок, обмежений на кінцях області контакту, має вигляд

$$p\left(\frac{\ell(\tau + \pi)}{2\pi}\right) = -\frac{X(\tau)}{2\pi^2} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{g(z)}{X(z) \sin \frac{z - \tau}{2}} dz, \quad (4)$$

де  $\alpha = \frac{2\pi a}{\ell}$ ,  $\beta = \frac{2\pi b}{\ell}$ ,  $X(z) = \sqrt{2(\cos z - \cos \beta)}$ .

Як відомо з теорії інтегральних рівнянь, розв'язок (4) можливий лише за виконання умови, накладеної на праву частину рівняння:

$$\int_{-\beta}^{\beta} \frac{g(z) \cos \frac{z}{2}}{X(z) \sin \frac{z - \tau}{2}} dz = 0.$$

Легко переконалися, що ця умова виконується. Останній інтеграл розбиваємо на два: від  $-\beta$  до  $-\alpha$  та від  $\alpha$  до  $\beta$ , а після підстановки  $g(z)$  в інтегралі від  $-\beta$  до  $-\alpha$  робимо заміну  $t = -z$ . Провівши у формулі для контактного тиску таку саму процедуру, отримаємо

$$p\left(\frac{\ell(\tau + \pi)}{2\pi}\right) = E_* X(\tau) \operatorname{ctg} \gamma \cos \frac{\tau}{2} J(\tau), \quad (5)$$

де

$$J(\tau) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin \frac{z}{2}}{X(z)(\cos \tau - \cos z)} dz.$$

Увівши в інтегралі для  $J(\tau)$  позначення  $d = \sin \frac{\tau}{2}$ ,  $m = \sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $k = \sin \frac{\beta}{2}$  і виконавши послідовно заміни змінних  $\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{z}{2}$ ,  $t = \sin \frac{\varphi}{2}$ ,  $w = t^2$ ,  $u = k^2 w - d^2$ , зводимо цей інтеграл до вигляду

$$J(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{m^2-d^2}^{k^2-d^2} \frac{du}{u \sqrt{1-d^2-u} \sqrt{k^2-d^2-u}}.$$

Далі, застосувавши відому формулу [6], повернувшись до попередніх змінних і підставивши вираз для  $J(\tau)$  у співвідношення (5), одержимо формулу для контактного тиску

$$p(x) = \frac{E_* \operatorname{ctg} \gamma}{\pi} \ln \left( \frac{\left| \sin \frac{\pi x}{\ell} \sqrt{\sin^2 \frac{\pi b}{\ell} - \sin^2 \frac{\pi a}{\ell}} + \cos \frac{\pi a}{\ell} \sqrt{\sin^2 \frac{\pi b}{\ell} - \sin^2 \frac{\pi x}{\ell}} \right|}{\cos \frac{\pi b}{\ell} \sqrt{\left| \sin^2 \frac{\pi a}{\ell} - \sin^2 \frac{\pi x}{\ell} \right|}} \right). \quad (6)$$

На рис 2 показано графіки розподілу контактної тиску для одного штампа та для періодичної системи. Штриховою лінією зображено графік контактної тиску для одного мікровиступу. Як бачимо, для періодичної задачі якісна картина розподілу контактної тиску аналогічна до випадку одного мікровиступу [3], але для розглянутого випадку одинична область контакту є меншою, ніж для одного штампа. Крім того, для періодичної задачі контактний тиск у центрі мікровиступу не досягає величини контактної тиску у випадку одиничного контакту.

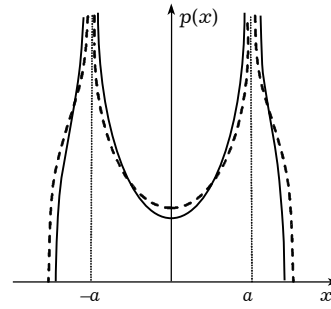


Рис. 2

Зв'язок між діючим навантаженням та областю контакту знаходимо з умови рівноваги штампа:

$$P^* = \frac{\pi P \operatorname{tg} \gamma}{d E_*} = \frac{\ell}{d} \ln \left| \frac{\cos \frac{\pi a}{\ell} + \sqrt{\cos^2 \frac{\pi a}{\ell} - \sin^2 \frac{\pi b}{\ell}}}{\sin \frac{\pi b}{\ell}} \right|. \quad (7)$$

Шляхом здійснення граничних переходів із формул (6), (7) можна отримати відомі формули контактної тиску та області контакту для періодичної системи незрізаних мікровиступів, одного зрізаного виступу та одного прямокутного виступу [2, 3, 7].

Графіки залежності області контакту від величини діючого навантаження наведено на рис. 3. Криві 1, 2 відповідають значенням  $\ell/d = 1, 2$ ; крива 3 відповідає випадку одного мікровиступу. Як впливає з формули (7), при певній величині області контакту настає так званий ефект насичення області контакту, тобто її величина практично не змінюється зі збільшенням  $P^*$ . На рис. 3 цей ефект проявляється в наявності вертикальних асимптот. Крім того, на основі аналізу рис. 3, можемо зробити висновок, що зі збільшенням відстані між мікровиступами їх взаємовплив зменшується, і в граничному випадку отримуємо залежність області контакту від величини  $P^*$  для одного штампа.

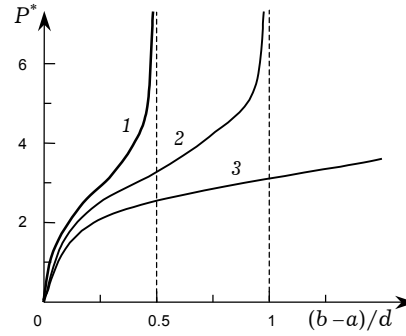


Рис. 2

Зауважимо, що  $P^*$  характеризує весь комплекс факторів, які зумовлюють контактну взаємодію: завантаженість контакту, фізико-механічні та геометричні характеристики контактної пари.

Отриманий розв'язок контактної задачі дає змогу за відомими формулами розраховувати напружено-деформований стан контактуючих тіл. Для розрахунку напружень у пружній півплощині використовуємо формулу для комплексного потенціалу плоскої періодичної задачі [2]

$$\Phi(z) = \frac{1}{2i\ell} \int_L (p(t) + iq(t)) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-z)}{\ell} dt \quad (8)$$

та співвідношення для визначення напружень

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \\ \sigma_{yy} - i\tau_{xy} &= \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Використовуючи формули для головних напружень  $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ ,  $\sigma_1 - \sigma_2 = \tau_{\max}$ , запишемо

$$\begin{aligned}
\tau_{\max} &= \left| \overline{\Phi(z)} + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} \right|, \\
\sigma_1 &= 2 \operatorname{Re} \Phi(z) + \left| \overline{\Phi(z)} + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} \right|, \\
\sigma_2 &= 2 \operatorname{Re} \Phi(z) - \left| \overline{\Phi(z)} + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} \right|.
\end{aligned} \tag{10}$$

Формули (8)–(10) повністю визначають напружений стан у півплощині для періодичної задачі. Використаємо співвідношення для визначення напружень у дійсних змінних  $x$ ,  $y$ , які при дії лише нормального навантаження мають вигляд [4]

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &= -\frac{1}{2\ell} \left( \frac{\pi y}{\ell} \right) \int_{-b}^b \frac{\sin \frac{2\pi(x-s)}{\ell} \operatorname{sh} \frac{2\pi y}{\ell}}{\left( \sin^2 \frac{\pi(x-s)}{\ell} + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi y}{\ell} \right)^2} p(s) ds, \\
\sigma_{xx} &= -\frac{1}{2\ell} \int_{-b}^b \frac{\Theta_+(x-s)}{\left( \sin^2 \frac{\pi(x-s)}{\ell} + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi y}{\ell} \right)^2} p(s) ds, \\
\sigma_{yy} &= -\frac{1}{2\ell} \int_{-b}^b \frac{\Theta_-(x-s)}{\left( \sin^2 \frac{\pi(x-s)}{\ell} + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi y}{\ell} \right)^2} p(s) ds,
\end{aligned} \tag{11}$$

де

$$\begin{aligned}
\Theta_{\pm}(x-s) &= \cos^2 \frac{\pi(x-s)}{\ell} \operatorname{sh}^2 \frac{\pi y}{\ell} \eta_{\mp}(y) + \sin^2 \frac{\pi(x-s)}{\ell} \operatorname{ch}^2 \frac{\pi y}{\ell} \eta_{\pm}(y), \\
\eta_{\pm}(y) &= \sin \frac{\pi y}{\ell} \pm \frac{\pi y}{\ell}.
\end{aligned}$$

Формули (11) служать для визначення напруженого стану у півплощині, а за формулами (10) визначаємо головні напруження, за якими можна досліджувати міцність матеріалу в контактній парі. Зауважимо, що за відомим  $\tau_{\max}$  легко визначити  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  (формули (10)). Тому надалі обмежимося дослідженням  $\tau_{\max}$ , максимальне значення якого є визначальним, особливо для матеріалів з вираженими пластичними властивостями.

Для знаходження напружень за формулами (11) використовували відомі числові методи. На рис. 4 показано розподіл максимального дотичного напруження  $\tau_{\max}$  для різних значень координати  $x \in [0, a]$ , тобто під плоскою площинкою мікровиступу: криві 1–4 відповідають значенням  $x = 0, 0.25a, 0.5a, a$ .

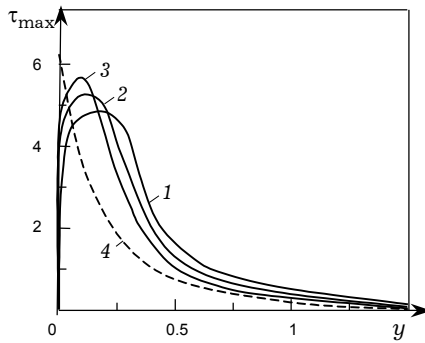


Рис. 4

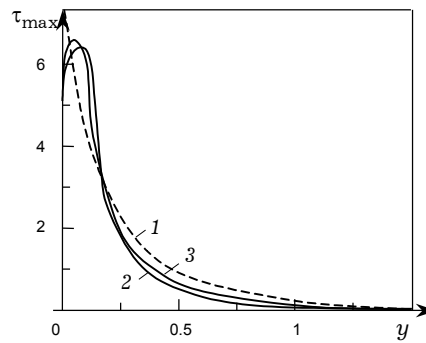


Рис. 5

Як бачимо,  $\tau_{\max}$  у точці  $x = a$  досягає свого максимуму на поверхні півпростору, в інших точках його екстремум знаходиться на певній глибині всередині півпростору, причому, чим ближче до центру площинки, тим

«глибше» знаходиться пік напруження. На ділянці  $a \leq x \leq b$  маємо подібну картину з тією лише відмінністю, що максимальне дотичне напруження зменшується швидше (рис. 5): криві 1–3 відповідають значенням  $x = a$ ,  $a + 0.5(b - a)$ ,  $a + 0.75(b - a)$ . Таку схожість поведінки можна пояснити тим, що для кута  $\gamma$  брали значення  $87^\circ$ . На рис. 6 зображено розподіл  $\max \tau_{\max}$  у пружному півпросторі в межах одного періоду. Точки концентрації  $\max \tau_{\max}$  відповідають кутовим точкам профілю штампа. За величиною зон біля цих точок, для яких виконується умова  $\max \tau_{\max} > \tau_{\text{тек}}$ , можна прогнозувати розміри частинок матеріалу, які відокремлюються у процесі зношування.

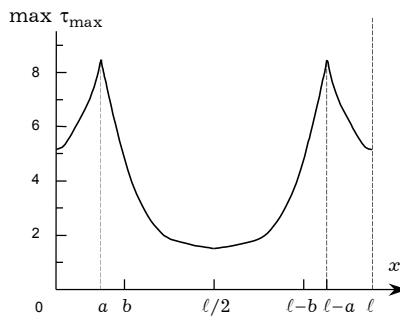


Рис. 6

Отримані результати дозволяють досить повно оцінити напружений стан у півпросторі, що знаходиться у взаємодії із жорсткою шорсткою поверхнею. Для дослідження ефекту взаємодії мікроставів треба враховувати не лише відстань між ними, але й весь набір факторів, що зумовлюють контактну взаємодію (величина  $P^*$ ). За розрахунками розподілу  $\tau_{\max}$  можна передбачати область можливого руйнування матеріалу. Ці дослідження можуть служити для оптимізації роботи контактних пар.

1. Григорюк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – Москва: Машиностроение, 1980. – 416 с.
2. Кузнецов С. О. До питання про періодичну контактну задачу // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Математика та механіка. – 1976. – № 18. – С. 97–104.
3. Максимук О. В. Розрахунок напружень у півплощині під дією штампів різної форми // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – 43, № 2. – С. 155–162.
4. Максимук О. В., Широков В. В., Чернега А. О. Напруження в півпросторі під час взаємодії із зубчатою поверхнею // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – 39, № 4. – С. 32–36.
5. Пашечко М. И., Голубець В. М., Чернець М. В. Формирование и фрикционная стойкость эвтектических покрытий. – Киев: Наук. думка, 1993. – 343 с.
6. Смолянский М. Л. Таблицы неопределенных интегралов. – Москва: Наука, 1965. – 111 с.
7. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 272 с.
8. Goryacheva Z. I. Contact mechanics in the tribology. – London: Kluwer Acad. Publ., 2000. – 432 p.

#### ВЛИЯНИЕ ШЕРОХАТОСТИ КОНТАКТИРУЮЩИХ ТЕЛ НА ХАРАКТЕР ИХ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Предложена математическая модель задачи о взаимодействии жесткой шероховатой поверхности (микровыступы в виде срезанного клина) и упругого полупространства. Получены формулы для контактного давления и фактической области контакта. Исследовано взаимовлияние микронеровностей и распределение максимальных касательных напряжений в полупространстве.

#### INFLUENCE OF ROUGHNESS OF CONTACTING BODIES ON CHARACTER OF THEIR STRESS STATE

The mathematical model of the problem about interaction between a rigid rough surface (microprotrusions in the form of a cut wedge) and elastic half-space is proposed. The formulas for contact pressure and real contact region are obtained. Mutual influence of microprotrusions and influence of distribution of maximum tangential stresses in a half-space are studied.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
21.07.04