

КОНТАКТ ПРУЖНОГО ТА ЖОРСТКОГО КЛИНІВ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ І ЗЧЕПЛЕННЯ

Розглянуто взаємодію пружного та жорсткого клинів за наявності тертя і часткового зчеплення в області контакту. Із застосуванням методу Вінера – Гопфа отримано аналітичний розв'язок задачі. Знайдено розподіл контактних напружень.

Урахування сил тертя при вивченні контактної взаємодії пружних тіл приводить до розгляду або ковзного контакту, коли проковзування з тертям поверхонь контактуючих тіл встановлюється уздовж усієї області контактного тиску, або контакту зі зчепленням і проковзуванням [1]. В останньому випадку область контакту поділяється на зони зчеплення – всередині, та зони проковзування – на її краях. Якщо контакт тіл починається у точці, а зростання навантаження веде до розширення області контактного тиску, то в зоні зчеплення накопичується так звана «защемлена» деформація, закон розподілу якої залежить від історії навантаження. Як показав Д. А. Спенс [8], для того щоб поля напружень і переміщень пружної півплощини при втисканні в неї жорсткого клина залишалися подібними самі до себе, необхідно, щоб «защемлена» деформація була сталою уздовж зони зчеплення.

Гладкий контакт пружного та жорсткого клинів, які попередньо дотикаються один одного своїми вершинами, вивчено в роботі [5], ковзний контакт клинів – у [6]. Показано [6], що, коли кут піврозхилу пружного клина перевищує деяке граничне значення з інтервалу $(\pi/4, \pi/2)$, схема ковзного контакту має бути замінена на схему контакту зі зчепленням і проковзуванням. Остання схема фрикційного контакту вивчена в роботі [4] у випадку взаємодії жорсткого клина з пружною півплощиною.

Постановка задачі. Нехай пружний клин $(-\alpha \leq \vartheta \leq \alpha, 0 \leq r < \infty)$ перед навантаженням дотикається своєю вершиною $r = 0$ вершини жорсткого клина $(\alpha + \varepsilon \leq \vartheta \leq 2\pi - \alpha - \varepsilon, 0 \leq r < \infty, \varepsilon - \text{малий кут зазору між гранями клинів})$. При стисканні клинів осьовим навантаженням з головним вектором P пружний клин деформується симетрично відносно своєї осі, і його береги входять у контакт з гранями жорсткого клина поблизу їх загальної вершини (рис. 1а – перед навантаженням, рис. 1б – у процесі навантаження). Припускаємо, що область контакту $0 \leq r \leq \ell$ на кожній грані пружного (і жорсткого) клинів поділяється на зону зчеплення $0 \leq r \leq \ell_1$ і зону проковзування $\ell_1 < r \leq \ell$, де $0 < \ell_1 < \ell$. Для цього будемо вважати [6], що $\alpha_* < \alpha < \pi/2$, де $\alpha_* = \pi/2 - (1/2) \arctg(2\mu_0(m-1)/(m-2))$, μ_0 – коефіцієнт тертя, m – число Пуассона матеріалу пружного клина $(\pi/4 < \alpha_* < \pi/2)$. Розміри області контакту ℓ і зони зчеплення ℓ_1 заздалегідь невідомі та мають бути визначені при розв'язанні задачі.

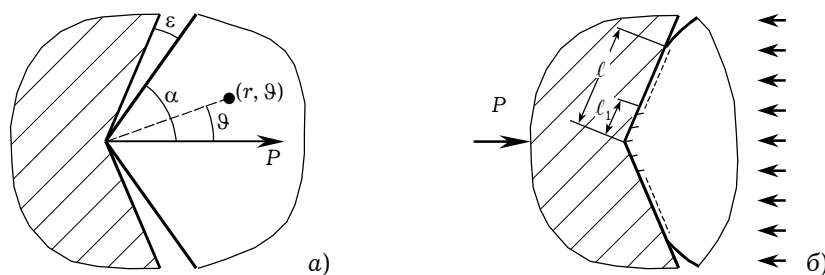


Рис. 1

Приймаємо, що в зоні зчеплення $0 \leq r \leq \ell_1$ виконується гіпотеза Спенса про сталу «защемлену» деформацію, а відношення дотичних зусиль до нормального тиску не перевищує коефіцієнта тертя. Вважаємо також, що в зоні проковзування $\ell_1 < r \leq \ell$ дотичні напруження $\tau_{r\vartheta}$ зв'язані з нормальними напруженнями σ_ϑ законом тертя Амонтона (Кулона), а граничні точки пружного клина зі зростанням навантаження рухаються у напрямку до вершини клина. Змішані крайові умови на гранях пружного клина запишемо у такому вигляді:

$$u_\vartheta|_{\vartheta=\pm\alpha} = \pm \varepsilon r, \quad 0 \leq r \leq \ell, \quad u_r|_{\vartheta=\pm\alpha} = Cr, \quad 0 \leq r \leq \ell_1; \quad (1)$$

$$\tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=\pm\alpha} = \mp \mu_0 \sigma_\vartheta|_{\vartheta=\pm\alpha}, \quad \ell_1 < r \leq \ell, \\ \sigma_\vartheta|_{\vartheta=\pm\alpha} = 0, \quad \tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=\pm\alpha} = 0, \quad r > \ell; \quad (2)$$

$$|\tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=\pm\alpha} < \mu_0 |\sigma_\vartheta|_{\vartheta=\pm\alpha}, \quad 0 \leq r \leq \ell_1, \\ \frac{\partial u_r}{\partial t} \Big|_{\vartheta=\pm\alpha} < 0, \quad \ell_1 < r \leq \ell, \quad (3)$$

де C – стала «защемленої» деформації, t – час.

Умова рівноваги пружного клина має вигляд

$$2 \int_0^{\ell_1} (\sigma_\vartheta|_{\vartheta=\alpha} \sin \alpha - \tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} \cos \alpha) dr + \\ + (\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha) \int_{\ell_1}^{\ell} \sigma_\vartheta|_{\vartheta=\alpha} dr = -P. \quad (4)$$

Система інтегральних рівнянь і її зведення до системи функціональних рівнянь Вінера – Гопфа. Загальний розв'язок рівнянь рівноваги пружного клина знаходимо за допомогою інтегрального перетворення Мелліна. Напруження і переміщення подаються у вигляді інтегралів Рімана – Мелліна з двома щільностями $a_1(s)$, $a_2(s)$, які є зображеннями відповідно нормальних $\sigma_\vartheta/(2G)$ і дотичних $\tau_{r\vartheta}/(2G)$ напружень при $\vartheta = \alpha$. Зокрема, на берегах $\vartheta = \pm\alpha$ пружного клина маємо [6]:

$$u_\vartheta|_{\vartheta=\pm\alpha} = \mp \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{s} [M_{11}(s)a_1(s) + M_{12}(s)a_2(s)] r^{-s} ds, \\ u_r|_{\vartheta=\pm\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{s} [M_{21}(s)a_1(s) + M_{22}(s)a_2(s)] r^{-s} ds, \\ \frac{\sigma_\vartheta}{2G} \Big|_{\vartheta=\pm\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a_1(s) r^{-s-1} ds, \quad \frac{\tau_{r\vartheta}}{2G} \Big|_{\vartheta=\pm\alpha} = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a_2(s) r^{-s-1} ds, \quad (5)$$

де $M_{vj}(s) = \frac{m_1 \lambda_{vj}(s)}{\Delta(s)}$, $v, j = 1, 2$,

$$\lambda_{11}(s) = \cos 2s\alpha - \cos 2\alpha, \quad \lambda_{12}(s) = -\frac{m_2}{m_1} \sin 2s\alpha + \left(\frac{s}{m_1} - 1\right) \sin 2\alpha,$$

$$\lambda_{21}(s) = -\frac{m_2}{m_1} \sin 2s\alpha + \left(\frac{s}{m_1} + 1\right) \sin 2\alpha, \quad \lambda_{22}(s) = -\cos 2s\alpha - \cos 2\alpha,$$

$$\Delta(s) = \sin 2s\alpha + s \sin 2\alpha, \quad -1 < c < 0, \quad m_1 = 2 \frac{m-1}{m}, \quad m_2 = \frac{m-2}{m}.$$

Введемо такі позначення невідомих функцій контактних напружень:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=\pm\alpha} &= p(r), & \pm \frac{1}{2G} \tau_{r\vartheta} \Big|_{\vartheta=\pm\alpha} &= q(r), & 0 \leq r \leq \ell_1, \\ \frac{1}{2G} \sigma_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=\pm\alpha} &= \mp \frac{1}{2G\mu_0} \tau_{r\vartheta} \Big|_{\vartheta=\pm\alpha} &= \sigma(r), & & \ell_1 < r \leq \ell. \end{aligned} \quad (6)$$

Обертаючи третє і четверте зі співвідношень (5), з урахуванням умов (2) отримаємо

$$\begin{aligned} a_1(s) &= \int_0^{\ell_1} p(y)y^s dy + \int_{\ell_1}^{\ell} \sigma(y)y^s dy, \\ a_2(s) &= \int_0^{\ell_1} q(y)y^s dy - \mu_0 \int_{\ell_1}^{\ell} \sigma(y)y^s dy. \end{aligned} \quad (7)$$

Продиференціюємо крайові умови (1) і підставимо в них вирази для переміщень з (5), у яких щільності $a_1(s)$, $a_2(s)$ подамо через функції контактних напружень $p(y)$, $q(y)$, $\sigma(y)$ згідно з (7). Виконуючи заміни

$$s = -i\tau, \quad r = \ell e^{-\xi}, \quad y = \ell e^{-\eta} \quad (8)$$

і переходячи до нових невідомих функцій контактних напружень

$$\begin{aligned} \psi_1(\eta) &= p(\ell e^{-\eta})e^{-\eta}, & \psi_2(\eta) &= q(\ell e^{-\eta})e^{-\eta}, & a \leq \eta < \infty, \\ \varphi(\eta) &= \sigma(\ell e^{-\eta})e^{-\eta}, & 0 \leq \eta < a, & & \ell_1 = \ell e^{-a}, \quad a = \ln(\ell/\ell_1), \end{aligned} \quad (9)$$

отримуємо систему інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} \int_a^{\infty} [k_{11}(\xi - \eta) \psi_1(\eta) + k_{12}(\xi - \eta) \psi_2(\eta)] d\eta + \int_0^a k_1(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta &= \frac{\varepsilon}{m_1} e^{-\xi}, & 0 \leq \xi < \infty, \\ \int_a^{\infty} [k_{21}(\xi - \eta) \psi_1(\eta) + k_{22}(\xi - \eta) \psi_2(\eta)] d\eta + \int_0^a k_2(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta &= -\frac{C}{m_1} e^{-\xi}, & a \leq \xi < \infty, \end{aligned} \quad (10)$$

ядра якої мають вигляд

$$\begin{aligned} k_{vj}(\xi - \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{\mathcal{K}_{vj}(\tau)}{-i\tau} e^{-i\tau(\xi-\eta)} d\tau, \\ k_v(\xi - \eta) &= k_{v1}(\xi - \eta) - \mu_0 k_{v2}(\xi - \eta), \\ \mathcal{K}_{vj}(\tau) &= m_1^{-1}(-i\tau)M_{vj}(-i\tau), \quad v, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (11)$$

Перетворимо вирази для ядер інтегральних рівнянь, змістивши контур інтегрування на дійсну вісь з урахуванням півлишки підінтегральних функцій у точці $\tau = 0$:

$$\begin{aligned} k_{vj}(\xi - \eta) &= -\frac{1}{2} \mathcal{K}_{vj}(0) + k_{vj}^*(\xi - \eta), \\ k_v^*(\xi - \eta) &= k_{v1}^*(\xi - \eta) - \mu_0 k_{v2}^*(\xi - \eta), \\ k_{vj}^*(\xi - \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{K}_{vj}(\tau)}{-i\tau} e^{-i\tau(\xi-\eta)} d\tau, \quad v, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (12)$$

Диференціюючи після цього інтегральні рівняння (10), перейдемо до такого вигляду системи інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \int_a^\infty [k_{11}^*(\xi - \eta) \psi_1(\eta) + k_{12}^*(\xi - \eta) \psi_2(\eta)] d\eta + \frac{d}{d\xi} \int_0^a k_1^*(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta &= -\frac{\varepsilon}{m_1} e^{-\xi}, \\ 0 \leq \xi < \infty, \\ \frac{d}{d\xi} \int_a^\infty [k_{21}^*(\xi - \eta) \psi_1(\eta) + k_{22}^*(\xi - \eta) \psi_2(\eta)] d\eta + \frac{d}{d\xi} \int_0^a k_2^*(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta &= \frac{C}{m_1} e^{-\xi}, \\ a \leq \xi < \infty, \end{aligned} \quad (13)$$

Розповсюдимо інтегральні рівняння (13) на всю числову вісь за умови, що $\psi_1(\eta) = 0$, $\psi_2(\eta) = 0$, якщо $\eta < a$, і $\varphi(\eta) = 0$, якщо $\eta < 0$ та $\eta > a$, і застосуємо до них інтегральне перетворення Фур'є. Введемо невідомі функції

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi, & \Phi^-(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^0 \varphi(\xi + a) e^{iz\xi} d\xi, \\ \Psi_1^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \psi_1(\xi + a) e^{iz\xi} d\xi, & \Psi_2^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \psi_2(\xi + a) e^{iz\xi} d\xi, \\ \Psi_1^-(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iz\xi} d\xi \frac{d}{d\xi} \int_0^\infty [k_1^*(\xi - \eta) \varphi(\eta) + k_{11}^*(\xi - \eta) \psi_1(\eta) + \\ & \quad + k_{12}^*(\xi - \eta) \psi_2(\eta)] d\eta, \\ \Psi_2^-(z) &= \frac{e^{-iza}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{iz\xi} d\xi \frac{d}{d\xi} \int_0^\infty [k_2^*(\xi - \eta) \varphi(\eta) + k_{21}^*(\xi - \eta) \psi_1(\eta) + \\ & \quad + k_{22}^*(\xi - \eta) \psi_2(\eta)] d\eta, \end{aligned} \quad (14)$$

аналітичні відповідно у півплощинах $\text{Im } z > c^+$ і $\text{Im } z < c^-$ ($c^+ < 0$, $c^- > 0$) комплексної площини. Зокрема, $\Phi^\pm(z)$ є цілими функціями. Після інтегрування частинами і застосування теореми про згортку для інтегрального перетворення Фур'є отримаємо систему функціональних рівнянь Вінера – Гопфа [3]

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1(z) \Phi^+(z) + e^{iza} [\mathcal{K}_{11}(z) \Psi_1^+(z) + \mathcal{K}_{12}(z) \Psi_2^+(z)] - \Psi_1^-(z) &= F_1^+(z), \\ \mathcal{K}_2(z) \Phi^+(z) + e^{iza} [\mathcal{K}_{21}(z) \Psi_1^+(z) + \mathcal{K}_{22}(z) \Psi_2^+(z) - \Psi_2^-(z)] &= F_2^+(z), \\ \Phi^+(z) &= e^{iza} \Phi^-(z), \quad c^+ < \text{Im } z < c^-. \end{aligned} \quad (15)$$

Коефіцієнти та праві частини системи рівнянь (15) мають вигляд

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_v(z) &= -\frac{iz\lambda_v(-iz)}{\Delta(-iz)}, & \mathcal{K}_{vj}(z) &= -\frac{iz\lambda_{vj}(-iz)}{\Delta(-iz)}, \\ \lambda_v(s) &= \lambda_{v1}(s) - \mu_0 \lambda_{v2}(s), & v, j &= 1, 2, \\ F_1^+(z) &= -\frac{\varepsilon}{m_1 \sqrt{2\pi}} \frac{1}{1-iz}, & F_2^+(z) &= \frac{Ce^{-a}}{m_1 \sqrt{2\pi}} \frac{e^{iza}}{1-iz}. \end{aligned} \quad (16)$$

Розв'язування системи функціональних рівнянь. Введемо допоміжну невідому функцію

$$\Psi^+(z) = \mu_0 \Psi_1^+(z) + \Psi_2^+(z). \quad (17)$$

Виключивши з перших двох рівнянь системи (15) функцію $\Phi^+(z)$, отримаємо функціональне рівняння

$$\mathcal{K}(z) \Psi^+(z) + e^{-iza} \lambda_2(-iz) \frac{\Psi_1^-(z)}{\lambda_1(-iz)} - \Psi_2^-(z) = F(z), \quad c^+ < \text{Im } z < c^-, \quad (18)$$

де

$$\mathcal{K}(z) = -\frac{iz\lambda(-iz)}{\lambda_1(-iz)}, \quad \lambda(s) = -\frac{m_3 \sin 2\alpha s - s \sin 2\alpha}{m_1^2}, \quad m_3 = \frac{3m-4}{m},$$

$$F(z) = \frac{1}{m_1 \sqrt{2\pi}} \left(\varepsilon \frac{\lambda_2(-iz)}{\lambda_1(-iz)} e^{-iza} + C e^{-a} \right) \frac{1}{1-iz}.$$

Перейдемо до системи функціональних рівнянь, яка складається з першого рівняння (15) і рівняння (18). Методом Вінера – Гопфа [3] зведемо цю систему до нескінченної системи алгебричних рівнянь. Факторизуємо коефіцієнти $\mathcal{K}_1(z)$, $\mathcal{K}(z)$, тобто подамо їх у вигляді

$$\mathcal{K}_1(z) = \alpha_1 \mathcal{K}_1^+(z) \mathcal{K}_1^-(z), \quad \alpha_1 = \mathcal{K}_1(0) = \frac{2 \sin \alpha (\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha)}{2\alpha + \sin 2\alpha},$$

$$\mathcal{K}(z) = \alpha z^2 \mathcal{K}^+(z) \mathcal{K}^-(z), \quad \alpha = \frac{\mathcal{K}(z)}{z^2} \Big|_{z=0} = -\frac{2m_3\alpha - \sin 2\alpha}{2m_1^2 \sin \alpha (\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha)}, \quad (19)$$

де $\mathcal{K}_1^\pm(z)$, $\mathcal{K}^\pm(z)$ – функції, які не перетворюються у нуль та аналітичні у півплощинах $\text{Im } z > c^+$ і $\text{Im } z < c^-$ відповідно. Факторизуємо коефіцієнти $\mathcal{K}_1(z)$, $\mathcal{K}(z)$ у нескінченні добутки:

$$\mathcal{K}_1^+(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iz}{t_n}\right) \left(1 - \frac{iz}{\delta_n}\right)^{-1}, \quad \mathcal{K}_1^-(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iz}{t'_n}\right) \left(1 + \frac{iz}{\delta_n}\right)^{-1},$$

$$\mathcal{K}^+(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iz}{\tau_n}\right) \left(1 + \frac{iz}{t_n}\right)^{-1}, \quad \mathcal{K}^-(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{iz}{\tau_n}\right) \left(1 + \frac{iz}{t'_n}\right)^{-1}. \quad (20)$$

Тут t_n , t'_n , $n = 1, 2, \dots$, – корені рівняння $\lambda_1(s) = 0$ з півплощин $\text{Re } s < 0$, $\text{Re } s > 0$ відповідно; δ_n , $n = 1, 2, \dots$, – корені рівняння $\Delta(s) = 0$ з півплощини $\text{Re } s > 0$; τ_n , $n = 1, 2, \dots$, – корені рівняння $\lambda(s) = 0$ з півплощини $\text{Re } s < 0$. Всі ці корені розподілені симетрично відносно дійсної осі.

Після факторизації коефіцієнтів систему функціональних рівнянь запишемо у вигляді

$$\alpha_1 \mathcal{K}_1^+(z) \Phi^+(z) + \frac{e^{iza}}{\mathcal{K}_1^-(z)} [\mathcal{K}_{11}(z) \Psi_1^+(z) + \mathcal{K}_{12}(z) \Psi_2^+(z)] - \frac{\Psi_1^-(z)}{\mathcal{K}_1^-(z)} = \frac{F_1^+(z)}{\mathcal{K}_1^-(z)},$$

$$\alpha z^2 \mathcal{K}^+(z) \Psi^+(z) + e^{-iza} \frac{\lambda_2(-iz)}{\lambda_1(-iz)} \frac{\Psi_1^-(z)}{\mathcal{K}^-(z)} - \frac{\Psi_2^-(z)}{\mathcal{K}^-(z)} = \frac{F(z)}{\mathcal{K}^-(z)}, \quad c^+ < \text{Im } z < c^-. \quad (21)$$

Другі доданки рівнянь (21) і їхні праві частини факторизуємо у різницю функцій, аналітичних у півплощинах $\text{Im } z > c^+$, $\text{Im } z < c^-$:

$$\frac{e^{iza}}{\mathcal{K}_1^-(z)} [\mathcal{K}_{11}(z) \Psi_1^+(z) + \mathcal{K}_{12}(z) \Psi_2^+(z)] = \chi_1^+(z) - \chi_1^-(z),$$

$$e^{-iza} \frac{\lambda_2(-iz)}{\lambda_1(-iz)} \frac{\Psi_1^-(z)}{\mathcal{K}^-(z)} = \chi^+(z) - \chi^-(z),$$

$$\frac{F_1^+(z)}{\mathcal{K}_1^-(z)} = f_1^+(z) - f_1^-(z), \quad \frac{F^+(z)}{\mathcal{K}^-(z)} = f^+(z) - f^-(z). \quad (22)$$

Останні функції факторизації визначимо, подавши їх у вигляді інтегралів типу Коші вздовж дійсної осі та обчисливши інтеграли за лишками підінтегральної функції:

$$\begin{aligned}
\chi_1^-(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^+}{t_k' + iz} \Psi^+(it_k') e^{-t_k' a}, & \chi^+(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^-}{t_k + iz} \Psi_1^-(it_k) e^{t_k a}, \\
f_1^+(z) &= -\frac{\varepsilon}{m_1 \sqrt{2\pi} \mathcal{K}_1^-(-i)(1-iz)}, \\
f^+(z) &= \frac{e^{-a} [(m_2/\mu_0 + m_1 \operatorname{ctg} 2\alpha)\varepsilon + C]}{m_1 \sqrt{2\pi} \mathcal{K}^-(-i)(1-iz)} + \frac{\varepsilon}{m_1 \sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^- e^{t_k a}}{(1+t_k)(t_k+iz)}, \\
\alpha_k^+ &= \alpha_1 \frac{\lambda_{12}(t_k')}{\lambda_1'(t_k')} \mathcal{K}_1^+(it_k'), & \alpha_k^- &= -\frac{\lambda_2(t_k)}{\lambda_1'(t_k) \mathcal{K}^-(it_k)}, \quad k=1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{23}$$

Виконані факторизації дають змогу віднести до лівої частини функціональних рівнянь функції, аналітичні у верхній півплощині, а до правої частини – у нижній, тобто подати функціональні рівняння (21) у вигляді

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \mathcal{K}_1^+(z) \Phi^+(z) + \chi_1^+(z) - f_1^+(z) &= \frac{\Psi_1^-(z)}{\mathcal{K}_1^-(z)} + \chi_1^-(z) - f_1^-(z), \\
\alpha z^2 \mathcal{K}^+(z) \Psi^+(z) + \chi^+(z) - f^+(z) &= \frac{\Psi_2^-(z)}{\mathcal{K}^-(z)} + \chi^-(z) - f^-(z).
\end{aligned} \tag{24}$$

Для кожного з рівнянь (24) ліва та права частини аналітично продовжують одна одну на всю комплексну площину і є довільними цілими функціями. Для визначення цих функцій розглянемо їх поведінку на нескінченності згідно з умовами задачі.

Використовуючи асимптотичну поведінку коренів рівнянь $\lambda_1(s) = 0$, $\Delta(s) = 0$, $\lambda(s) = 0$ з першого і другого квадрантів:

$$\begin{aligned}
t_n^+ &= -\frac{\pi}{\alpha} \left(n - \frac{1}{2} \right) + \frac{i}{2\alpha} \ln(\mu n) + o(1), & t_n^{'+} &= \frac{\pi n}{\alpha} + \frac{i}{2\alpha} \ln(\mu n) + o(1), \\
\delta_n^+ &= \frac{\pi}{\alpha} \left(n - \frac{1}{4} \right) + \frac{i}{2\alpha} \ln(\alpha' n) + o(1), \\
\tau_n^+ &= -\frac{\pi}{\alpha} \left(n + \frac{1}{4} \right) + \frac{i}{2\alpha} \ln \frac{\alpha' n}{m_3} + o(1), \quad n \rightarrow \infty, \\
\mu &= \frac{2\pi}{\alpha} \frac{\mu_0 \sin 2\alpha}{m_1 + im_2 \mu_0}, & \alpha' &= \frac{2\pi \sin 2\alpha}{\alpha},
\end{aligned} \tag{25}$$

для двох із нескінченних добутків (20) будемо мати такі асимптотичні оцінки [2]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1^+(z) &= O((-iz)^\rho), & \mathcal{K}^+(z) &= O((-iz)^{-\rho}), \\
\rho &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{m_2 \mu_0}{m_1}, & \frac{1}{2} &< \rho < 1.
\end{aligned} \tag{26}$$

Разом з тим функції $\Phi^+(z)$, $\Psi^+(z)$, $\chi_1^+(z)$, $\chi^+(z)$, $f_1^+(z)$, $f^+(z)$ зникають на нескінченності. Тому для лівих частин рівнянь (24) маємо оцінки

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \mathcal{K}_1^+(z) \Phi^+(z) + \chi_1^+(z) - f_1^+(z) &= o((-iz)^\rho), \\
\alpha z^2 \mathcal{K}^+(z) \Psi^+(z) + \chi^+(z) - f^+(z) &= o((-iz)^{2-\rho}).
\end{aligned} \tag{27}$$

З першої із оцінок (27) випливає, що обидві частини першого з рівнянь (24) тотожно дорівнюють нулеві. Отже, знаходимо

$$\Phi^+(z) = \frac{f_1^+(z) - \chi_1^+(z)}{\alpha_1 \mathcal{K}_1^+(z)}, \quad \Psi_1^-(z) = \mathcal{K}_1^-(z) [f_1^-(z) - \chi_1^-(z)]. \tag{28}$$

За допомогою другої із оцінок (27) робимо висновок, що обидві частини другого з рівнянь (24) дорівнюють невизначеному поліному першого степеня. Це дає можливість подати асимптотичну поведінку функції $\Psi^+(z)$ на

нескінченності у вигляді

$$\Psi^+(z) = A_1(-iz)^{\rho-1} + A_2(-iz)^{\rho-2} + O((-iz)^{\rho-3}). \quad (29)$$

Для знаходження сталих A_1 , A_2 використаємо умови неперервності контактних напружень у точці $r = \ell_1$:

$$\lim_{r \rightarrow \ell_1-0} (\mu_0 \sigma_\vartheta \pm \tau_{r\vartheta}) \Big|_{\vartheta=\pm\alpha} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \ell_1+0} \sigma_\vartheta \Big|_{\vartheta=\pm\alpha} = \lim_{r \rightarrow \ell_1-0} \sigma_\vartheta \Big|_{\vartheta=\pm\alpha}, \quad (30)$$

а також крайові нерівності (3).

На підставі формул (8), (9), (14), (17) можемо записати

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} (\mu_0 \sigma_\vartheta \pm \tau_{r\vartheta}) \Big|_{\vartheta=\pm\alpha} &= e^\xi \psi(\xi), \quad \psi(\xi) = \mu_0 \Psi_1(\xi) + \Psi_2(\xi), \quad a \leq \xi < \infty, \\ \Psi^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \psi(\xi + a) e^{iz\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (31)$$

Згідно з лемою Ватсона [7]

$$\int_0^\infty \xi^{\beta-1} f(\xi) e^{iz\xi} d\xi \sim \Gamma(\beta) f(0) (-iz)^{-\beta}, \quad \beta > 0, \quad 0 < \arg z < \pi, \quad (32)$$

з першої з умов (30), тобто з умови $\psi(a) = 0$, маємо, що $\Psi^+(z) = o((-iz)^{-1})$. Отже, в зображенні (29) слід покласти $A_1 = 0$. У цьому випадку $\Psi_2^+(z) \sim -\mu_0 \Psi_1^+(z)$, і з формул (28), (22), (16) маємо

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &\sim -\frac{\chi_1^+(z)}{\mathcal{K}_1^+(z)} \sim -\frac{e^{iza}}{\mathcal{K}_1(z)} [\mathcal{K}_{11}(z) \Psi_1^+(z) + \mathcal{K}_{12}(z) \Psi_2^+(z)] = \\ &= -\frac{e^{iza}}{\mathcal{K}_1(z)} [\mathcal{K}_{11}(z) \Psi_1^+(z) - \mu_0 \mathcal{K}_{12}(z) \Psi_1^+(z)] = -e^{iza} \Psi_1^+(z), \quad \text{Im } z < 0. \end{aligned}$$

Оскільки $\psi_1(a) \neq 0$, то $\Psi_1^+(z) = O((-iz)^{-1})$ і $\Psi_1^+(z) \sim -\Psi_1^+(-z)$. Отже, $e^{iza} \Phi^+(-z) \sim \Psi_1^+(z)$. А це, в свою чергу, означає, що за лемою Ватсона $\varphi(a - \xi) \sim \psi_1(a + \xi)$, $\xi \rightarrow +0$. Тобто друга з умов неперервності (30) також виконується, якщо $A_1 = 0$.

Перша крайова нерівність (3) еквівалентна нерівності $\psi(\xi) < 0$. За лемою Ватсона (32) для функції $\Psi^+(z) \sim A_2(-iz)^{\rho-2}$ з (31) отримуємо, що $A_2 \leq 0$.

З другої крайової нерівності (3) і крайової умови (1) на радіальні переміщення впливає нерівність

$$u_r \Big|_{\vartheta=\pm\alpha} > Cr, \quad \ell_1 < r \leq \ell. \quad (33)$$

Для виконання цієї нерівності перетворимо другий із виразів (5) для радіальних переміщень. За допомогою замін (8), (9) і формул (11), (14), (15) знаходимо

$$u_r \Big|_{\vartheta=\pm\alpha} = -\frac{m_1 \ell}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{1}{t^2} \Psi_2^-(t) e^{it(a-\xi)} dt + \begin{cases} Cl_1(1+a-\xi), & -\infty < \xi < a, \\ Cle^{-\xi}, & a \leq \xi < \infty. \end{cases} \quad (34)$$

Продиференціюємо рівність (34) за ξ , виділимо особливість підінтегральної функції у точці $t = 0$, змістимо контур інтегрування на дійсну вісь і перейдемо до оберненого перетворення Фур'є:

$$\begin{aligned} \frac{m_1 \ell}{iz} e^{iza} [\Psi_2^-(z) - \Psi_2^-(0)] &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a \left[r \frac{d}{dr} u_r \Big|_{\vartheta=\pm\alpha} - C\ell_1 - m_1 \ell \sqrt{2\pi} \Psi_2^-(0) \right] e^{iz\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Використовуючи оцінку $\Psi_2^-(z) \sim m_3 m_1^{-2} A_2 (iz)^{\rho-1}$, яка випливає з рівностей (24), (29) при $A_1 = 0$, за лемою Ватсона (32) знаходимо

$$u_r \Big|_{\vartheta=\pm\alpha} = Cr + \frac{\sqrt{2\pi} m_3 A_2}{m_1 \Gamma(3-\rho)} \left(\frac{r}{\ell_1} - 1 \right)^{2-\rho} + o \left(\frac{r}{\ell_1} - 1 \right)^{2-\rho}, \quad r \rightarrow \ell_1 + 0.$$

Для виконання умови (33), а, значить, і другої з крайових нерівностей (3), необхідно, щоб $A_2 \geq 0$.

Таким чином, крайові нерівності (3) виконуються, якщо $A_2 = 0$. З огляду на те, що $A_1 = 0$ з умови неперервності контактних напружень в точці $r = \ell_1$, з (29) остаточно знаходимо, що $\Psi^+(z) = O((-iz)^{\rho-3})$. Отримана асимптотична оцінка функції $\Psi^+(z)$ дозволяє стверджувати, що обидві частини другого функціонального рівняння (24) тотожно дорівнюють нулеві. Тому маємо

$$\Psi^+(z) = \frac{f^+(z) - \chi^+(z)}{\varkappa z^2 \mathcal{K}^+(z)}, \quad \Psi_2^-(z) = \mathcal{K}^-(z) [f^-(z) - \chi^-(z)]. \quad (35)$$

При цьому для аналітичності функції $\Psi^+(z)$ у півплощині $\text{Im } z > c^+$ необхідно знищити її двократний полюс в точці $z = 0$ за рахунок введення двох додаткових умов

$$f^+(0) - \chi^+(0) = 0, \quad \frac{d}{dz} [f^+(z) - \chi^+(z)] \Big|_{z=0} = 0. \quad (36)$$

Зауважимо, що вирази (28), (35) ще не визначають функцій $\Phi^+(z)$, $\Psi^+(z)$, $\Psi_{1,2}^-(z)$, а лише виражають їх, зважаючи на співвідношення (23), через невідомі значення $\Psi^+(it'_k)$, $\Psi_1^-(it_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Щоб визначити ці функції, покладемо у першій з рівностей (35) $z = it'_n$, а в другій з рівностей (28) покладемо $z = it_n$, $n = 1, 2, \dots$. Отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \Psi^+(it'_n) &= -\frac{1}{\varkappa t_n'^2 \mathcal{K}^+(it'_n)} \left[f^+(it'_n) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^-}{t_k - t'_n} \Psi_1^-(it_k) e^{t_k a} \right], \\ \Psi_1^-(it_n) &= \mathcal{K}_1^-(it_n) \left[f_1^-(it_n) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^+}{t'_k - t_n} \Psi^+(it'_k) e^{-t'_k a} \right], \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (37)$$

Скориставшись асимптотичною поведінкою коренів $t_k \sim t'_k \sim -\pi k / (2\alpha)$, $k \rightarrow \infty$, введемо в систему рівнянь (37) малий параметр

$$\lambda = e^{-\pi a / (2\alpha)} = (\ell_1 / \ell)^{\pi a / (2\alpha)}.$$

Позначивши

$$\tilde{\alpha}_k^- = \alpha_k^- e^{(\pi k / 2\alpha + t'_k) a}, \quad \tilde{\alpha}_k^+ = \alpha_k^+ e^{(\pi k / 2\alpha - t'_k) a}, \quad \beta_n^+ = -[\varkappa t_n'^2 \mathcal{K}^+(it'_n)]^{-1},$$

$$\beta_n^- = \mathcal{K}_1^-(it_n), \quad f_n^+ = \frac{e^{-a} \beta_n^+}{m_1 \mathcal{K}^-(-i)(1+t'_n)} \left[\left(\frac{m_2}{\mu_0} + m_1 \text{ctg} 2\alpha \right) \varepsilon + C \right],$$

$$f_n^- = -\frac{\varepsilon\beta_n^-}{m_1\mathcal{K}_1^-(-i)(1+t_n)}, \quad z_k^+ = \sqrt{2\pi}\Psi^+(it'_k),$$

$$z_k^- = \sqrt{2\pi}\Psi_1^-(it_k) - \frac{\varepsilon}{m_1(1+t_k)}, \quad k, n = 1, 2, \dots, \quad (38)$$

з (37) отримуємо нескінченну систему алгебричних рівнянь відносно невідомих z_k^\pm , $k = 1, 2, \dots$:

$$z_n^+ + \beta_n^+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^-}{t_k - t'_n} z_k^- \lambda^k = f_n^+,$$

$$z_n^- + \beta_n^- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^+}{t'_k - t_n} z_k^+ \lambda^k = f_n^-, \quad n = 1, 2, \dots \quad (39)$$

Вважаючи поки що величини C і λ заданими, розв'язок системи рівнянь (39) подамо у вигляді

$$z_k^\pm = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_{km}^\pm \lambda^m, \quad k = 1, 2, \dots \quad (40)$$

Підставивши розвинення (40) у рівняння (39), отримуємо

$$\xi_{n0}^+ = f_n^+, \quad \xi_{n0}^- = f_n^- \quad (41)$$

і рекурентні співвідношення

$$\xi_{nm}^+ = -\beta_n^+ \sum_{k=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_k^-}{t_k - t'_n} \xi_{k, m-k}^-, \quad \xi_{nm}^- = -\beta_n^- \sum_{k=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_k^+}{t'_k - t_n} \xi_{k, m-k}^+ \quad (42)$$

для визначення коефіцієнтів ξ_{nm}^\pm , $n, m = 1, 2, \dots$

Щоб визначити невідомі C і λ , маємо додаткові умови (36), які за допомогою виразів (23) і позначень (38) запишемо таким чином:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^-}{t_k} z_k^- \lambda^k = \frac{e^{-a}}{m_1\mathcal{K}^-(-i)} \left[\left(\frac{m_2}{\mu_0} + m_1 \operatorname{ctg} 2\alpha \right) \varepsilon + C \right],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^-}{t_k^2} z_k^- \lambda^k = -\frac{e^{-a}}{m_1\mathcal{K}^-(-i)} \left[\left(\frac{m_2}{\mu_0} + m_1 \operatorname{ctg} 2\alpha \right) \varepsilon + C \right]. \quad (43)$$

Якщо праві частини та невідомі алгебричної системи рівнянь (39) подати у вигляді $f_n^\pm = \varepsilon \tilde{f}_n^\pm + C \hat{f}_n^\pm$, $z_k^\pm = \varepsilon \tilde{z}_k^\pm + C \hat{z}_k^\pm$, то \tilde{z}_k^\pm і \hat{z}_k^\pm визначаються розв'язком (40)–(42) системи (39) з правими частинами \tilde{f}_n^\pm і \hat{f}_n^\pm відповідно, $k, n = 1, 2, \dots$. Тоді додаткові умови (43) можемо записати як

$$a_{11}\varepsilon + a_{12}C = 0, \quad a_{21}\varepsilon + a_{22}C = 0, \quad (44)$$

де

$$a_{11} = b_1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^-}{t_k} \tilde{z}_k^- \lambda^k, \quad a_{12} = b_2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^-}{t_k} \hat{z}_k^- \lambda^k, \quad a_{21} = b_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^-}{t_k^2} \tilde{z}_k^- \lambda^k,$$

$$a_{22} = b_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^-}{t_k^2} \hat{z}_k^- \lambda^k, \quad b_1 = \frac{e^{-a}}{m_1\mathcal{K}^-(-i)} \left(\frac{m_2}{\mu_0} + m_1 \operatorname{ctg} 2\alpha \right), \quad b_2 = \frac{e^{-a}}{m_1\mathcal{K}^-(-i)}.$$

Для визначення параметра λ , а, отже, й відносного розміру зони зчеплення $\ell_1/\ell = \lambda^{2\alpha/\pi a}$, маємо трансцендентне рівняння

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0.$$

Параметр C після цього визначаємо з одного з рівнянь (44).

Для знаходження довжини ℓ області контакту (на кожній грані клина) виконаємо умову рівноваги (4). Маємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell_1} \sigma_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha} dr &= 2G\ell \int_a^{\infty} \psi_1(\xi) d\xi = 2G\ell \sqrt{2\pi} \Psi_1^+(0), \\ \int_0^{\ell_1} \tau_{r\vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha} dr &= 2G\ell \sqrt{2\pi} \Psi_2^+(0), \quad \int_{\ell_1}^{\ell} \sigma_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha} dr = 2G\ell \sqrt{2\pi} \Phi^+(0), \\ \ell &= -\frac{P}{4G\sqrt{2\pi}} [\Psi_1^+(0) \sin \alpha - \Psi_2^+(0) \cos \alpha + (\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha) \Phi^+(0)]^{-1}. \end{aligned} \quad (45)$$

Поклавши $z = 0$ у першому з рівнянь (15), знайдемо вираз у квадратних дужках у рівності (45):

$$\alpha_0 \left[\Psi_1^-(0) - \frac{\varepsilon}{m_1 \sqrt{2\pi}} \right] = \alpha_0 \left[f_1^-(0) - \chi_1^-(0) - \frac{\varepsilon}{m_1 \sqrt{2\pi}} \right] = \alpha_0 [f_1^+(0) - \chi_1^-(0)],$$

де $\alpha_0 = (2\alpha + \sin 2\alpha)/(2 \sin \alpha)$. З урахуванням цього спрощення за допомогою формул (23) із (45) остаточно отримуємо довжину області контакту

$$\ell = \frac{P}{2G} \frac{\sin \alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha} \left(\frac{\varepsilon}{m_1 \mathcal{K}_1^-(-i)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^+}{t_k'} z_k^+ \lambda^k \right)^{-1}.$$

Контактні напруження. Нормальні та дотичні напруження (6), (9) в області контакту знаходимо оберненим перетворенням Фур'є рівностей (14) для функцій $\Phi^+(z)$, $\Psi_1^+(z)$, $\Psi_2^+(z)$. Функція $\Phi^+(z)$ визначається першим із виразів (28). Виключивши з перших двох рівнянь (15) функцію $\Psi_2^+(z)$, маємо

$$\begin{aligned} \Psi_1^+(z) &= -\Phi^-(z) - e^{-iza} \frac{\lambda_{22}(-iz)}{iz\lambda(-iz)} \left(\Psi_1^-(z) - \frac{\varepsilon}{m_1 \sqrt{2\pi}(1-iz)} \right) + \\ &+ \frac{\lambda_{12}(-iz)}{iz\lambda(-iz)} \left(\Psi_2^-(z) + \frac{C}{m_1 \sqrt{2\pi}(1-iz)} \right). \end{aligned}$$

При цьому функції $\Psi_{1,2}^-(z)$ визначаються з (28), (35). Функцію $\Psi_2^+(z)$ на підставі (17) знаходимо як $\Psi_2^+(z) = \Psi^+(z) - \mu_0 \Psi_1^+(z)$, де функція $\Psi^+(z)$ визначена в (35). Обчисливши відповідні інтеграли Фур'є за теорією лишків, після перетворень отримуємо такі вирази для контактних напружень у зонах проковзування і зчеплення:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\vartheta}}{2G} \Big|_{\vartheta=\pm\alpha} &= -\frac{\varepsilon}{\mu_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\ell}{\ell_1} \frac{\lambda_{12}(t_k')}{\lambda_1'(t_k')} z_k^+ \left(\frac{r}{\ell_1} \right)^{-t_k'-1} + \frac{\Delta(t_k)}{t_k \lambda_1'(t_k)} z_k^- \left(\frac{r}{\ell} \right)^{-t_k'-1} \right], \\ &\ell_1 < r \leq \ell, \end{aligned}$$

$$\frac{\sigma_{\vartheta}}{2G} \Big|_{\vartheta=\pm\alpha} = \frac{1}{m_2} (m_1 \varepsilon \operatorname{ctg} 2\alpha + C) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{12}(\tau_k) u_k(r),$$

$$\pm \frac{\tau_{r\vartheta}}{2G} \Big|_{\vartheta=\pm\alpha} = \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{11}(\tau_k) u_k(r), \quad 0 \leq r \leq \ell_1,$$

$$\begin{aligned} u_k(r) &= \frac{\mathcal{K}^-(i\tau_k)}{\tau_k \lambda'(\tau_k)} \left(\frac{(m_2/\mu_0 + m_1 \operatorname{ctg} 2\alpha) \varepsilon + C}{m_1 \mathcal{K}^-(-i)(1+\tau_k)} - \right. \\ &\left. - \frac{\ell}{\ell_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_m^-}{t_m - \tau_k} z_m^- \lambda^m \right) \left(\frac{r}{\ell_1} \right)^{-\tau_k-1}. \end{aligned}$$

Контактні напруження обмежені та у вершині клина приймають скінченні значення

$$\sigma_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=\pm\alpha, r=0} = \frac{2G}{m_2} (m_1 \varepsilon \operatorname{ctg} 2\alpha + C), \quad \tau_{r\vartheta} \Big|_{\vartheta=\pm\alpha, r=0} = \pm 2G\varepsilon.$$

Однак ці значення виявляються досить великими піковими значеннями в розподілі контактних напружень, оскільки для найменшого за модулем від'ємного кореня τ_1 рівняння $\lambda(s) = 0$ справджується оцінка $0 < -\tau_1 - 1 \ll 1$ (можна показати, що $\tau_1 \approx -\pi m_3 / (2\alpha m_3 + \sin 2\alpha)$). Зауважимо, що у випадку гладкого контакту клинів нормальні напруження мають у вершині клина логарифмічну особливість [5], а у випадку ковзного контакту ($0 < \alpha \leq \alpha_*$) вони скінченні й приймають у вершині клина значення $-2G\varepsilon/\mu_0$ [6].

Щоб дослідити поведінку контактних напружень на краю області контакту, скористаємося асимптотичною оцінкою нескінченного добутку для функції $\mathcal{K}_1^+(z)$ із (20), яка має вигляд [2]

$$\mathcal{K}_1^+(z) \sim \alpha_1 A(-iz)^\rho, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad A = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{-\rho} e^{\gamma\rho} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n^+ \delta_n^*}{t_n^+ t_n^*} e^{-\rho/n}, \quad (46)$$

де γ – стала Ейлера – Маскероні. При цьому позначення коренів t_n^+ , t_n^* , $n = 1, 2, \dots$, рівняння $\lambda_1(s) = 0$ з півплощини $\operatorname{Re} s < 0$ вибрані так, що множина коренів t_n^+ складається з частини дійсних коренів, які мають непарні номери, та всіх комплексних коренів з II квадранта, а множина t_n^* – з дійсних коренів з парними номерами і всіх комплексних коренів з III квадранта; для комплексних коренів $t_n^+ = \bar{t}_n^*$, $n = 1, 2, \dots$. Позначення коренів δ_n^+ , δ_n^* , $n = 1, 2, \dots$, рівняння $\Delta(s) = 0$ з півплощини $\operatorname{Re} s > 0$ аналогічні.

На підставі асимптотичної оцінки (46) з перших формул (28), (14) за допомогою леми Ватсона (32) знаходимо поведінку нормальних напружень на краю області контакту

$$\frac{\sigma_{\vartheta}}{2G} \Big|_{\vartheta=\pm\alpha} \sim -\frac{1}{\operatorname{AG}(\rho+1)} \left(\frac{\varepsilon}{m_1 \mathcal{K}_1^-(-i)} - \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_k^+ z_k^+ \lambda^k \right) \left(1 - \frac{r}{\ell}\right)^\rho, \quad r \rightarrow \ell - 0.$$

Таким чином, побудовано подібний розв'язок задачі такий, що поле напружень і переміщень пружного клина в процесі навантаження залишається подібним самому собі. Характерний лінійний розмір ℓ (довжина області контакту) пропорційний до величини навантаження P . У системі відносних координат r/ℓ , ϑ при зростанні навантаження напруження не змінюються, а переміщення зростають пропорційно до ℓ (або P). Подібний розв'язок побудовано з використанням гіпотези Спенса про сталу «защемлену» деформацію $\varepsilon_r = C$ ($\varepsilon_r = \partial u_r / \partial r$), тобто при виконанні другої з крайових умов (1) на радіальні переміщення у зоні зчеплення. Покажемо, що тільки за такої умови на радіальні переміщення у зоні зчеплення розв'язок задачі буде подібним. Для цього припустимо, що $u_r \Big|_{\vartheta=\pm\alpha} = g(r)$, $0 \leq r \leq \ell_1$, де $g(r)$ – деяка диференційовна функція і $g(0) = 0$. У цьому разі права частина другого з інтегральних рівнянь (10) буде дорівнювати $g'(\ell e^{-\xi}) e^{-\xi}$. Для того щоб розв'язок задачі був подібним і не залежав від ℓ , а залежав від $r/\ell = e^{-\xi}$, необхідно, щоб функція $g'(r)$ була сталою. Тобто приходимо до другої з крайових умов (1).

Якщо тертя відсутнє ($\mu_0 = 0$), то $\ell_1 = 0$, $\psi_1(\xi) \equiv 0$, $\psi_2(\xi) \equiv 0$ і задача зводиться до функціонального рівняння

$$\mathcal{K}_1(z)\Phi^+(z) - \Psi_1^-(z) = -\frac{\varepsilon}{m_1\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1-iz}, \quad c^+ < \text{Im } z < c^-,$$

розв'язком якого є функція

$$\Phi^+(z) = \frac{f_1^+(z)}{x_1\mathcal{K}_1^+(z)}.$$

Обертаючи перше зі співвідношень (14), обчислюємо інтеграл за теорією лишків, враховуючи, що підінтегральна функція має у півплощині $\text{Im } z \leq 0$ двократний полюс $z = it_1 = -i$ та прості полюси $z = it_k$, $k = 2, 3, \dots$, де $t_{2n} = 1 - \frac{\pi n}{\alpha}$, $t_{2n+1} = -1 - \frac{\pi n}{\alpha}$, $n = 1, 2, \dots$. Використовуючи заміни (6), (8), (9), отримуємо нормальні контактні напруження

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_g}{2G} \Big|_{g=\pm\alpha} &= \frac{\varepsilon}{m_1\alpha} \left[\ln \frac{r}{\ell} - \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{t_n - 1} + \frac{1}{\delta_n + 1} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{m_1\mathcal{K}_1^-(-i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(t_k)\mathcal{K}_1^-(it_k)}{t_k(1+t_k)\lambda_1'(t_k)} \left(\frac{r}{\ell} \right)^{-t_k-1}, \quad \mu = 0. \end{aligned}$$

Результати обчислень контактних напружень у випадку числа Пуассона $m = 10/3$ і кута піврозхилу $\alpha = 4\pi/9$ пружного клина подано на рис. 2. Суцільні криві 1, 2 зображують відповідно розподіли

безрозмірних нормальних $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_g}{2G\varepsilon} \Big|_{g=\pm\alpha}$ і до-

тичних $\bar{\tau} = \mp \frac{\tau_{rg}}{2G\varepsilon} \Big|_{g=\pm\alpha}$ напружень при кон-

такті клинів з тертям ($\mu_0 = 0.25$) і частковим зчепленням ($\frac{\ell_1}{\ell} = 0.2644$, $\ell = 0.672 \frac{P}{2G\varepsilon}$,

$\alpha > \alpha_* \approx \frac{7\pi}{18}$). Пунктирна крива 1 відповідає

нормальним контактним напруженням при гладкому контакті клинів ($\mu_0 = 0$, $\ell = 0.697 \frac{P}{2G\varepsilon}$). Бачимо, що тертя має незначний вплив на нормальні

контактні напруження. Лише в малому околі вершини клина необмежені нормальні контактні напруження при врахуванні тертя переходять у скінченні, але мають у вершині клина $r/\ell = 0$ велике пікове значення $\bar{\sigma} = -10.71$. За наявності тертя також появляються дотичні контактні напруження зі значним градієнтом у вершині клина ($\bar{\tau} = -1$ при $r/\ell = 0$).

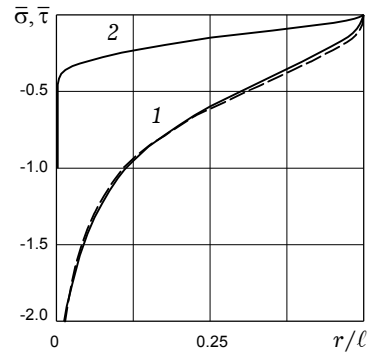


Рис. 2

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
2. Зражевський Г. М., Острик В. І. Асимптотика канонічних добутоків // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 3. – С. 69–77.
3. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
4. Острик В. И., Улитко А. Ф. Контактное взаимодействие жесткого клина с упругой полуплоскостью с учетом зон сцепления и проскальзывания в области контакта // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 1. – С. 93–105.

5. Улитко А. Ф., Качаловская Н. Е. Контактное взаимодействие жесткого и упругого клиньев при первоначальном точечном касании в их общей вершине // Доп. НАН України. – 1995. – № 1. – С. 51–54.
6. Улитко А. Ф., Острик В. І. Контакт пружного і жорсткого клинів з урахуванням сил тертя // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 1999. – Вип. 3. – С. 129–137.
7. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. – Москва: Наука, 1987. – 544 с.
8. Spence D. A. Self similar solutions to adhesive contact problems with incremental loading // Proc. Roy. Soc. London. **A**. – 1968. – **305**. – P. 55–80.

КОНТАКТ УПРУГОГО И ЖЕСТКОГО КЛИНЬЕВ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ И СЦЕПЛЕНИЯ

Рассмотрено взаимодействие упругого и жесткого клиньев при наличии трения и частичного сцепления в области контакта. С использованием метода Винера – Хопфа получено аналитическое решение задачи. Найдено распределение контактных напряжений.

CONTACT OF ELASTIC AND RIGID WEDGES WITH REGARD FOR FRICTION AND ADHESION

The interaction between elastic and rigid wedges in the presence of friction and partial adhesion is studied. Using the Wiener – Hopf method, the analytic solution to the problem is found. The distribution of contact stresses is obtained.

Ін-т прикл. фізики НАН України, Суми

Одержано
16.03.05