УДК 517.2: 539.3

Г. Я. Попов

УТОЧНЕНИЯ И ДОПОЛНЕНИЯ К СТАТЬЕ «ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОЛУЧЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ К ПОСТРОЕНИЮ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

В работе [4] при выводе новых интегральных преобразований пришлось решать сингулярную задачу Штурма – Лиувилля. Ее решение получено предельным переходом из подходящей регулярной (решенной там же) задачи Штурма – Лиувилля. Однако этот предельный переход там выполнен формально без строгого обоснования. В настоящей статье с некоторыми уточнениями дается строгое обоснование сделанного предельного перехода.

1. В работе [4] для функций $f(\theta)$, заданных на отрезке $[\omega_0, \omega_1]$, содержащемся в интервале $0 < \theta < \pi$, установлено интегральное преобразование (20) с формулой обращения (21). Ядро интегрального преобразования представляет собой линейную комбинацию сферических функций (14). Установленное интегральное преобразование основано на решении регулярной [5] задачи Штурма – Лиувилля. Однако при $\omega_0 = 0$ указанные задачи становятся сингулярными и поэтому выполненный в [4] формально предельный переход $\omega_0 \to 0$ нуждается в строгом обосновании. Этот предельный переход существенно базировался на том, что функция

$$U(\theta) = \sin^\mu \theta \cdot F\left(1 + \mu + \nu, \mu - \nu; 1 + \mu; \sin^2 \frac{\theta}{2}\right), \qquad \mu \ge 0\,, \tag{1}$$

не имеющая сингулярности при $\theta = 0$, удовлетворяет уравнению Лежандра (18) из [4], в чем можно убедиться непосредственно подстановкой. Однако это не является основанием отождествлять ее, умноженную на произвольный множитель, со сферической функцией $P_\nu^\mu(\cos\theta)$, что сделано в [4]. Для наших целей удобно выбрать другой множитель и подчеркнуть отличие ее от $P_\nu^\mu(\cos\theta)$, снабдив тильдой, т.е.

$$\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta) = \frac{\Gamma(\nu+1)(\sin\theta)^\mu}{\Gamma(\nu+\mu+1)} F\left(1 + \nu + \mu, \mu - \nu; 1 + \mu; \sin^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{2}$$

Эта функция будет линейно независимой к сферической функции $Q_\nu^\mu(\cos\theta)$, т.к. обе они удовлетворяют уравнению Лежандра, которое является самосопряженным, и поэтому их вронскиан обладает свойством [4]

$$W[\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta), Q_\nu^\mu(\cos\theta)] = W(\tilde{P}_\nu^\mu, Q_\nu^\mu) = \frac{1}{\sin\theta}\cdot \mathrm{const}\,. \tag{3}$$

Чтобы вычислить const, нужно знать значение вронскиана при каком-либо значении аргумента θ. Это сделать проще всего для $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, т.к. при этом значении аргумента выражение для функции $Q_\nu^\mu(\cos\theta)$ и ее производной дается формулами 3.4 (21) и 3.4 (22) из [1], а формула 2.8 (50) из [1] позволяет вычислить

$$\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta)\Big|_{\theta=\pi/2} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma\left(1+\dfrac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\mu-\nu+1}{2}\right)}, \tag{4}$$

$$\left.\frac{d\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=\pi/2} = \frac{2\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\mu+\nu)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(\mu-\nu)\right)}. \qquad (5)$$

Используя перечисленные формулы, вместо (3) будем иметь

$$W\left[\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta), Q_\nu^\mu(\cos\theta)\right] = -\frac{2^\mu\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)\cos\pi\mu}{\Gamma(\nu+\mu+1)\sin\theta}. \qquad (6)$$

Введенная функция (2) обладает свойством

$$\left.\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta)\right|_{\theta=0} = 0, \quad \mu > 0, \qquad \left.l_0^m\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta)\right|_{\omega_0=0} = 0, \quad \mu > 1, \qquad (7)$$

(функционал l_0^m определен формулой (13) из [4]).

Кроме того, она, как и $P_\nu^\mu(\cos\theta)$, удовлетворяет уравнению Лежандра (18) из [4] и поэтому справедливо равенство для интеграла $J_\nu^{(1)}$ с заменой там $P_\nu^\mu(\cos\theta)$ на $\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta)$, тем самым получаем формулу для $\left\|\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta)\right\|^2$. Более того, остаются справедливыми и формулы (14)–(16) из [4], если в них сделать аналогичную замену. Если полученный в **п. 2** работы [4] результат таким образом перефразировать и учесть (7), то формальный предельный переход $\omega_0 \to 0$ легко выполнить. Действительно, на основании (7) трансцендентные уравнения (15) из [4] перейдут в такие:

$$l_1^m\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta) = 0, \quad \nu = \nu_j, \quad j = 0,1,2,\ldots, \quad m = 0,1, \qquad (8)$$

а собственные функции (14) из [4] в силу (8) примут вид

$$y_m(\theta,\nu_j) = l_1^m Q_\nu^\mu(\cos\theta)\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta), \quad m = 0,1, \quad \nu = \nu_j, \qquad (9)$$

$$\left\|y_m(\theta,\nu_j)\right\|^2 = \left[l_i^m Q_\nu^\mu(\cos\theta)\right]^2\left\|\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta)\right\|^2.$$

Пусть функция $f(\theta)$ определена на отрезке $[0,\omega_1] = [0,\omega]$. Тогда для нее будет справедливо разложение (16) из [4], в котором следует учесть (9). В результате получим разложение

$$f(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\tilde{P}_{\nu_j}^\mu(\cos\theta)}{\left\|\tilde{P}_{\nu_j}^\mu(\cos\theta)\right\|^2}\int_0^\omega \tilde{P}_{\nu_j}^\mu(\cos\theta)f(\theta)\sin\theta\,d\theta,$$

$$\left\|\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta)\right\|^2 = \int_0^\omega\left[P_\nu^\mu(\cos\theta)\right]^2\sin\theta\,d\theta. \qquad (10)$$

Это разложение порождает интегральное преобразование

$$f_j = \int_0^\omega \tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta)f(\theta)\sin\theta\,d\theta, \qquad f(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\tilde{P}_{\nu_j}^\mu(\cos\theta)}{\left\|\tilde{P}_{\nu_j}^\mu(\cos\theta)\right\|^2}f_j. \qquad (11)$$

Собственные числа ν_j являются корнями уравнения (8), а квадрат нормы $\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta)$ вычисляется согласно изложенному в **п. 2** работы [4] по формуле

$$\left\|\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta)\right\|^2 = -\frac{\sin\omega}{2\nu+1}\left[\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\omega)\frac{\partial^2\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\omega)}{\partial\omega\partial\nu} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\omega)}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial\nu}\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\omega)\right]. \qquad (12)$$

Полученные с помощью формального предельного перехода $\omega_0 \to 0$ формулы (11) или (10) нуждаются в строгом обосновании, и, в частности, следует показать, что уравнение (8) имеет счетное число вещественных корней. Тем более это необходимо, так как выполненный предельный переход в [4] привел к результату, эквивалентность которого полученному здесь не удалось показать.

2. Для строгого обоснования формулы (10) следует выписать соответствующую сингулярную задачу Штурма − Лиувилля и свести ее к интегральному уравнению. Согласно соотношениям (12) из [4] названные задачи будут иметь вид

$$L_s y_m(\theta,\nu) - \nu(\nu+1)\sin\theta\, y_m(\theta,\nu) = 0, \qquad 0<\theta<\omega,$$

$$l_1^m y_m(\theta,\nu) = 0, \qquad y_m(\theta,\nu) < \infty, \qquad m = 0,1, \tag{13}$$

где $L_s y(\theta) = -\left[\sin\theta\, y'(\theta)\right]' + \mu^2 \operatorname{cosec}\theta\, y(\theta)$.

Можно убедиться, что решением этих краевых задач будут функции

$$y_m(\theta,\nu) = \tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta), \qquad m = 0,1, \tag{14}$$

если в качестве ν брать корни уравнений (8). Чтобы доказать существование счетного множества корней этих уравнений и ортогональность собственных функций (14), как и в **п. 1** [4], нужно свести краевые задачи (13) к интегральному уравнению Фредгольма с непрерывным и симметричным ядром. Для этого построим функцию Грина для самосопряженной краевой задачи

$$L_s y(\theta) = f(\theta), \quad 0<\theta<\omega, \qquad l_1^m y(\theta) = 0, \quad y(0)<\infty, \quad m = 0,1. \tag{15}$$

Общим решением однородного дифференциального уравнения из (13) будет функция

$$y(\theta) = c_0 \tilde{P}_0^\mu(\cos\theta) + c_1 Q_0^\mu(\cos\theta), \tag{16}$$

причем вронскиан фундаментальной системы решений согласно (6) определяется формулой

$$W\left[\tilde{P}_0^\mu(\cos\theta), Q_0^\mu(\cos\theta)\right] = -\,2^\mu \cos\pi\mu \operatorname{cosec}\theta. \tag{17}$$

Если потребовать, чтобы функция (16) удовлетворяла первому из граничных условий из (13), то придем к равенству

$$c_1 = -\,c_0 c_\mu^m, \qquad c_\mu^m = l_1^m \tilde{P}_0^\mu(\cos\theta)\left[l_1^m Q_0^\mu(\cos\theta)\right]^{-1}. \tag{18}$$

Подставив (18) в (16), построим функцию

$$\psi_\mu^m(\theta) = \tilde{P}_0^\mu(\cos\theta) - c_\mu^m Q_0^\mu(\cos\theta), \tag{19}$$

которая удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению из (15) и граничному условию $l_1^m \psi_\mu^m(\theta) = 0$. Поскольку краевые задачи самосопряжены, то функции Грина $G_m(\theta,t)$ для них будут симметричны, т.е. $G_m(\theta,t) = G_m(t,\theta)$, $m = 0,1$.

Чтобы функция Грина удовлетворяла этому условию, а также однородному дифференциальному уравнению (при $\theta > t$ и $\theta < t$) и граничным условиям из (15), достаточно ее взять в виде

$$G_m(\theta,t) = \begin{cases} c_0 \tilde{P}_0^\mu(\cos\theta)\psi_\mu^m(t), & \theta < t, \\ c_0 \psi_\mu^m(\theta)\tilde{P}_0^\mu(\cos t), & \theta > t, \end{cases} \qquad m = 0,1. \tag{20}$$

Константу c_0 найдем из условия разрывности первой производной функции Грина, а также формулы (17). В результате получим $c_0^{-1} = 2^\mu c_\mu^m \cos\pi\mu$.

Заметим еще, что на основании (2) и 3.4 (10) из [1] имеют место формулы

$$\tilde{P}_0^\mu(\cos\theta) = 2^\mu \Gamma^{-1}(\mu+1)\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^\mu,$$

$$2Q_0^\mu(\cos\theta) = \Gamma(\mu)\left[\cos\mu\pi\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)^\mu - \left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^\mu\right].$$

Построив функции Грина по формулам (20), как и в **п. 1** работы [4], сведем краевые задачи Штурма – Лиувилля (10) к эквивалентным интегральным уравнениям с непрерывными и симметричными ядрами.

Этим будет доказано существование счетного множества вещественных чисел ν_j и, стало быть, корней уравнения (8). Тем самым строго обоснована правильность формулы (10) и эквивалентных ей формул (11).

3. В работе [4] на основе полученного там предельного перехода $\omega_0 \to \to 0$ рассмотрены частные случаи установленного интегрального преобразования. Однако, поскольку этот предельный переход не обоснован строго, нельзя гарантировать правильность полученных там результатов. Здесь продублируем полученные там результаты с учетом сделанных уточнений, т.е. отправляясь от формул (11) или (10).

Как и в работе [4], если интервал задания функций $(0,\omega) \in (0,\pi)$ переходит в интервал $(0,\pi/2)$, то формулы (10) существенно упрощаются, так как собственные числа ν_j находятся в явном виде. Действительно, в случае $m = 0$ уравнение (8), из которого находятся собственные числа ν_j, с учетом (13) из [4], а также (4) и (5) приобретает вид

$$\Gamma(\nu+1)\left[\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}(\nu+\mu)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(\mu-\nu+1)\right)\right]^{-1} = 0. \qquad (21)$$

Необходимо найти нули $\nu = \nu_j$ этого уравнения, для которых соответствующие собственные функции $\tilde{P}_{\nu_j}^\mu(\cos\theta) \neq 0$.

Очевидно, нулями уравнения (21) будут полюса Γ-функций, содержащихся там в квадратных скобках. Учитывая, что полюсами $\Gamma(z)$ являются целые отрицательные числа (включая нуль), имеем три серии нулей уравнения (21):

а) полюса функции $\Gamma(\nu_j+\mu+1)$, определяемые из соотношения $\nu_j+\mu+1 = -j$, $j = 0,1,2,\dots$, т.е. $\nu_j = -\mu-1-j$, но при этих значениях нижнего индекса, согласно формуле (2), $\tilde{P}_{\nu_j}^\mu(\cos\theta) \equiv 0$. Поэтому корни уравнений этой серии не могут быть собственными числами;

б) полюса функции $\Gamma\left(1+\frac{1}{2}(\nu+\mu)\right)$, $\nu = \nu_j$, имеют вид $\nu_j = -2j-2-\mu$. Но эти корни на основании (2) приводят к занулению $\tilde{P}_{\nu_j}^\mu(\cos\theta) \equiv 0$, и тоже не могут быть собственными числами;

в) полюса функции $\Gamma\left(\frac{1}{2}(\mu-\nu+1)\right)$, $\nu = \nu_j$, определяемые формулой

$$\nu_j = 2j+\mu+1. \qquad (22)$$

При этих значениях корней уравнения (8) при $m = 0$ приходим к формуле

$$\tilde{P}^{\mu}_{\nu_j}(\cos\theta) = \frac{\Gamma(2j+2+\mu)}{\Gamma(2j+2+2\mu)} \sin^{\mu}\theta \cdot F\left(2j+2+2\mu, -2j-1, 1+\mu; \sin^2\frac{\theta}{2}\right). \quad (23)$$

Таким образом, при $m = 0$ в формулах (11) или (10) собственные числа и собственные функции можно выбирать по формулам (22) и (23), причем формулу (23) с помощью соотношения 10.9 (20) из [2] можно выразить через многочлен Гегенбауэра $C_n^{\lambda}(z)$:

$$\tilde{P}^{\mu}_{\nu_j}(\cos\theta) = \Gamma_j^{\lambda}\varphi_j^{\lambda}(\theta), \qquad \varphi_j^{\lambda}(\theta) = (\sin\theta)^{\lambda-1/2} C_{2j+1}^{\lambda}(\cos\theta), \quad (24)$$

$$\Gamma_j^{\lambda} = \Gamma^{-2}(2j+1+2\lambda)\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(2j+\lambda+\frac{3}{2}\right)(2j+1)!, \quad \lambda = \mu + \frac{1}{2}.$$

Квадрат нормы этих собственных функций вычисляется по формуле

$$\left\| \tilde{P}^{\mu}_{\nu_j}(\cos\theta) \right\|^2 = \int\limits_0^{\pi/2} \left[\tilde{P}^{\mu}_{\nu_j}(\cos\theta)\right]^2 \sin\theta\, d\theta = (\Gamma_j^{\lambda})^2 \left\| \varphi_j^{\lambda}(\theta) \right\|^2,$$

$$\left\| \varphi_j^{\lambda}(\theta) \right\|^2 = \int\limits_0^{\pi/2} \left[C_{2j+1}^{\lambda}(\cos\theta)\right]^2 (\sin\theta)^{2\lambda}\, d\theta.$$

Последний интеграл после замены $\cos\theta = x$ приводится к виду

$$\left\|\varphi_j^{\lambda}(\theta)\right\|^2 = \int\limits_0^1 (1-x^2)^{\lambda-1/2}\left[C_{2j+1}^{\lambda}(x)\right]^2 dx = \frac{\pi 2^{-2\lambda}\Gamma(2\lambda+2j+1)}{(2j+1)!\,\Gamma(\lambda+2j+1)\Gamma^2(\lambda)}. \quad (25)$$

Второе равенство получаем на основании формулы 7.313 (2) из [3] и формулы 10.9 (16) из [2].

Если теперь подставить (22) и (24) в разложение (10), то множитель Γ_j^{λ} сократится и получаем такое интегральное преобразование для функций, заданных на отрезке $[0, \pi/2]$:

$$f_j = \int\limits_0^{\pi/2} \varphi_j^{\lambda}(\theta)\sin\theta f(\theta)\, d\theta, \quad f(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi_j^{\lambda}(\theta)}{\left\| \varphi_j^{\lambda}(\theta) \right\|^2} f_j, \quad \lambda = \mu + \frac{1}{2}. \quad (26)$$

Собственные функции $\varphi_j^{\lambda}(\theta)$ определяются формулой (24), а их нормы – равенством (25) при $\lambda = \mu + 1/2$.

Функции $U(\theta) = \varphi_j^{\mu+1/2}(\theta)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению Лежандра

$$\frac{\left[U'(\theta)\sin\theta\right]'}{\sin\theta} + \nu_j(\nu_j+1)U(\theta) - \frac{\mu^2}{\sin^2\theta}U(\theta) = 0 \quad (27)$$

при ν_j, определяемых формулой (22), и граничному условию $U(\pi/2) = 0$.

Взяв отрезок задания функции $f(\theta)$ в виде $[0, \pi/2]$, рассмотрим в (10) или в (11) случай $m = 1$. Если в граничном функционале l_1^1, определяемом формулами (13) из [4], h_1 – произвольное вещественное число, то для трансцендентного уравнения (8) при $m = 1$ не удается найти явного решения и его следует решать численно. Однако, если $h_1 = 0$, трансцендентное уравнение (8) с учетом равенства (13) из [4] и (5) переходит в следующее:

$$\frac{d}{d\theta}\tilde{P}_{\nu}^{\mu}(\cos\theta)\Big|_{\theta=\pi/2} = \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}(\nu+\mu+1)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(\mu-\nu)\right)} = 0\,. \qquad (28)$$

Как и в случае $m = 0$, имеем три серии корней уравнения (28), совпадающих с полюсами Γ-функций, стоящих в знаменателе, но только одна из них, а именно

$$\nu_j = 2j + \mu, \qquad j = 0,1,2,\ldots \qquad (29)$$

не приводит к занулению функции

$$\tilde{P}_{\nu_j}^{\mu}(\cos\theta) = \frac{\Gamma(2j+\mu+1)}{\Gamma(2j+2\mu+1)}\sin^{\mu}\theta\cdot F\left(2j+2\mu+1,-2j,1+\mu;\sin^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Последующими преобразованиями аналогично, как и при $m = 0$, получаем формулы

$$\tilde{P}_{\nu_j}^{\mu}(\cos\theta) = \tilde{\Gamma}_j^{\lambda}\tilde{\varphi}_j^{\lambda}(\theta), \qquad \tilde{\varphi}_j^{\lambda}(\theta) = (\sin\theta)^{\lambda-1/2}C_{2j}^{\lambda}(\cos\theta)\,, \qquad (30)$$

$$\tilde{\Gamma}_j^{\lambda} = \Gamma^{-2}(2j+2\lambda)\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(2j+\lambda+\frac{1}{2}\right)(2j)!\,, \qquad \lambda = \mu+\frac{1}{2}\,,$$

при этом

$$\left\|\tilde{\varphi}_j^{\lambda}(\theta)\right\|^2 = \frac{\pi\Gamma(2\lambda+2j)}{(2j)!\,\Gamma(\lambda+2j)\Gamma^2(\lambda)2^{2\lambda}}\,. \qquad (31)$$

После подстановки (29) и (30) в (10) при $\omega = \frac{\pi}{2}$, получаем интегральное преобразование

$$f_j = \int\limits_0^{\pi/2}\tilde{\varphi}_j^{\lambda}(\theta)\sin\theta f(\theta)\,d\theta, \qquad f(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\tilde{\varphi}_j^{\lambda}(\theta)}{\left\|\tilde{\varphi}_j^{\lambda}(\theta)\right\|^2}f_j, \qquad \lambda = \mu+\frac{1}{2}. \qquad (32)$$

Собственные функции $\tilde{\varphi}_j^{\lambda}(\theta)$ определены формулой (30), а их нормы – формулой (31). Функции $U(\theta) = \tilde{\varphi}_j^{\mu+1/2}(\theta)$ удовлетворяют уравнению Лежандра (27) при ν_j, взятых по формуле (29). Кроме того, они удовлетворяют граничному условию

$$\frac{d\tilde{\varphi}_j^{\mu+1/2}(\theta)}{d\theta}\Bigg|_{\theta=\pi/2} = 0\,.$$

Интегральные преобразования (26) и (32) полезны при решении некоторых краевых задач для полусферы.

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – Т. 1. – Гипергеометрическая функция, функция Лежандра. – Москва: Наука, 1965. – 294 с.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – Т. 2. – Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – Москва: Наука, 1965. – 295 с.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1971. – 1100 с.
4. *Попов Г. Я.* Об одном методе получения интегральных преобразований с применением к построению точных решений краевых задач математической физики // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 3. – С. 74–89.
5. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка: В 2 ч. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. – Ч. 1. – 278 с.

УТОЧНЕННЯ І ДОПОВНЕННЯ ДО СТАТТІ «ПРО ОДИН МЕТОД ОТРИМАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ДО ПОБУДОВИ ТОЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ»

У роботі [4] *при виведенні нових інтегральних перетворень довелося розв'язувати сингулярну задачу Штурма – Ліувілля. Її розв'язок отримано граничним переходом із відповідної регулярної* (*розв'язаної там же*) *задачі Штурма – Ліувілля. Однак цей перехід там виконано формально без строгого обґрунтування. У цій статті наведено строге обґрунтування виконаного граничного переходу з деякими уточненнями* .

SPECIFICATIONS AND ADDITIONS TO THE PAPER «ON ONE METHOD FOR OBTAINING INTEGRAL TRANSFORMS USING IN CONSTRUCTION PRECISE SOLUTIONS TO MATHEMATICAL PHYSICS BOUNDARY-VALUE PROBLEMS»

In the work [4] *at obtaining new integral transformations it was necessary to solve the singular Sturm – Liouville problem. Its solution is obtained by passing to the limit in the suitable regular* (*solved there also*) *Sturm – Liouville problem. However, this transition was done there formally without a strict proof. In the present work the strict proof of the made limit passing is given with some specifications.*

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова, Одесса

Получено 21.04.05