УДК 539.3

Я. Й. Бурак [1], М. А. Сухорольський [2]

ПОСЛІДОВНІСНИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО ТІЛА

Систему фундаментальних розв'язків рівнянь теорії пружності для ортотропного тіла побудовано у вигляді границь послідовностей узагальнених сум тригонометричних рядів. Досліджено умови їх рівномірної збіжності.

1. **Вступ**. Послідовнісний підхід до побудови узагальнених розв'язків крайових задач для рівнянь із частинними похідними, сформульований у роботі [4], розкриває широкі можливості використання математичного апарату теорії послідовностей і рядів стосовно до побудови числових розв'язків некоректно поставлених крайових задач теорії пружності. У роботах [1, 3, 6, 7] послідовнісний підхід застосовано до побудови фундаментальних розв'язків рівнянь теорії оболонок і на цій основі сформульовано числові алгоритми розв'язування контактних задач і крайових задач методом граничних інтегральних рівнянь.

У цій роботі, ґрунтуючись на ідеї послідовнісного підходу до побудови узагальнених функцій, побудовано систему фундаментальних розв'язків рівнянь теорії пружності для ортотропного тіла у вигляді границь послідовностей узагальнених сум тригонометричних рядів. Досліджено умови рівномірної збіжності та існування узагальнених сум відповідних тригонометричних рядів.

2. Побудова регулярного розв'язку. Розглянемо задачу про дію на ортотропний паралелепіпед V сил (p_1, p_2, p_3), локалізованих у кубі $V_\varepsilon \subset V$,

$$p_i(x, x^0, \varepsilon) = p_i^0 \delta(x_1, x_1^0, \varepsilon)\, \delta(x_2, x_2^0, \varepsilon)\, \delta(x_3, x_3^0, \varepsilon)\,, \tag{1}$$

де

$$\delta(x_i, x_i^0, \varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} g\left(\dfrac{\left|x_i - x_i^0\right|}{\varepsilon}\right), & \left|x_i - x_i^0\right| \le \varepsilon, \\ 0, & \left|x_i - x_i^0\right| > \varepsilon, \end{cases} \tag{2}$$

– δ-подібна послідовність функцій [3]; $V_\varepsilon = \left\{(x_1, x_2, x_3) : \left|x_i - x_i^0\right| < \varepsilon\right\}$, $V = \left\{(x_1, x_2, x_3) : 0 < x_i < \ell_i\right\}$, $0 < \varepsilon < \ell_i$; x_i – декартові прямокутні координати; p_i^0 – компоненти рівнодійної сили, прикладеної до куба V_ε; $g(t)$ – кусково-гладка функція на проміжку $[0,1]$ така, що $g(1) = 0$ і $\int\limits_0^1 g(t)\, dt = 1$.

Напружено-деформований стан тіла описується рівняннями теорії пружності:

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial \alpha_1} + \omega^2 u_i = -p_i\,, \tag{3}$$

$$\begin{Vmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \partial u_1/\partial x_1 \\ \partial u_2/\partial x_2 \\ \partial u_3/\partial x_3 \end{Vmatrix}, \qquad \sigma_{ij} = G_{ij}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right),$$

де $i, j = 1, 2, 3$, $i \ne j$, $F_{ij} = F_{ji}$, $G_{ij} = G_{ji}$ – пружні характеристики тіла; σ_{ij} – компоненти тензора напружень; u_i – компоненти вектора переміщень; ω^2 – параметр, що характеризує інерційну властивість тіла.

Пружні характеристики F_{ij} виражаються через коефіцієнти Пуассона ν_{ij} і модулі Юнга E_i за такими формулами [2]:

$$F_{11} = E_1^0(1-\nu_{23}\nu_{32}), \quad F_{22} = E_2^0(1-\nu_{13}\nu_{31}), \quad F_{33} = E_3^0(1-\nu_{12}\nu_{21}),$$
$$F_{12} = E_1^0(\nu_{12}-\nu_{13}\nu_{32}), \quad F_{13} = E_1^0(\nu_{13}-\nu_{12}\nu_{23}), \quad F_{23} = E_2^0(\nu_{23}-\nu_{21}\nu_{13}),$$

де

$$E_i^0 = E_i(1-2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13})^{-1},$$
$$\nu_{ij}E_i = \nu_{ji}E_j, \qquad i,j=1,2,3, \;\; i\neq j.$$

Виключивши напруження, систему рівнянь (3) зведемо до такої системи трьох рівнянь відносно переміщень:

$$\left(F_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+G_{12}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+G_{13}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}+\omega^2 u_1\right)+(F_{12}+G_{12})\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}+$$
$$+(F_{13}+G_{13})\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_3} = -\,p_1,$$
$$(F_{21}+G_{21})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2\partial x_1}+\left(G_{21}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+F_{22}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+G_{23}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}+\omega^2 u_2\right)+$$
$$+(F_{23}+G_{23})\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2\partial x_3} = -\,p_2,$$
$$(F_{31}+G_{31})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3\partial x_1}+(F_{32}+G_{32})\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3\partial x_2}+\left(G_{31}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+G_{32}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}+\right.$$
$$\left.+F_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+\omega^2 u_3\right) = -\,p_3. \tag{4}$$

Розв’язок системи рівнянь (4) шукаємо у вигляді сум рядів за системами тригонометричних функцій, продовжуючи його за межі паралелепіпеда V періодичними функціями. У виразах правих частин системи рівнянь (4) − функцій (1) − зафіксуємо параметр $\varepsilon > 0$ і зобразимо їх у вигляді сум рядів Фур’є

$$p_1 = p_1^0\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\sum_{k_3=1}^{\infty} c(k,\varepsilon)\,\Phi_1(k,x^0)\Phi_1(k,x),$$
$$p_2 = p_2^0\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_3=1}^{\infty} c(k,\varepsilon)\,\Phi_2(k,x^0)\Phi_2(k,x),$$
$$p_3 = p_3^0\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{\infty} c(k,\varepsilon)\,\Phi_3(k,x^0)\Phi_3(k,x), \tag{5}$$

де
$$c(k,\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{4}{\ell_1\ell_2\ell_3}\varphi(\lambda_{2k}\varepsilon)\varphi(\lambda_{3k}\varepsilon), & k_1\geq 0,\;\; k_2\geq 1,\;\; k_3\geq 1, \\ \dfrac{4}{\ell_1\ell_2\ell_3}\varphi(\lambda_{1k}\varepsilon)\varphi(\lambda_{3k}\varepsilon), & k_1\geq 1,\;\; k_2\geq 0,\;\; k_3\geq 1, \\ \dfrac{4}{\ell_1\ell_2\ell_3}\varphi(\lambda_{1k}\varepsilon)\varphi(\lambda_{2k}\varepsilon), & k_1\geq 1,\;\; k_2 = 1,\;\; k_3\geq 0, \\ \dfrac{8}{\ell_1\ell_2\ell_3}\varphi(\lambda_{1k}\varepsilon)\varphi(\lambda_{2k}\varepsilon)\varphi(\lambda_{3k}\varepsilon), & k_1\geq 1,\;\; k_2\geq 1,\;\; k_3\geq 1, \end{cases}$$

$$\Phi_1(k,x) = \cos(\lambda_{1k}x_1)\sin(\lambda_{2k}x_2)\sin(\lambda_{3k}x_3),$$
$$\Phi_2(k,x) = \sin(\lambda_{1k}x_1)\cos(\lambda_{2k}x_2)\sin(\lambda_{3k}x_3),$$
$$\Phi_3(k,x) = \sin(\lambda_{1k}x_1)\sin(\lambda_{2k}x_2)\cos(\lambda_{3k}x_3),$$

$\lambda_{ik} = \dfrac{k_i \pi}{\ell_i}$; $k = (k_1, k_2, k_3)$; $\varphi(\lambda_{ik}\varepsilon)$ − функції, що задаються формулою [3] $\varphi(\lambda_{ik}\varepsilon) = \int\limits_0^1 g(t)\cos(\lambda_{ik}\varepsilon\, t)\, dt$ і, власне кажучи, є коефіцієнтами Фур'є δ-подібної функції (2):

$$\delta(\varepsilon, x_i, x_i^0) = \frac{2}{\ell_i}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\lambda_{ik}\varepsilon)\cos(\lambda_{ik} x_i^0)\cos(\lambda_{ik} x_i)\right],$$

$$\delta(\varepsilon, x_i, x_i^0) = \frac{2}{\ell_i}\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\lambda_{ik}\varepsilon)\sin(\lambda_{ik} x_i^0)\sin(\lambda_{ik} x_i). \tag{6}$$

Зокрема, якщо $g(t) = \dfrac{2^m (m!)^2}{(2m)!}(1 + \cos \pi t)^m$, то

$$\varphi(\lambda_i\varepsilon) = \frac{\sin(\lambda_i\varepsilon)}{\lambda_i\varepsilon}\prod_{r=1}^{m}\left[1 - \left(\frac{\lambda_i\varepsilon}{r\pi}\right)^2\right]^{-1}. \tag{7}$$

Ряди (6) і відповідно ряди (5) збігаються рівномірно, оскільки для коефіцієнтів Фур'є кусково-гладкої функції справджується оцінка [8] $\left|\varphi(\lambda_{ik}\varepsilon)\right| = O\left(\dfrac{1}{k_i^2}\right)$ при $\varepsilon \neq 0$.

Невідомі функції системи рівнянь (4) шукаємо, узгодивши з розвиненнями (5), у вигляді сум рядів

$$u_1(x, x^0, \varepsilon) = \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\sum_{k_3=1}^{\infty} c(k,\varepsilon)\Phi_1(k,x)\sum_{m=1}^{3} p_m^0 u_1^m(k)\Phi_m(k,x^0),$$

$$u_2(x, x^0, \varepsilon) = \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_3=1}^{\infty} c(k,\varepsilon)\Phi_2(k,x)\sum_{m=1}^{3} p_m^0 u_2^m(k)\Phi_m(k,x^0),$$

$$u_3(x, x^0, \varepsilon) = \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{\infty} c(k,\varepsilon)\Phi_3(k,x)\sum_{m=1}^{3} p_m^0 u_3^m(k)\Phi_m(k,x^0). \tag{8}$$

При цьому задовольнимо такі граничні умови на границі паралелепіпеда V:

$$\sigma_{ii}(x, x^0, \varepsilon)\Big|_{x_i=0} = 0, \quad \sigma_{ii}(x, x^0, \varepsilon)\Big|_{x_i=\ell_i} = 0, \quad i = 1,2,3,$$

$$u_i(x, x^0, \varepsilon)\Big|_{x_j=0} = 0, \quad u_i(x, x^0, \varepsilon)\Big|_{x_j=\ell_j} = 0, \quad i,j = 1,2,3, \quad i \neq j. \tag{9}$$

Якщо підставити вирази функцій (5) і (8) у рівняння системи (4), то отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих множників коефіцієнтів розвинень переміщень $u_j^l(k)$, $l, j = 1,2,3$:

$$\| A_{ij}(k) \| \, \| u_j^l(k) \| = \| \Omega_i^l \|, \tag{10}$$

де

$$\| u_j^l(k) \| = \begin{Vmatrix} u_1^l(k) \\ u_2^l(k) \\ u_3^l(k) \end{Vmatrix}, \qquad \| A_{ij}(k) \| = \begin{Vmatrix} A_{11}(k) & A_{12}(k) & A_{13}(k) \\ A_{21}(k) & A_{22}(k) & A_{23}(k) \\ A_{31}(k) & A_{32}(k) & A_{33}(k) \end{Vmatrix},$$

$$\| \Omega_i^1 \| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad \| \Omega_i^2 \| = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad \| \Omega_i^3 \| = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix},$$

$$A_{11}(k) = F_{11}\lambda_{1k}^2 + G_{12}\lambda_{2k}^2 + G_{13}\lambda_{3k}^2 - \omega^2, \quad A_{12}(k) = A_{21}(k) = (F_{12} + G_{12})\lambda_{1k}\lambda_{2k},$$

$$A_{13}(k) = A_{31}(k) = (F_{13} + G_{13})\lambda_{1k}\lambda_{3k}, \quad A_{22}(k) = G_{21}\lambda_{1k}^2 + F_{22}\lambda_{2k}^2 + G_{23}\lambda_{3k}^2 - \omega^2,$$

$$A_{23}(k) = A_{32}(k) = (F_{23} + G_{23})\lambda_{2k}\lambda_{3k}, \quad A_{33}(k) = G_{31}\lambda_{1k}^2 + G_{32}\lambda_{2k}^2 + F_{33}\lambda_{3k}^2 - \omega^2.$$

Для значень параметра ω^2 таких, що $\det\| A_{ij}(k) \| \neq 0$, розв'язок цієї системи набуває вигляду

$$\| u_i^l(k) \| = \frac{1}{\det\| A_{ij}(k) \|} \| A_{ij}^{-1}(k) \| \| \Omega_j^l \|, \qquad k_1 \geq 1, \quad k_2 \geq 1, \quad k_3 \geq 1, \quad (11)$$

де

$$\det\| A_{ij}(k) \| = A_{11}(k)A_{22}(k)A_{33}(k) + 2A_{12}(k)A_{23}(k)A_{31}(k) -$$

$$- [A_{11}(k)]^2 A_{22}(k) - [A_{12}(k)]^2 A_{33}(k) - [A_{23}(k)]^2 A_{11}(k), \quad (12)$$

$$A_{11}^{-1}(k) = A_{22}(k)A_{33}(k) - [A_{23}(k)]^2,$$

$$A_{12}^{-1}(k) = A_{21}^{-1}(k) = A_{31}(k)A_{23}(k) - A_{21}(k)A_{33}(k),$$

$$A_{13}^{-1}(k) = A_{31}^{-1}(k) = A_{21}(k)A_{32}(k) - A_{22}(k)A_{31}(k),$$

$$A_{22}^{-1}(k) = A_{11}(k)A_{33}(k) - [A_{13}(k)]^2,$$

$$A_{23}^{-1}(k) = A_{32}^{-1}(k) = A_{12}(k)A_{31}(k) - A_{11}(k)A_{32}(k),$$

$$A_{33}^{-1}(k) = A_{11}(k)A_{22}(k) - [A_{12}(k)]^2.$$

Знайдемо умови, за яких (8) є регулярним розв'язком сформульованої задачі (розв'язком Фур'є), тобто ряди (8) рівномірно збігаються і рівномірно збігаються ряди, які зображують другі частинні похідні від переміщень [3].

Спочатку знайдемо оцінку знизу визначника (12) системи рівнянь (10), $\left|\det\|A_{ij}(k)\|\right| \geq M_0\lambda_{pk}^2\lambda_{qk}^2\lambda_{rk}^2$, $M_0 = \text{const}$, $\quad p, q, r = 1, 2, 3$, яка справджується для фіксованих значень параметра ω^2 і великих значень номерів k_1, k_2, k_3. Якщо врахуємо її при оцінюванні виразів коефіцієнтів матриці $\dfrac{1}{\det\| A_{ij}(k) \|}\| A_{ij}^{-1}(k) \|$ у формулі (11), то матимемо

$$\left| \frac{A_{pq}^{-1}(k)}{\det\|A_{ij}(k)\|} \right| \leq \frac{A_0}{\lambda_{pk}\lambda_{qk}}, \qquad p, q = 1, 3. \quad (13)$$

Тепер знайдемо оцінки сум рядів, одержаних при дворазовому диференціюванні рядів (8). Наприклад, для другої частинної похідної за змінною x_3 від переміщення $u_1(x, x^0, \varepsilon)$ маємо такий ряд:

$$\frac{\partial^2 u_1(x, x^0, \varepsilon)}{\partial x_3^2} = -\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \sum_{k_3=1}^{\infty} c(k, \varepsilon)\lambda_{3k}^2 \left[p_1^0 u_1^1(k)\Phi_1(k, x^0) + \right.$$

$$\left. + p_2^0 u_1^2(k)\Phi_2(k, x^0) + p_3^0 u_1^3(k)\Phi_3(k, x^0)\right] \Phi_3(k, x) =$$

$$= -\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \sum_{k_3=1}^{\infty} \frac{c(k, \varepsilon)\lambda_{3k}^2}{\det\|A_{ij}(k)\|} \left[p_1^0 A_{11}^{-1}(k)\Phi_1(k, x^0) + \right.$$

$$\left. + p_2^0 A_{12}^{-1}(k)\Phi_2(k, x^0) + p_3^0 A_{13}^{-1}(k)\Phi_3(k, x^0)\right] \Phi_3(k, x). \quad (14)$$

Якщо врахуємо тут обмеженість функцій $\Phi_i(k,x)$, вирази множників $c(k,\varepsilon)$ та оцінки (13), то матимемо

$$\left|\frac{\partial^2 u_1(x,x^0,\varepsilon)}{\partial x_3^2}\right| \le$$

$$\le A_1 \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\sum_{k_3=1}^{\infty} |\varphi(\lambda_{1k}\varepsilon)||\varphi(\lambda_{2k}\varepsilon)||\varphi(\lambda_{3k}\varepsilon)|\lambda_{3k}^2 \left[\frac{1}{\lambda_{1k}^2}|p_1^0| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_{1k}\lambda_{2k}}|p_2^0| + \frac{1}{\lambda_{1k}\lambda_{3k}}|p_3^0|\right] =$$

$$= \frac{8A_0|p_1^0|}{\ell_1\ell_2\ell_3}\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{|\varphi(\lambda_{1k}\varepsilon)|}{\lambda_{1k}^2}\sum_{k_2=1}^{\infty}|\varphi(\lambda_{2k}\varepsilon)|\sum_{k_3=1}^{\infty}|\varphi(\lambda_{3k}\varepsilon)|\lambda_{3k}^2 +$$

$$+ \frac{8A_0|p_2^0|}{\ell_1\ell_2\ell_3}\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{|\varphi(\lambda_{1k}\varepsilon)|}{\lambda_{1k}}\sum_{k_2=1}^{\infty}\frac{|\varphi(\lambda_{2k}\varepsilon)|}{\lambda_{2k}}\sum_{k_3=1}^{\infty}|\varphi(\lambda_{3k}\varepsilon)|\lambda_{3k}^2 +$$

$$+ \frac{8A_0|p_3^0|}{\ell_1\ell_2\ell_3}\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{|\varphi(\lambda_{1k}\varepsilon)|}{\lambda_{1k}}\sum_{k_2=1}^{\infty}|\varphi(\lambda_{2k}\varepsilon)|\sum_{k_3=1}^{\infty}|\varphi(\lambda_{3k}\varepsilon)|\lambda_{3k}\,.$$

Якщо справджується оцінка

$$|\varphi(\lambda_{lk}\varepsilon)| = O\left(\frac{1}{\lambda_{lk}^q}\right), \qquad \varepsilon \ne 0, \quad q > 3\,, \tag{15}$$

то одержані тут мажорантні ряди збігаються і, отже, ряд (14) збігається рівномірно.

Аналогічно можна показати, що за умови (15) рівномірно збігаються ряди для інших частинних похідних другого порядку від функції $u_1(x,x^0,\varepsilon)$, а також для похідних другого порядку від функцій $u_2(x,x^0,\varepsilon)$ і $u_3(x,x^0,\varepsilon)$.

Отже, правильними є такі твердження.

Теорема 1. *Якщо виконується оцінка* (15), *то* (8) *є розв'язком Фур'є* (*регулярним розв'язком*) *задачі* (1), (4), (9).

Наслідок 1. *Якщо* $m \ge 2$ *у виразі* (7) *для функції* $\varphi(\lambda_{ik}\varepsilon)$, *то* (8) *є розв'язком Фур'є задачі* (1), (4), (9).

Дійсно, для функції $\varphi(\lambda_{ik}\varepsilon)$, що задається формулою (7), маємо оцінку $|\varphi(\lambda_i)| = O\left(\frac{1}{\lambda_i^{2m+1}}\right)$, яка при $m \ge 2$ задовольняє умови теореми 1.

Зазначимо також [3], що за умови (15) при $q = 3$ суми рядів (8) є узагальненим розв'язком задачі (1), (4), (9) у розумінні рівномірної збіжності, оскільки рівномірно збіжними є тільки ряди для переміщень і напружень (перших похідних від переміщень).

3. Узагальнений розв'язок задачі про дію на тіло сил, зосереджених у точці. Розглянемо задачу про дію на ортотропне тіло сил (p_1^0, p_2^0, p_3^0), зосереджених у точці $x^0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$. Оскільки дія зосереджених сил моделюється за допомогою дельта-функції (узагальненої функції), яка не розвивається у рівномірно збіжний ряд Фур'є, то розв'язок відповідної крайової задачі не може бути знайдений методом Фур'є. Тому, ґрунтуючись на послідовнісному підході до зображення узагальнених функцій, шукаємо узагальнений розв'язок сформульованої задачі [3, 4] у вигляді граничних елементів послідовностей розв'язків (8) за виконання умови (15):

$$u_i(x, x^0) = \lim_{n \to 0} u_i(x, \varepsilon(n)), \qquad i = 1, 2, 3. \tag{16}$$

Для випадку виконання умови (15) при $q = 3$, що відповідає також функції (7) при $m = 1$, граничні елементи послідовностей (16) є узагальненим (у розумінні рівномірної збіжності) розв'язком задачі про локальне навантаження тіла [3].

Введемо нескінченно малу послідовність $\varepsilon = \varepsilon(n)$ і послідовності узагальнених сум рядів (8):

$$u_1(x, x^0, \varepsilon(n)) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \sum_{k_3=1}^{\infty} c(k, \varepsilon(n))\Phi_1(k, x) \sum_{m=1}^{3} p_m^0 u_1^m(k) \Phi_m(k, x^0),$$

$$u_2(x, x^0, \varepsilon(n)) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_3=1}^{\infty} c(k, \varepsilon(n))\Phi_2(k, x) \sum_{m=1}^{3} p_m^0 u_2^m(k) \Phi_m(k, x^0),$$

$$u_3(x, x^0, \varepsilon(n), n) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \sum_{k_3=0}^{n} c(k, \varepsilon(n))\Phi_3(k, x) \sum_{m=1}^{3} p_m^0 u_3^m(k) \Phi_m(k, x^0). \tag{17}$$

Дослідимо рівномірну збіжність послідовностей функцій (17) та існування їх границь.

Теорема 2. *Послідовності сум* (17) *і їхні другі частинні похідні за умов* (15) *рівномірно збігаються у будь-якій замкненій області* V', $V' \subset V$, *що не містить точки* x^0.

Д о в е д е н н я ґрунтується на використанні твердження [5] про рівномірну збіжність за умови (15) δ-подібних послідовностей функцій (6) і їх других похідних у будь-якому сегменті $[\ell'_i, \ell''_i]$, що не містить точки $x_i = x_i^0$ і $[\ell'_i, \ell''_i] \subset (0, \ell_i)$. Наприклад, рівномірна збіжність послідовності функцій

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \delta(x_i, x_i^0, \varepsilon(n)) = -\frac{2}{\ell_i} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{ik}^2 \varphi(\lambda_{ik} \varepsilon(n)) \sin(\lambda_{ik} x_i^0) \sin(\lambda_{ik} x_i)$$

означає, що яке б не було мале число $r > 0$, існує такий номер n_0, що якщо тільки $n > n_0$, то для будь-якого $x_i \in [\ell'_i, \ell''_i]$ виконується нерівність $\left| \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \delta(x_i, x_i^0, \varepsilon(n)) \right| \le r$. Оскільки функції (5) зображуються у вигляді добутків одновимірних δ-подібних функцій, можна стверджувати, що, якщо $\varepsilon = \varepsilon(n)$ – нескінченно мала послідовність, $V' = [\ell'_1, \ell''_1] \times [\ell'_2, \ell''_2] \times [\ell'_3, \ell''_3]$ $(V' \subset V)$ і $x^0(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \notin V'$, а також виконується умова (15), то рівномірно збіжними є послідовності функцій (5) і їх другі частинні похідні у паралелепіпеді V'. Якщо врахуємо оцінки (15) для множників коефіцієнтів переміщень у розвиненнях (17), а також у розвиненнях других частинних похідних від переміщень, то одержимо мажорантні ряди, порядок спадання коефіцієнтів яких є не меншим, ніж порядок спадання коефіцієнтів розвинення правих частин (5) системи (4) і їх других частинних похідних. Отже, за умови (15) послідовності функцій (17) рівномірно збігаються в області V'.

Наслідок 2. *Якщо* $m \geq 2$ *у виразі* (7) *для функції* $\varphi(\lambda_{ik}\varepsilon)$, *то послідовності функцій* (17) *і послідовності їхніх других частинних похідних рівномірно збігаються у будь-якій замкненій області* $V', V' \subset V$, *що не містить точки* x^0.

4. Висновки. Природно виникає задача наближення граничних функцій (17) і їх обчислення за допомогою частинних сум рядів, а також встановлення залежності між довжиною відрізків частинних сум рядів та варіантою $\varepsilon(n)$. Оскільки вираз функції $c(k, \varepsilon(n))$ містить добутки величин λ_{ik} і $\varepsilon(n)$, достатня точність наближення граничних функцій (в області, що не містить сингулярної точки) може бути забезпечена шляхом вибору достатньо малого значення параметра ε і великого числа n, що у граничному випадку справджують умову $\lim\limits_{n\to\infty} (\varepsilon(n)\lambda_{ik}) = \infty$. Наприклад, якщо прийняти $\varepsilon = \varepsilon_0$ і $\lambda_{in}\varepsilon_0 \approx 10$, то $n > \left[\dfrac{10 \max \ell_i}{\pi\varepsilon_0}\right]$.

Фундаментальні розв'язки (16) системи рівнянь (4) можуть бути використані, за аналогією з фундаментальними розв'язками системи рівнянь для ізотропного тіла, для інтегрального зображення розв'язків задач про навантаження ортотропного тіла силами, розподіленими в одно-, дво- чи тривимірних областях.

1. *Бурак Я. Й., Сухорольський М. А.* Коливання кусково-однорідних оболонок і пластин // Машинознавство. – 2002. – № 12. – С. 3–8.
2. *Новожилов В. В., Черных Л. Ф.* Об упругих постоянных линейной теории упругости // Современные проблемы механики и авиации. – Москва: Машиностроение, 1982. – С. 215–221.
3. *Рудавський Ю. К., Костробій П. П., Сухорольський М. А. та ін.* Рівняння математичної фізики. Узагальнені розв'язки крайових задач. – Львів: Нац. ун-т «Львів. політехніка», 2002. – 226 с.
4. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. – Москва: Гостехиздат, 1954. – 444 с.
5. *Сухорольський М. А.* До проблеми наближення функцій операторами усереднення. – Львів, 1995. – 48 с. – (Препр. / НАН України. Центр мат. моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача; № 1–95.)
6. *Сухорольський М. А.* Узагальнені граничні інтегральні рівняння в теорії оболонок Тимошенка // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 3. – С. 133–139.
7. *Сухорольский М. А., Костенко И. С.* Секвенциальное представление решений контактных задач теории оболочек // Теорет. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 36. – С. 108–115.
8. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – Москва: Наука, 1969. – Т. 3. – 656 с.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТНЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО ТЕЛА

Система фундаментальных решений уравнений теории упругости для ортотропного тела построена в виде пределов последовательностей обобщенных сумм тригонометрических рядов. Приведены условия их равномерной сходимости.

SEQUENTIAL APPROACH TO CONSTRUCTING GENERALIZED SOLUTIONS TO BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY FOR ORTHOTROPIC BODY

The system of fundamental solutions to the equations of the elasticity theory for an orthotropic body is constructed in the form of limits of sequences of generalized sums of trigonometrical series. The conditions of their uniform convergence are investigated.

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано 28.12.04