УДК 517.5

Е. Ю. Леончик, Н. А. Малаксиано

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ РАВНОИЗМЕРИМЫХ ПЕРЕСТАНОВОК ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ A_∞

В одномерном случае получены точные оценки равноизмеримых перестановок функций из классов A_∞.

1. Введение. В теории весовых пространств и теории квазиконформных отображений важную роль играют классы функций Макенхаупта A_∞. Имеется несколько различных эквивалентных определений классов A_∞ (см., например, [3]). Следующие два определения встречаются наиболее часто.

Определение 1. Пусть $0 < s < 1$ и $K \ge 1$. Говорят, что неотрицательная функция f принадлежит классу Макенхаупта $A^1_\infty(s,K) \equiv A^1_\infty(s,K;I_0)$ на интервале I_0, если для любого интервала $I \subset I_0$ и любого измеримого множества $E \subset I$

$$\frac{\int_E f(x)\,dx}{\int_I f(x)\,dx} \le K\left(\frac{|E|}{|I|}\right)^s .$$

Определение 2. Пусть $r > 1$ и $0 < M \le 1$. Говорят, что неотрицательная функция f принадлежит классу Макенхаупта $A^2_\infty(r,M) \equiv A^2_\infty(r,M;I_0)$ на интервале I_0, если для любого интервала $I \subset I_0$ и любого измеримого множества $E \subset I$

$$\frac{\int_E f(x)\,dx}{\int_I f(x)\,dx} \le M\left(\frac{|E|}{|I|}\right)^r .$$

Эти определения являются эквивалентными в том смысле, что

$$\bigcup_{0<s<1,\ K\ge 1} A^1_\infty(s,K) = \bigcup_{r>1,\ 0<M\le 1} A^2_\infty(r,M) \equiv A_\infty .$$

Принято обозначать

$$\|f\|_{A^1_\infty(s;I_0)} = \sup_{I\subset I_0, E\subset I} \frac{\int_E f(x)\,dx}{\int_I f(x)\,dx}\cdot\left(\frac{|I|}{|E|}\right)^s ,$$

$$\|f\|_{A^2_\infty(r;I_0)} = \inf_{I\subset I_0, E\subset I} \frac{\int_E f(x)\,dx}{\int_I f(x)\,dx}\cdot\left(\frac{|I|}{|E|}\right)^r ,$$

где точные верхняя и нижняя грани берутся по всевозможным интервалам $I \subset I_0$ и всевозможным измеримым подмножествам $E \subset I$.

Невозрастающей перестановкой измеримой функции f на множестве E называется функция

$$f^*(t) = \sup_{\substack{e\subset E\\ |e|\ge t}} \inf_{x\in e} f(x), \qquad 0 < t < |E| .$$

Определенная таким образом функция f^* не возрастает на $(0,|E|)$, непрерывна слева и равноизмерима с f на E.

ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2005. – 48, № 3. – С. 49-53.

Для изучения свойств некоторых классов функций важную роль играют точные оценки перестановок функций из этих классов [1, 2]. Главной целью данной статьи является доказательство точных неравенств для перестановок, которые представлены в следующих двух теоремах.

Теорема 1. *Для любого числа* $s \in (0, 1)$ *и любой функции* f

$$\left\| f^* \right\|_{A^1_\infty(s;(0,b-a))} \le \| f \|_{A^1_\infty(s;(a,b))}.$$

Теорема 2. *Для любого числа* $r > 1$ *и любой функции* f

$$\left\| f^* \right\|_{A^2_\infty(r;(0,b-a))} \le \| f \|_{A^2_\infty(r;(a,b))}.$$

2. Вспомогательные результаты. Для суммируемой на множестве E функции f обозначим

$$f_E = \frac{1}{|E|} \int\limits_E f(x)\,dx .$$

Доказательство теоремы 1 основано на применении следующей леммы о покрытии.

Лемма 1 [1]. *Пусть функция* f *суммируема на* (a,b) *и число* $A \ge$ $\ge f_{(a,b)}$. *Тогда существует последовательность попарно непересекающихся интервалов* $I_i \subset (a,b)$ *таких, что* $f_{I_i} = A$, $i = 1,2,\ldots$, *и* $A \ge f(x)$ *почти всюду на* $(a,b) \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i \right)$.

Если в условии этой леммы знаки «$\ge$» поменять на «$\le$», то также получится верное утверждение, полезное для доказательства теоремы 2. Аналогом леммы 1 в многомерном случае является лемма о покрытии Кальдерона – Зигмунда, в которой равенство $f_{I_i} = A$ гарантировать нельзя. Из-за этого использованные в данной статье методы не позволяют получить точный аналог теорем 1 и 2 в многомерном случае.

Далее нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 2. *Пусть* $E = \bigcup\limits_{k \ge 1} E_k$, $|E_k| \ne 0$, $|E| < \infty$ *и* $\left|E_k \cap E_m\right| = 0$ *при* $k \ne m$. *Тогда, если* $f_E = f_{E_k}$ *для любого* $k = 1,2,\ldots$, *то для любого* $s \in (0,1)$ *верно*

$$\sup_{e \subset E} \left[\frac{\int_e f(x)\,dx}{\int_E f(x)\,dx} \cdot \frac{|E|^s}{|e|^s} \right] \le \sup_{k \ge 1} \sup_{e \subset E_k} \left[\frac{\int_e f(x)\,dx}{\int_{E_k} f(x)\,dx} \cdot \frac{|E_k|^s}{|e|^s} \right].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя неравенство Гельдера, получаем

$$\sup_{e \subset E} \left[\int\limits_e f(x)\,dx \cdot \frac{|E|^{s-1}}{|e|^s} \right] =$$

$$= \sup_{e \subset E} \left[\frac{|E|^{s-1}}{|e|^s} \cdot \sum_{k \ge 1} \left(\int\limits_{e \cap E_k} f(x)\,dx \cdot \frac{|E_k|^{s-1}}{|e \cap E_k|^s} \cdot \frac{|e \cap E_k|^s}{|E_k|^{s-1}} \right) \right] \le$$

$$\le \sup_{e \subset E} \left[\frac{|E|^{s-1}}{|e|^s} \cdot \sup_{k \ge 1} \left(\int\limits_{e \cap E_k} f(x)\,dx \cdot \frac{|E_k|^{s-1}}{|e \cap E_k|^s} \right) \cdot \sum_{k \ge 1} \frac{|e \cap E_k|^s}{|E_k|^{s-1}} \right] \le$$

$$\le \sup_{k \ge 1} \sup_{e \subset E_k} \left[\int\limits_e f(x)\,dx \cdot \frac{|E_k|^{s-1}}{|e|^s} \right],$$

что и требовалось доказать. ◊

Лемма 3. *Пусть* f *не возрастает на* (a,b) *и* $s \in (0,1)$. *Тогда для любого интервала* $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$ *такого, что* $f_{(\alpha,\beta)} = f_{(a,b)}$, *верно*

$$\sup_{\alpha<t<\beta}\left(\frac{\int_\alpha^t f(x)\,dx}{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx} \cdot \left(\frac{\beta-\alpha}{t-\alpha}\right)^s \right) \le \sup_{a<t<b}\left(\frac{\int_a^t f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} \cdot \left(\frac{b-a}{t-a}\right)^s \right). \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $g(x) = f\left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{b-a}(x-a)\right)$ при $x \in (a,b)$. Тогда неравенство (1) равносильно

$$\sup_{a<t<b}\left(\frac{\int_a^t g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \cdot \left(\frac{b-a}{t-a}\right)^s \right) \le \sup_{a<t<b}\left(\frac{\int_a^t f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} \cdot \left(\frac{b-a}{t-a}\right)^s \right).$$

Обозначим

$$F(t) = \int_a^t g(x)\,dx - \int_a^t f(x)\,dx.$$

Имеем $F(a) = F(b) = 0$ и $F'(t) = f\left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{b-a}(t-a)\right) - f(t)$ почти везде на (a,b).

Из монотонности f следует, что $F'(t) \le 0$ почти везде (a,t_0) и $F'(t) \ge 0$ почти везде на (t_0,b), где $t_0 = (a\beta - \alpha b)/(a - b + \beta - \alpha)$. Поэтому $F(t) \le 0$ на (a,b). Следовательно,

$$\frac{\int_a^t g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \cdot \left(\frac{b-a}{t-a}\right)^s \le \frac{\int_a^t f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} \cdot \left(\frac{b-a}{t-a}\right)^s$$

для любого $t \in (a,b)$. Лемма доказана. ◊

Лемма 4. *Пусть функция* f *не возрастает на* (a,b). *Тогда*

$$\|f\|_{A^1_\infty(s;(a,b))} = \max\{S_1, S_2\},$$

где

$$S_1 = \sup_{a\le t<x\le b} \frac{\int_a^t f(\tau)\,d\tau}{\int_a^x f(\tau)\,d\tau} \cdot \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^s, \quad S_2 = \sup_{a\le x<t\le b} \frac{\int_x^t f(\tau)\,d\tau}{\int_x^b f(\tau)\,d\tau} \cdot \left(\frac{b-x}{t-x}\right)^s.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем интервал $J = (a,b)$. Если $f_J \ge f_{(a,b)}$, то выберем интервал $I \equiv (a,x) \supset J$ такой, что $f_I = f_J$. В противном случае найдется интервал $I \equiv (x,b) \supset J$, для которого $f_I = f_J$. Применяя к функции f и интервалам I и J лемму 3, получим утверждение леммы. ◊

3. Доказательство теоремы 1. Приведем доказательство только теоремы 1, поскольку теорема 2 может быть доказана аналогично.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. В силу леммы 4 достаточно показать, что

$$\|f\|_{A^1_\infty(s;(a,b))} \ge \sup_{0\le t<\beta\le b-a}\left(\frac{\int_0^t f^*(x)dx}{\int_0^\beta f^*(x)dx} \cdot \left(\frac{\beta}{t}\right)^s \right) \tag{2}$$

и

$$\|f\|_{A^1_\infty(s;(a,b))} \ge \sup_{0\le\beta<t\le b-a}\left(\frac{\int_\beta^t f^*(x)\,dx}{\int_\beta^{b-a} f^*(x)\,dx} \cdot \left(\frac{b-a-\beta}{t-\beta}\right)^s \right). \tag{3}$$

Докажем (2). Зафиксируем произвольное $\beta \in (0, b-a)$. Обозначим $A = f^*_{(0,\beta)}$. Так как $A \geq f_{(a,b)}$, то, пользуясь леммой 1, построим последовательность попарно непересекающихся интервалов $I_k \subset (a,b)$ таких, что $f_{I_k} = A$ для всех натуральных k, и $f(x) \leq A$ почти всюду на $(a,b) \setminus \left(\bigcup_{k\geq 1} I_k \right)$. Обозначим $E = \bigcup_{k \geq 1} I_k$. Из неравенства

$$\frac{1}{\beta}\int_0^\beta f^*(\tau)\,d\tau = A = \frac{1}{|E|}\int_E f(x)\,dx \leq \frac{1}{|E|}\int_0^{|E|} f^*(\tau)\,d\tau$$

и монотонности f^* следует, что $\alpha \equiv |E| \leq \beta$.

Обозначим $\varphi(t) = (f \mid [a,b])^*(t)$ на $(0,\beta)$ и $\psi(t) = (f \mid E)^*(t)$ на $(0,\alpha)$, где $f \mid E$ обозначает сужение функции f на множестве E. На отрезке $[0,\beta]$ рассмотрим функцию

$$F(t) = \int_0^t \left(\psi\left(\frac{\alpha}{\beta}\tau\right) - \varphi(\tau) \right) d\tau .$$

Докажем, что $F(t) \geq 0$ для любого $t \in (0,\beta)$. Предположим противное. Пусть существует такое $t_1 \in (0,\beta)$, что $F(t_1) < 0$. Обозначим $\gamma = \sup\{t : \varphi(t) > A\}$ и обозначим

$$S = \int_0^\gamma (\varphi(\tau) - A)\,d\tau .$$

Так как $\varphi(t) = \psi(t)$ на $(0,\gamma)$, то $F\left(\frac{\beta}{\alpha}\gamma\right) \geq S \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)$. Заметим, что $F(0) = F(b) = 0$ и функция $F(t)$ не убывает на $(0,\gamma)$. Поэтому, в силу нашего предположения, существует такое $t_0 \in (\gamma, \beta)$, что $\psi\left(\frac{\alpha}{\beta}t_0\right) \geq \varphi(t_0)$ и $F(t_0) < 0$. Обозначим

$$S_1 \equiv \int_\gamma^{t_0} (A - \varphi(\tau))\,d\tau < \int_\gamma^\beta (A - \varphi(\tau))\,d\tau = S .$$

Для любых $h_2 > h_1$ верно

$$\{x \in (a,b) : h_1 \leq f(x) \leq h_2\} \supset \{x \in E : h_1 \leq f(x) \leq h_2\} .$$

Следовательно, для любых $h_2 > h_1 \geq f^*(t_0)$ верно

$$\left|\{\tau \in (0,\beta) : h_1 \leq \varphi(\tau) \leq h_2\}\right| \geq \left|\{\tau \in (0,\alpha) : h_1 \leq \psi(\tau) \leq h_2\}\right|$$

и, очевидно,

$$\left|\left\{ \tau \in J : h_1 \leq \varphi\left(\frac{\alpha}{\beta}\left(\tau - t_0 + \frac{\beta}{\alpha}t_0\right)\right) \leq h_2 \right\}\right| \geq \left|\left\{ \tau \in I : h_1 \leq \psi\left(\frac{\alpha}{\beta}\tau\right) \leq h_2 \right\}\right|,$$

где $I = (0,\beta)$, $J = \left(t_0 - \frac{\beta}{\alpha}t_0, \frac{\beta^2}{\alpha} + t_0 - \frac{\beta}{\alpha}t_0 \right)$. Отсюда, так как

$$\psi\left(\frac{\alpha}{\beta}t_0\right) \geq \varphi(t_0) = \varphi\left(\frac{\alpha}{\beta}\left(t_0 - t_0 + \frac{\beta}{\alpha}t_0\right)\right),$$

то в силу невозрастания и непрерывности слева функций $\psi\left(\frac{\alpha}{\beta}t\right)$ и $\varphi\left(\frac{\alpha}{\beta}\left(t - t_0 + \frac{\beta}{\alpha}t_0\right)\right)$ следует, что

$$\psi\left(\frac{\alpha}{\beta}t\right) \ge \varphi\left(\frac{\alpha}{\beta}\left(t - t_0 + \frac{\beta}{\alpha}t_0\right)\right)$$

при $t \in (0, t_0)$. Поэтому

$$\int\limits_{\frac{\beta}{\alpha}\gamma}^{t_0}\left(\psi\left(\frac{\alpha}{\beta}\tau\right) - \varphi(\tau)\right)d\tau \ge \int\limits_{\frac{\beta}{\alpha}\gamma}^{t_0}\left(\varphi\left(\frac{\alpha}{\beta}\left(t - t_0 + \frac{\beta}{\alpha}t_0\right)\right) - \varphi(\tau)\right)d\tau \ge -S_1\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right).$$

Таким образом,

$$F(t_0) = F\left(\frac{\beta}{\alpha}\gamma\right) + \int\limits_{\frac{\beta}{\alpha}\gamma}^{t_0}\left(\psi\left(\frac{\alpha}{\beta}\tau\right) - \varphi(\tau)\right)d\tau \ge \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)(S - S_1) > 0\,.$$

Полученное противоречие показывает, что $F(t) \ge 0$ для любого $t \in [0, \beta]$, то есть

$$\int\limits_0^t \psi\left(\frac{\alpha}{\beta}\tau\right)d\tau \ge \int\limits_0^t \varphi(\tau)\,d\tau$$

для любого $t \in [0, \beta]$. Отсюда получаем

$$\sup_{e\subset E}\left[\frac{\int_e f(x)\,dx}{\int_E f(x)\,dx}\cdot\frac{|E|^s}{|e|^s}\right] = \sup_{t\in[0,\alpha]}\left[\frac{\int_0^t \psi(\tau)\,d\tau}{\int_0^\alpha \psi(\tau)\,d\tau}\cdot\frac{\alpha^s}{t^s}\right] =$$

$$= \sup_{t\in[0,\beta]}\left[\frac{\int_0^t \psi\left(\frac{\alpha}{\beta}\tau\right)d\tau}{\int_0^\beta \psi\left(\frac{\alpha}{\beta}\tau\right)d\tau}\cdot\frac{\beta^s}{t^s}\right] \ge \sup_{t\in[0,\beta]}\left[\frac{\int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau}{\int_0^\beta \varphi(\tau)\,d\tau}\cdot\frac{\beta^s}{t^s}\right].$$

А так как по лемме 2

$$\sup_{e\subset E}\left[\frac{\int_e f(x)\,dx}{\int_E f(x)\,dx}\cdot\frac{|E|^s}{|e|^s}\right] \le \sup_{k\ge1}\sup_{e\subset E_k}\left[\frac{\int_e f(x)\,dx}{\int_{I_k} f(x)\,dx}\cdot\frac{|I_k|^s}{|e|^s}\right],$$

то в силу произвольности выбора числа β получаем (2).

Неравенство (3) доказывается аналогично. Теорема доказана. ◊

Авторы глубоко благодарны А. А. Кореновскому за полезные советы и плодотворные обсуждения.

Работа частично поддержана ДФФД, грант Ф7/329-2001.

1. *Кореновский А. А.* О точном продолжении обратного неравенства Гельдера и условия Макенхаупта // Мат. заметки. – 1992. – **52**, № 6. – С. 32–44.
2. *Klemes I.* A mean oscillation inequality // Proc. Amer. Math. Soc. – 1985. – **93**, No. 3. – P. 497–500.
3. *Strömberg J.-O., Torchinsky A.* Weighted Hardy spaces // Lect. Notes in Math. – New York: Springer-Verlag, 1989. – **1381**. – 193 p.

ТОЧНІ НЕРІВНОСТІ ДЛЯ РІВНОВИМІРНИХ ПЕРЕСТАНОВОК ФУНКЦІЙ З КЛАСІВ A_∞

Для одновимірного випадку одержано точні оцінки рівновимірних перестановок функцій з класів A_∞.

EXACT INEQUALITIES FOR REARRANGEMENTS OF FUNCTIONS FROM A_∞ CLASS

The exact estimates for the rearrangements of functions from A_∞ *class are obtained in the one-dimensional case.*

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова, Одесса

Получено
21.10.04