УДК 518.61.001.573

А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк

АСИМПТОТИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНОЇ ГЕТЕРОДИФУЗІЇ

Побудовано алгоритм асимптотичного наближення розв'язків сингулярно збурених крайових задач конвективної гетеродифузії для двозв'язних криволінійних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями.

Вступ. Асимптотичний метод М. Й. Вішика та Л. А. Люстерника [6], важливими перевагами якого є ідейна простота та застосовність до широкого класу рівнянь з частинними похідними з малим параметром при старших похідних, отримав широке поширення і важливі застосування у багатьох розділах механіки та ін. Так, у працях [2, 5, 13, 14] йдеться про розробку та дослідження асимптотичних методів розв'язування типових крайових задач для сингулярно збурених параболічних та еліптичних рівнянь у канонічних областях з урахуванням різного рівня гладкості початкової та граничних умов, а також їх узгодженості у кутових (реброви) точках. Аналіз робіт [1, 3, 4, 8, 7, 11], присвячених цим методам, показує їх успішну модифікацію стосовно розв'язання задач конвективної дифузії при фільтрації у чотирикутних криволінійних областях, обмежених еквіпотенціальними лініями та лініями течії, а також для багатозв'язних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями. У роботах [9, 10] проведено дослідження процесів конвективного масопереносу при двомірній фільтрації підземних вод за умов масообміну, зокрема у випадку нелінійної іонообмінної сорбції побудовано розв'язок відповідної сингулярно збуреної задачі методом зрощування асимптотичних розвинень.

При розв'язуванні практичних задач часто виникає проблема опису та розрахунку процесів дифузії у дрібнодисперсних тілах зі складною внутрішньою структурою. При такому моделюванні приймають, що частинки одного й того ж хімічного сорту локально перебувають у фізично різних станах. Тоді перенесення домішки відбувається декількома шляхами та супроводжується переходами з одного шляху міграції на інший. Такого типу процеси вивчались у працях [12, 15].

У цій статті побудовано асимптотичне розвинення розв'язків сингулярно збурених крайових задач конвективної гетеродифузії для двозв'язних криволінійних областей обмежених еквіпотенціальними лініями.

Постановка задачі. Розглянемо модельну задачу конвективної гетеродифузії для області $G = G_z \times (0,\infty)$, де G_z, $z = x + iy$, − двозв'язна криволінійна область (пористий пласт), обмежена двома замкненими гладкими контурами $L_* = \{z : \ f_*(x,y) = 0\}$ − внутрішнім і $L^* = \{z : f^*(x,y) = 0\}$ − зовнішнім (рис. 1*а*):

$$\varepsilon_1\big(c_{xx}(x,y,t) + c_{yy}(x,y,t)\big) + \varepsilon_2\big(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)\big) - \\ - v_x(x,y)c_x(x,y,t) - v_y(x,y)c_y(x,y,t) - \varepsilon^* a_1(x,y)c(x,y,t) + \\ + a_2(x,y)u(x,y,t) = c_t(x,y,t)\,, \tag{1}$$

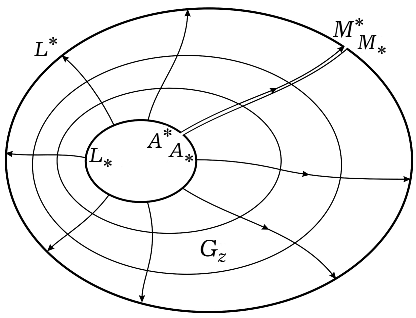
$$\varepsilon_3\big(c_{xx}(x,y,t) + c_{yy}(x,y,t)\big) + \varepsilon_4\big(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)\big) + \\ + \varepsilon^* a_1(x,y)c(x,y,t) - a_2(x,y)u(x,y,t) = u_t(x,y,t)\,, \tag{2}$$

$$c\Big|_{L_*} = c_*(M,t), \qquad c\Big|_{L^*} = c^*(M,t), \qquad c(M,0) = c_0^0(M),$$

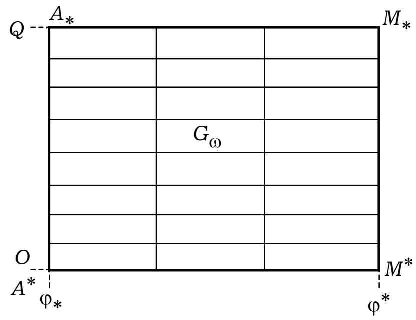
$$u\Big|_{L_*} = u_*(M,t), \quad u\Big|_{L^*} = u^*(M,t), \qquad u(M,0) = u_0^0(M), \tag{3}$$

$$(v_x, v_y) = \operatorname{grad}\varphi(x,y), \qquad \Delta\varphi = 0, \quad \varphi\Big|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi\Big|_{L^*} = \varphi^*, \tag{4}$$

де $c(x,y,t)$, $u(x,y,t)$ – концентрації розчинної речовини відповідно у фільтраційній течії і на поверхні скелету (у зв'язаних зі скелетом поляризованих шарах води) у точці (x,y) в момент часу t; M – біжуча точка відповідної кривої; $\varepsilon_1 = k_1\varepsilon$, $\varepsilon_2 = k_2\varepsilon$, $\varepsilon_3 = k_3\varepsilon$, $\varepsilon_4 = k_4\varepsilon$, $\varepsilon^* = k^*\varepsilon$, де k_1, k_2, k_3, k_4, k^* – задані додатні дійсні числа, ε, $\varepsilon > 0$, – малий параметр (він характеризує домінування одних складових процесу над іншими); φ, v_x, v_y – відповідно потенціал і компоненти його швидкості (швидкості фільтрації в пористому середовищі G_z), $\sqrt{v_x^2(x,y) + v_y^2(x,y)} > v_* \gg \varepsilon$; $a_1(x,y)$, $a_2(x,y)$ – концентраційні коефіцієнти інтенсивності процесів переходу з одного шляху міграції на інший (див., наприклад, [11, 12]), $a_i(x,y) > a \gg \varepsilon$, $i = 1,2$; $c_*(M,t)$, $c^*(M,t)$, $c_0^0(M)$, $u_*(M,t)$, $u^*(M,t)$, $u_0^0(M)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G.



а)



б)

Рис. 1

Ця модель враховує той факт, що за умови локальної рівноваги стосовно переходів домішкових частинок між адсорбованими на скелеті ґрунту долями води та в об'ємі скелету [12] частинки одного й того ж сорту розчинної речовини у межах виділеного фізично малого елемента ґрунту можуть перебувати на поверхні скелету чи бути в розчині фільтраційної течії, причому явища конвекції і сорбції домінують над іншими складовими процесу.

Нехай шляхом конформного відображення [4] $G_z^* \mapsto G_\omega$ (або $G_\omega \mapsto G_z^*$), де $G_z^* = G_z \setminus L$, L – розріз області G_z уздовж деякої лінії течії $A^*M^*A_*M_*$ (на рис. 1*а* через A_*M_* та A^*M^* зображено береги цього розрізу), $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*,\ 0 < \psi < Q\}$ – відповідна до G_z^* область комплексного потенціалу (рис. 1*б*), $\psi = \psi(x,y)$ – функція течії (комплексно спряжена до $\varphi = \varphi(x,y)$), знайдено розв'язок задачі (4), зокрема, визначено поле швидкостей $(v_x(x,y), v_y(x,y))$. Параметр $Q = \int_{L^*} -v_y dx + v_x dy$ (потік через довільний поперечний переріз G_z) і розріз L (за заданою точкою $A_* = A^* \in L_*$) визначаємо у процесі розв'язання задачі (див. [3]). Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ у рівняннях (1), (2) та умовах (3), отримуємо відповідну періодичну щодо змінної ψ задачу гетеродифузії для області G_ω:

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\left(k_1\left(\frac{\partial^2 c(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 c(\varphi,\psi,t)}{\partial\psi^2}\right)+k_2\left(\frac{\partial^2 u(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial^2 u(\varphi,\psi,t)}{\partial\psi^2}\right)\right)-v^2(\varphi,\psi)\frac{\partial c(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi}-\varepsilon k^* a_1(\varphi,\psi)\,c(\varphi,\psi,t)+$$

$$+a_2(\varphi,\psi)\,u(\varphi,\psi,t)=\frac{\partial c(\varphi,\psi,t)}{\partial t}, \tag{5}$$

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\left(k_3\left(\frac{\partial^2 c(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 c(\varphi,\psi,t)}{\partial\psi^2}\right)+k_4\left(\frac{\partial^2 u(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u(\varphi,\psi,t)}{\partial\psi^2}\right)\right)+$$

$$+\varepsilon k^* a_1(\varphi,\psi)\,c(\varphi,\psi,t)-a_2(\varphi,\psi)\,u(\varphi,\psi,t)=\frac{\partial u(\varphi,\psi,t)}{\partial t}, \tag{6}$$

$$c(\varphi_*,\psi,t)=c_*(\psi,t),\qquad c(\varphi^*,\psi,t)=c^*(\psi,t),\qquad c(\varphi,\psi,0)=c_0^0(\varphi,\psi),$$

$$u(\varphi_*,\psi,t)=u_*(\psi,t),\qquad u(\varphi^*,\psi,t)=u^*(\psi,t),\qquad u(\varphi,\psi,0)=u_0^0(\varphi,\psi). \tag{7}$$

Асимптотика розв'язку. Розв'язок (c, u) задачі з точністю $O(\varepsilon^n)$ (для спрощення викладок покладемо $n = 2$) шукаємо у вигляді таких асимптотичних рядів [2, 3, 5, 13]:

$$c(\varphi,\psi,t)=c_0(\varphi,\psi,t)+\varepsilon c_1(\varphi,\psi,t)+\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^i\Pi_i(\xi,\psi,t)+R_2^1(\varphi,\psi,t,\varepsilon), \tag{8}$$

$$u(\varphi,\psi,t)=u_0(\varphi,\psi,t)+\varepsilon\,u_1(\varphi,\psi,t)+\sum_{i=0}^{3}\varepsilon^{i/2}P_i(\eta,\psi,t)+$$

$$+\sum_{i=0}^{3}\varepsilon^{i/2}\Gamma_i(\mu,\psi,t)+R_2^2(\varphi,\psi,t,\varepsilon), \tag{9}$$

де $c_i(\varphi,\psi,t)$, $u_i(\varphi,\psi,t)$, $i = 0,1$, − члени регулярної частини асимптотики; $\Pi_i(\xi,\psi,t)$, $i = 0,1,2$; $P_i(\eta,\psi,t)$, $i = 0,1,2,3$, − функції типу пограншару в околі $\varphi=\varphi^*$ (поправки на виході фільтраційної течії із заданого пласта G_z); $\Gamma_i(\mu,\psi,t)$, $i = 0,1,2,3$, − функції типу пограншару в околі $\varphi = \varphi_*$ (поправки на вході L_* в G_z); R_2^1, R_2^2 − залишкові члени; $\xi = (\varphi^* - \varphi)\,\varepsilon^{-1}$, $\eta = (\varphi^* - \varphi)\varepsilon^{-1/2}$, $\mu = (\varphi - \varphi_*)\varepsilon^{-1/2}$ − відповідні регулятивні перетворення (змінні розтягів).

Підставивши (8), (9) у (5), (6) і виконавши стандартну процедуру прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε, отримаємо такі задачі для знаходження $c_i(\varphi,\psi,t)$, $u_i(\varphi,\psi,t)$, $i = 0,1$:

$$u_{0t}(\varphi, \psi, t) + a_2(\varphi, \psi)\, u_0(\varphi, \psi, t) = 0\,,$$

$$u_0(\varphi, \psi, 0) = u_0^0(\varphi, \psi)\,; \tag{10}$$

$$c_{0t}(\varphi, \psi, t) + v^2(\varphi, \psi)\, c_{0\varphi}(\varphi, \psi, t) = g_1(\varphi, \psi, t)\,,$$

$$c_0(\varphi, \psi, 0) = c_0^0(\varphi, \psi), \qquad c_0(\varphi_*, \psi, t) = c_*(\psi, t)\,; \tag{11}$$

$$u_{1t}(\varphi, \psi, t) + a_2(\varphi, \psi)\, u_1(\varphi, \psi, t) = g_2(\varphi, \psi, t)\,,$$

$$u_1(\varphi, \psi, 0) = 0\,; \tag{12}$$

$$c_{1t}(\varphi, \psi, t) + v^2(\varphi, \psi)\, c_{1\varphi}(\varphi, \psi, t) = g_3(\varphi, \psi, t)\,,$$

$$c_1(\varphi, \psi, 0) = 0, \qquad c_1(\varphi_*, \psi, t) = 0\,, \tag{13}$$

де

$$g_1(\varphi, \psi, t) = a_2(\varphi, \psi)\, u_0(\varphi, \psi, t)\,,$$

$$g_2(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi)\big[\, k_3\big(c_{0\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + c_{0\psi\psi}(\varphi, \psi, t)\big) +$$
$$+ k_4\big(u_{0\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + u_{0\psi\psi}(\varphi, \psi, t)\big)\big] + k^* a_1(\varphi, \psi)\, c_0(\varphi, \psi, t)\,,$$

$$g_3(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi)\big[\, k_1\big(c_{0\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) + c_{0\psi\psi}(\varphi, \psi, t)\big) + k_2\big(u_{0\varphi\varphi}(\varphi, \psi, t) +$$
$$+ u_{0\psi\psi}(\varphi, \psi, t)\big)\big] - k^* a_1(\varphi, \psi)\, c_0(\varphi, \psi, t) + a_2(\varphi, \psi)\, u_1(\varphi, \psi, t)\,.$$

Послідовно розв'язуючи [2, 3] ці задачі, отримаємо

$$u_0(\varphi, \psi, t) = u_0^0(\varphi, \psi) \exp\left(- a_2(\varphi, \psi) \cdot t\right),$$

$$c_0(\varphi, \psi, t) =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde\varphi, \psi)\, g_1\big(\tilde\varphi, \psi, f(\tilde\varphi, \psi) + t - f(\varphi, \psi)\big)\, d\tilde\varphi + c_*\big(\psi, t - f(\varphi, \psi)\big), & t \ge f(\varphi, \psi), \\ \displaystyle\int_0^t g_1(f^{-1}(\tilde t + f(\varphi, \psi) - t), \psi, \tilde t\big)\, d\tilde t + c_0^0\big(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t), \psi\big), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$u_1(\varphi, \psi, t) = \exp\left(-a_2(\varphi, \psi) \cdot t\right) \int_0^t g_2(\varphi, \psi, t) \exp\left(a_2(\varphi, \psi) \cdot t\right) d\tilde t\,,$$

$$c_1(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde\varphi, \psi)\, g_3\big(\tilde\varphi, \psi, f(\tilde\varphi, \psi) + t - f(\varphi, \psi)\big)\, d\tilde\varphi, & t \ge f(\varphi, \psi), \\ \displaystyle\int_0^t g_3\big(f^{-1}(\tilde t + f(\varphi, \psi) - t), \psi, \tilde t\big)\, d\tilde t, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

де $f(\varphi, \tilde\psi) = \int\limits_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(s, \tilde\psi)\, ds$ – час проходження виділеної частинки вздовж лінії течії $\psi = \tilde\psi$ від точки $(\varphi_*, \tilde\psi)$ до точки $(\varphi, \tilde\psi)$; f^{-1} – функція, обернена до функції f стосовно змінної φ (зазначимо, що така функція існує, оскільки підінтегральна функція v^{-2} – неперервно диференційовна, обмежена, додатно визначена).

Функції $\Pi = \sum_{i=0}^{2} \Pi_i \varepsilon^i$, $P = \sum_{i=0}^{3} P_i \varepsilon^{i/2}$, $\Gamma = \sum_{i=0}^{3} \Gamma_i \varepsilon^{i/2}$ введено для усунення нев'язок, внесених побудованими регулярними частинами $c = \sum_{i=0}^{1} c_i \varepsilon^i$, $u = \sum_{i=0}^{1} u_i \varepsilon^i$ в околах ділянок $\varphi = \varphi^*$, $\varphi = \varphi_*$ (виходу та входу фільтраційної течії). Тобто повинні виконуватись такі умови: $(c + \Pi)\big|_{\varphi=\varphi^*} = c^* + O(\varepsilon^2)$, $(u + P)\big|_{\varphi=\varphi^*} = u^* + O(\varepsilon^2)$, $(u + \Gamma)\big|_{\varphi=\varphi_*} = u_* + O(\varepsilon^2)$.

Для визначення цих функцій маємо задачі [1]:

$$k_1 \Pi_{i\xi\xi} + \Pi_{i\xi} = d_i(\xi, \psi, t),$$

$$\Pi_i \underset{\xi\to\infty}{\to} 0, \qquad \Pi_i(0, \psi, t) = p_i(\psi, t), \qquad i = 0,1,2;$$

$$P_{it} - k_4 v^2(\varphi^*, \psi) P_{i\eta\eta} + a_2(\varphi^*, \psi) P_i = \alpha_i(\eta, \psi, t)$$

$$P_i \underset{\eta\to\infty}{\to} 0, \qquad P_i(0, \psi, t) = \gamma_i(\psi, t), \qquad i = 0,1,2,3;$$

$$\Gamma_{it} - k_4 v^2(\varphi_*, \psi) \Gamma_{i\mu\mu} + a_2(\varphi_*, \psi) \Gamma_i = \beta_i(\mu, \psi, t),$$

$$\Gamma_i \underset{\mu\to\infty}{\to} 0, \qquad \Gamma_i(0, \psi, t) = \rho_i(\psi, t), \qquad i = 0,1,2,3,$$

де

$$d_0(\xi, \psi, t) = 0, \quad \alpha_0(\eta, \psi, t) = 0, \quad \beta_0(\mu, \psi, t) = 0,$$

$$p_0(\psi, t) = c^*(\psi, t) - c_0(\varphi^*, \psi, t), \quad \gamma_0(\psi, t) = u^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t),$$

$$\rho_0(\psi, t) = u_*(\psi, t) - u_0(\varphi_*, \psi, t), \quad p_1(\psi, t) = -c_1(\varphi^*, \psi, t),$$

$$\gamma_1(\psi, t) = -u_1(\varphi^*, \psi, t), \quad \rho_1(\psi, t) = -u_1(\varphi_*, \psi, t), \quad p_2(\psi, t) = 0,$$

$$\gamma_2(\psi, t) = 0, \quad \rho_2(\psi, t) = 0, \quad \gamma_3(\psi, t) = 0, \quad \rho_3(\psi, t) = 0,$$

$$d_1(\xi, \psi, t) = v^{-2}(\varphi^*, \psi)\left[\Pi_{0t}(\xi, \psi, t) - a_2(\varphi^*, \psi)\left(\Gamma(\varphi^*, \psi, t) + P(\varphi^*, \psi, t)\right)\right],$$

$$\begin{aligned} d_2(\xi, \psi, t) = {} & v^{-2}(\varphi^*, \psi)\Big[\Pi_{1t}(\xi, \psi, t) + 2v(\varphi^*, \psi)\, v_\xi(\varphi^*, \psi)\, \xi\, d_1(\xi, \psi, t) - \\ & - k_1 v^2(\varphi^*, \psi)\Pi_{0\psi\psi}(\xi, \psi, t) - k_2\big[\Gamma_{\varphi\varphi}(\varphi^*, \psi, t) + P_{\varphi\varphi}(\varphi^*, \psi, t) + \\ & + \Gamma_{\psi\psi}(\varphi^*, \psi, t) + P_{\psi\psi}(\varphi^*, \psi, t)\big] + k^* a_1(\varphi^*, \psi)\Pi_0(\xi, \psi, t) + a_{2\xi}(\varphi^*, \psi) \times \\ & \times \xi\big[P(\varphi^*, \psi, t) + \Gamma(\varphi^*, \psi, t)\big] - a_2(\varphi^*, \psi)\big[P_\xi(\varphi^*, \psi, t)\xi + \Gamma_\xi(\varphi^*, \psi, t)\xi\big]\Big], \end{aligned}$$

$$\alpha_1(\eta, \psi, t) = a_{2\eta}(\varphi^*, \psi)\eta P_0 - 2k_4 v(\varphi^*, \psi)\, v_\eta(\varphi^*, \psi)\, \eta\, P_{0\eta\eta}(\eta, \psi, t),$$

$$\begin{aligned} \alpha_2(\eta, \psi, t) = {} & v^2(\varphi^*, \psi)\big[k_3(\Pi_{0\varphi\varphi} + \Pi_{0\psi\psi}) + k_4 P_{0\psi\psi}\big] + k_4\big[v(\varphi^*, \psi) v_{\eta\eta}(\varphi^*, \psi) + \\ & + v_\eta^2(\varphi^*, \psi))\big]\eta^2 P_{0\eta\eta} - 2k_4 v(\varphi^*, \psi) v_\eta(\varphi^*, \psi)\eta P_{1\eta\eta} + \\ & + k^* a_1(\varphi^*, \psi)\Pi_0 + a_{2\eta}(\varphi^*, \psi)\eta P_1 - 2^{-1} a_{2\eta\eta}(\varphi^*, \psi)\eta^2 P_0, \end{aligned}$$

$$\alpha_3(\eta,\psi,t) = k_4\eta^2 P_{1\eta\eta}\big[-2v(\varphi^*,\psi)v_\eta(\varphi^*,\psi)\mu\, P_{2\eta\eta} + v(\varphi^*,\psi)v_{\eta\eta}(\varphi^*,\psi) +$$

$$+ v_\mu'^2(\varphi^*,\psi)\big] - 6^{-1}(v_{\eta\eta\eta}v + 3v_{\eta\eta}v_\eta)\eta^3 P_{0\eta\eta} + k_4 v^2(\varphi^*,\psi)P_{1\psi\psi} -$$

$$- 2k_4 v(\varphi^*,\psi)v_\eta(\varphi^*,\psi)\eta P_{0\psi\psi} - a_{2\eta}(\varphi^*,\psi)\eta P_2 - 2^{-1}a_{2\eta\eta}(\varphi^*,\psi)\eta^2 P_1 -$$

$$- 6^{-1}a_{2\eta\eta\eta}(\varphi^*,\psi)\eta^3 P_0 - k_3 v^2(\varphi^*,\psi)\,\eta\left(\Pi_{0\varphi\varphi_\eta} + \Pi_{0\psi\psi_\eta}\right) - 2k_3 v(\varphi^*,\psi)\times$$

$$\times v_\eta(\varphi^*,\psi)\eta\left(\Pi_{0\varphi\varphi} + \Pi_{0\psi\psi}\right) - k^*\eta\big[a_1(\varphi^*,\psi)\Pi_{0\eta} - a_{1\eta}(\varphi^*,\psi)\Pi_0\big],$$

$$\beta_1(\mu,\psi,t) = a_{2\mu}(\varphi_*,\psi)\mu\Gamma_0 + 2k_4 v(\varphi_*,\psi)\,v_\mu(\varphi_*,\psi)\,\mu\,\Gamma_{0\mu\mu}(\mu,\psi,t)\,,$$

$$\beta_2(\mu,\psi,t) = k_4 v^2(\varphi_*,\psi)\Gamma_{0\psi\psi} + k_4\big[v(\varphi_*,\psi)v_{\mu\mu}(\varphi_*,\psi) + v_\mu^2(\varphi_*,\psi)\big]\mu^2\Gamma_{0\mu\mu} +$$

$$+ 2k_4 v(\varphi_*,\psi)v_\mu(\varphi_*,\psi)\mu\Gamma_{1\mu\mu} - a_{2\mu}(\varphi_*,\psi)\mu\Gamma_1 - 2^{-1}a_{2\mu\mu}(\varphi_*,\psi)\mu^2\Gamma_0\,,$$

$$\beta_3(\mu,\psi,t) = k_4\big[2v(\varphi_*,\psi)v_\mu(\varphi_*,\psi)\mu\Gamma_{2\mu\mu} + \big(v(\varphi_*,\psi)v_{\mu\mu}(\varphi_*,\psi) +$$

$$+ v_\mu'^2(\varphi_*,\psi)\big)\mu^2\Gamma_{1\mu\mu}\big] + 6^{-1}(v_{\mu\mu\mu}v + 3v_{\mu\mu}v_\mu)\mu^3\Gamma_{0\mu\mu} + v^2(\varphi_*,\psi)\Gamma_{1\psi\psi} +$$

$$+ 2v(\varphi_*,\psi)v_\mu(\varphi_*,\psi)\,\mu\Gamma_{0\psi\psi} - a_{2\mu}(\varphi_*,\psi)\,\mu\Gamma_2 - 2^{-1}a_{2\mu\mu}(\varphi_*,\psi)\,\mu^2\Gamma_1 -$$

$$- 6^{-1}a_{2\mu\mu\mu}(\varphi_*,\psi)\mu^3\Gamma_0\,.$$

Розв'язки останніх задач як задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку та параболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами (з параметром ψ) отримуємо в явному вигляді (див. [2]).

Для оцінки залишкових членів маємо таку задачу:

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\Big[\,k_1\big[R^1_{2\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t) + R^1_{2\psi\psi}(\varphi,\psi,t)\big] + k_2\big[R^2_{2\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t) +$$

$$+ R^2_{2\psi\psi}(\varphi,\psi,t)\big]\Big] - v^2(\varphi,\psi)R^1_{2\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t) - \varepsilon\, k^* a_1(\varphi,\psi)\,R^1_2(\varphi,\psi,t) +$$

$$+ a_2(\varphi,\psi)\,R^2_2(\varphi,\psi,t) = R^1_{2t}(\varphi,\psi,t) - \varepsilon^2\, b_1(\varphi,\psi,t,\varepsilon)\,,$$

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\Big[k_3\big[R^1_{2\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t) + R^1_{2\psi\psi}(\varphi,\psi,t)\big] + k_4\big[R^2_{2\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t) +$$

$$+ R^2_{2\psi\psi}(\varphi,\psi,t)\big]\Big] + \varepsilon\, k^* a_1(\varphi,\psi)\,R^1_2(\varphi,\psi,t) - a_2(\varphi,\psi)\,R^2_2(\varphi,\psi,t) =$$

$$= R^2_{2t}(x,y,t) - \varepsilon^2\, b_2(\varphi,\psi,t,\varepsilon)\,, \qquad (14)$$

де

$$b_1(\varphi,\psi,t,\varepsilon) = \Pi_{2t} - k_1 v^2(c_{1\varphi\varphi} + c_{1\psi\psi}) - k_2 v^2(u_{1\varphi\varphi} + u_{1\psi\psi}) + k^* K_1 c_1 -$$

$$- k_1 v^2(\varphi^*,\psi)\Pi_{1\psi\psi} - \varepsilon k_1 v^2\Pi_{2\psi\psi} + 2vv'_\xi\xi k_1\big(\Pi_{0\psi\psi} + \Pi_{2\xi\xi} + \varepsilon^2\Pi_{2\psi\psi} +$$

$$+ \varepsilon\Pi_{1\psi\psi}\big) + 2vv'_\xi\xi\Pi_{2\xi} - \xi^2(v''v + v'^2)(\Pi_{1\xi} + \varepsilon\Pi_{2\xi}) - K'_{1\xi}v'_\xi\xi k^*\big(\Pi_0 +$$

$$+ \varepsilon\Pi_1\big) + v^2\xi k_2\big(P_{\varphi\varphi_\xi}(\varphi^*,\psi,t) + P_{\psi\psi_\xi}\big) + 2vv'\xi k_2\big(P_{\varphi\varphi} - \varepsilon\xi P_{\varphi\varphi_\xi} + P_{\psi\psi} -$$

$$- \varepsilon\xi P_{\psi\psi_\xi}\big) - K'_{2\xi}\xi^2 P'_\xi(\varphi^*,\psi,t) + v^2\xi k_2\big(\Gamma_{\varphi\varphi_\xi}(\varphi^*,\psi,t) + \Gamma_{\psi\psi_\xi}\big) +$$

$$+ 2vv'\xi k_2\big(\Gamma_{\varphi\varphi} - \varepsilon\xi\Gamma_{\varphi\varphi_\xi} + \Gamma_{\psi\psi} - \varepsilon\xi\Gamma_{\psi\psi_\xi}\big) - K'_{2\xi}\xi^2\Gamma'_\xi\,,$$

$$b_2(\varphi,\psi,t,\varepsilon) = -\eta^3 6^{-1}(v'''v + 3v''v')\big[\sqrt{\varepsilon}k_3(\Pi_{\varphi\varphi} + \Pi_{\psi\psi}) + k_4(\sqrt{\varepsilon}P_{\psi\psi} + P_{\eta\eta} +$$

$$+ \sqrt{\varepsilon}P_{2\eta\eta} + \varepsilon P_{3\eta\eta})\big] + \eta^2(v''v + v'^2)[k_3(\Pi_{\varphi\varphi} + \Pi_{\psi\psi}) + k_4(P_{\psi\psi} + P_{2\eta\eta} +$$

$$+ \sqrt{\varepsilon}P_{3\eta\eta})] - 2vv'\eta\big[k_3(\sqrt{\varepsilon}(\Pi_{1\varphi\varphi} + \Pi_{1\psi\psi}) + \varepsilon^{3/2}(\Pi_{2\varphi\varphi} + \Pi_{2\psi\psi})) +$$

$$+ k_4(P_{3\eta\eta} + P_{1\psi\psi} + \sqrt{\varepsilon}P_{2\psi\psi} + \varepsilon P_{3\psi\psi})\big] + v^2\big[k_3(\Pi_{1\varphi\varphi} + \Pi_{1\psi\psi}) + \varepsilon(\Pi_{2\varphi\varphi} +$$

$$+ \Pi_{2\psi\psi}) + k_4(P_{2\psi\psi} + \sqrt{\varepsilon}P_{3\psi\psi})\big] - k^*\eta^3 K'''_{1\eta\eta\eta}\sqrt{\varepsilon}\Pi + k^*\eta^2 K''_{1\eta\eta}\Pi -$$

$$- k^*\eta K'_{1\eta}(\sqrt{\varepsilon}\Pi_1 + \varepsilon^{3/2}\Pi_2) + k^* K_1(\Pi_1 + \varepsilon\Pi_2)) + \eta^3 K'''_{2\eta\eta\eta}(P_1 + \sqrt{\varepsilon}P_2 +$$

$$+ \varepsilon P_3) - \eta^2 K''_{2\eta\eta}(P_2 + \sqrt{\varepsilon}P_3) + \eta K'_{2\eta}P_3 + 6^{-1}k_4\mu^3(v'''v + 3v''v')(\sqrt{\varepsilon}\Gamma_{\psi\psi} +$$

$$+ \Gamma_{\mu\mu} + \sqrt{\varepsilon}\Gamma_{2\mu\mu} + \varepsilon\Gamma_{3\mu\mu}) + k_4\mu^2(v''v + v'^2)(\Gamma_{\psi\psi} + \Gamma_{2\mu\mu} + \sqrt{\varepsilon}\Gamma_{3\mu\mu}) +$$

$$+ 2vv'\mu k_4(\Gamma_{3\mu\mu} + \Gamma_{1\psi\psi} + \sqrt{\varepsilon}\Gamma_{2\psi\psi} + \varepsilon\Gamma_{3\psi\psi}) + v^2 k_4(\Gamma_{2\psi\psi} + \sqrt{\varepsilon}\Gamma_{3\psi\psi}) +$$

$$+ \mu^3 K'''_{2\mu\mu\mu}(\Gamma_1 + \sqrt{\varepsilon}\Gamma_2 + \varepsilon\Gamma_3) - \mu^2 K''_{2\mu\mu}(\Gamma_2 + \sqrt{\varepsilon}\Gamma_3) + \mu K'_{2\mu}\Gamma_3,$$

$$R_2^i(\varphi_*,\psi,t,\varepsilon) = R_2^i(\varphi^*,\psi,t,\varepsilon) = R_2^i(\varphi,Q,t,\varepsilon) = R_2^i(\varphi,0,t,\varepsilon) = R_2^i(\varphi,\psi,0,\varepsilon) = 0.$$

Аналогічно, як в [1, 3], вимагаючи достатньої гладкості коефіцієнтів системи рівнянь (1), (2) та початкових і граничних умов (існування неперервних частинних похідних до четвертого порядку включно), а також узгодженості останніх уздовж ребер $L^* \times 0$, $L_* \times 0$ паралелепіпеда $\bar{G}_T = \bar{G}_z \times [0,T]$, де $[0,T]$ − фіксований проміжок часу (необхідних, у першу чергу, для забезпечення гладкості «двоповерхових компонент» c_i, $i = 1,2$, розв'язку поставленої задачі вздовж реберних характеристик $t = f(\varphi,\psi)$), на основі принципу максимуму стосовно (14) отримуємо таке твердження:

$$R_2^i(\varphi,\psi,t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \qquad i = 1,2, \qquad (\varphi,\psi,t) \in \bar{G}_T.$$

Висновки та зауваження. Запропонований спосіб розв'язання сформульованої задачі конвективної гетеродифузії за допомогою переходу від криволінійної фізичної області G_z до відповідної області комплексного потенціалу G_ω дозволив спростити рівняння і звести задачу до канонічної області. Конструкція ж розв'язку (8), (9) дозволяє при його знаходженні автономно доповнювати (збурювати) основну його частину (c_0, u_0) відповідними дифузійними поправками (c_1, u_1) та поправками Π, P, Γ в околах ділянок входу та виходу фільтраційної течії. Це дає змогу виконувати обчислення в діалоговому режимі (тобто проводити наближені обчислення лише в окремих ділянках вихідної області).

Якщо початкова та граничні умови недостатньо узгоджені або недостатньо гладкі, то тут можливою є процедура згладження розв'язків вироджених задач уздовж характеристик, що виходять із кутових (реберних) точок області $G_\omega \times (0,\infty)$ [2], або побудова кутових функцій [5].

Перспективою є проведення числових експериментів за заданими алгоритмами, поширення запропонованої методики на відповідні нелінійні задачі [3], задачі для тризв'язних областей, відповідні задачі з пастками.

1. *Бомба А. Я.* Асимптотический метод решения одной пространственной задачи массопереноса // Некоторые модели движения сплошной среды и их приложения. – Москва: Наука, 1988. – С. 115–120.
2. *Бомба А. Я.* Об асимптотическом методе приближенного решения одной задачи массопереноса при фильтрации в пористой среде // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 4. – С. 493–496.
3. *Бомба А. Я.* Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків сингулярно-збурених нелінійних крайових задач типу «фільтрація-дифузія» за умов взаємовпливу градієнтів потенціалу та коефіцієнта фільтрації // Волин. мат. вісн. – 2002. – Вип. 9. – С. 12–21.
4. *Бомба А. Я., Пригорницький Д. О.* Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення в двозв'язних областях // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2001. – Вип. 3. – С. 188–195.
5. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – Москва: Наука, 1973. – 273 с.
6. *Вишик М. И., Люстерник Л. Я.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. – 1957. – **12**, № 5. – С. 3–122.
7. *Власюк А. П.* Некоторые задачи фильтрации и массопереноса растворимых веществ в неоднородных анизотропных пористых средах: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. – Киев, 1986. – 166 с.
8. *Лаврик В. И., Бомба А. Я., Власюк А. П.* Об асимптотическом приближении решений некоторых задач массопереноса при фильтрации в неоднородной анизотропной среде. – Киев, 1985. – 17 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 85.72.)
9. *Лаврик В. И., Никифорович Н. А.* Исследования конвективного массопереноса при двумерной фильтрации подземных вод в условиях наличия массообмена. – Киев, 1982. – 46 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 82.20.)
10. *Никифорович Н. А.* Исследование процессов массопереноса в случае нелинейной ионнообменной сорбции методом сращиваемых асимптотических разложений. – Киев, 1985. – С. 118–128. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 85.5.)
11. *Присяжнюк І. М.* Асимптотичний метод розв'язування сингулярно збурених крайових задач типу «конвекція-дифузія» у многозв'язних областях // Волин. мат. вісн. – 2003. – Вип. 10. – С. 118–128.
12. *Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю.* Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 128 с.
13. *Aronson D. G.* Linear parabolic equations containing a small parameter // J. Rat. Mech. Anal. – 1956. – No. 5. – P. 1003–1014.
14. *Bobisud L. E.* Parabolic equations wits a small paramer and discontinuons data // J. Math. Anal. and Appl. – 1969. – **26**, No. 1. – P. 208–220.
15. *Burak Ya., Chaplia Ye., Chernukha O.* Problems of mechanothermodiffusive processes modeling and optimization in manyphases continuum systems // II Szkola Geomechaniki (Międz. Konf.). – Gliwice: Politechnika Śląska, 1995. – P. 343–351.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНОЙ ГЕТЕРОДИФФУЗИИ

Построен алгоритм асимптотического приближения решений сингулярно возмущенных краевых задач конвективной гетеродиффузии для двусвязных криволинейных областей, ограниченных эквипотенциальными линиями.

ASYMPTOTIC APPROXIMATION OF SOLUTIONS TO SINGULARLY PERTURBED BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF CONVECTIVE HETERODIFFUSION

The algorithm for asymptotic approximation of solutions to the singularly perturbed boundary-value problems of convective heterodiffusion for two-coherent curvilinear domains, bounded by the equipotential lines, is constructed.

Рівн. держ. гуманіт. ун-т, Рівне

Одержано
16.11.04