УДК 517.946

І. Д. Пукальський

ЗАДАЧА ЗІ СКІСНОЮ ПОХІДНОЮ І ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ВИРОДЖЕННЯМ

У просторах класичних функцій зі степеневою вагою доведено коректну розв'язність задачі зі скісною похідною для лінійних параболічних рівнянь із довільним степеневим порядком виродження коефіцієнтів за часовою і просторовими змінними. Знайдено оцінку розв'язку задачі у відповідних просторах. Розглянуто задачу вибору оптимального керування системою, яка описується задачею зі скісною похідною з обмеженим керуванням. Функціонал якості визначається сумою об'ємного та поверхневого інтегралів.

Вивчення нелокальних за часовою змінною крайових задач для параболічних рівнянь другого порядку зі степеневими особливостями в коефіцієнтах рівняння проведено в [3, 4]. Дослідження класичних розв'язків крайових задач і їх поведінка за скінченний проміжок часу для параболічних рівнянь з обмеженими степеневими особливостями проведено в працях [2, 7, 8].

Ця стаття присвячена встановленню коректної розв'язності задач зі скісною похідною для параболічних рівнянь другого порядку зі степеневими особливостями за сукупністю змінних, а також обґрунтуванню необхідних і достатніх умов існування оптимального розв'язку системи, що описується задачею зі скісною похідною. Критерій якості задається сумою об'ємного та поверхневого інтеграла.

Постановка задачі зі скісною похідною та основний результат. Нехай Ω – деяка область в $\mathbb{R}^n$, $\dim\Omega \le n-1$; $\mathcal{D}$ – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\mathcal{D}$, $\dim\mathcal{D} = n$, $\Omega \in \mathcal{D}$. Розглянемо в області $Q = (0,T]\times\mathcal{D}$ для параболічного рівняння задачу знаходження функції u, яка задовольняє при $(t,x)\in Q^{(0)} = Q\setminus\{((t,x)\in Q \mid t = t^{(0)}, \quad x\in\mathcal{D})\cup((t,x)\in Q \mid t\in(0,T], \quad x\in\bar{\Omega})\}$ рівняння

$$(Lu)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^n A_i(t,x)\partial_{x_i} - A_0(t,x)\right]u(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

початкову умову

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{2}$$

а на бічній межі $\Gamma = (0,T]\times\partial\mathcal{D}$ крайову умову

$$(L_0u)(t,x)\big|_\Gamma \equiv \left[\sum_{k=1}^n b_k(t,x)\partial_{x_k}u + b_0(t,x)u\right]\Big|_\Gamma = g(t,x). \tag{3}$$

Нехай $\ell^{(1)}$, $\ell^{(2)}$ – довільні дійсні числа, $t^{(0)}\in(0,T)$, $\bar{\Omega} = \Omega\cup\partial\Omega$, $|x-\xi| = \inf\limits_{\xi\in\bar{\Omega}}\left[\sum_{i=1}^n (x_i-\xi_i)^2\right]^{1/2}$, $x\in\mathcal{D}\setminus\bar{\Omega}$, $\min\limits_{x\in\partial\mathcal{D}}|x-\xi| \ge e > 0$, $e = \text{const}$.

Особливості коефіцієнтів диференціального виразу L будуть характеризувати такі функції:

$$s_1(\ell^{(1)},t) = \begin{cases} \left|t-t^{(0)}\right|^{\ell^{(1)}}, & \left|t-t^{(0)}\right| \le 1, \\ 1, & \left|t-t^{(0)}\right| \ge 1, \end{cases} \qquad s_2(\ell^{(2)},x) = \begin{cases} |x-\xi|^{\ell^{(2)}}, & |x-\xi| \le 1, \\ 1, & |x-\xi| \ge 1. \end{cases}$$

Нехай $\bar{Q} = [0,T] \times \bar{\mathcal{D}}$, $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$, а $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)}, x^{(1)})$, $B_k(t^{(1)}, x^{(2)})$ і $P_k^{(2)}(t^{(2)}, x^{(2)})$, $k \in \{1, \dots, n\}$, – точки із Q; $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_{k-1}^{(1)}, x_k^{(2)}, x_{k+1}^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$. Позначимо через $\beta_k^{(\nu)}$, $\gamma^{(\nu)}$, $r_i^{(\nu)}$, $\delta^{(\nu)}$, α дійсні числа такі, що $\beta_k^{(\nu)} \in (-\infty, \infty)$, $\gamma^{(\nu)} \ge 0$, $r_i^{(\nu)} \ge 0$, $\delta^{(\nu)} \ge 0$, $\alpha \in (0,1)$, $\nu \in \{1,2\}$. Покладемо $s(\ell; P) = s_1(\ell^{(1)}, t) s_2(\ell^{(2)}, x)$.

Означимо функціональні простори, в яких досліджується задача.

$C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; q; Q)$ – простір функцій u, $(t,x) \in \bar{Q}$, які мають неперервні частинні похідні в області $Q^{(0)}$ вигляду $\partial_t^k \partial_x^j u$, $2k + |j| \le 2$, для яких є скінченною норма

$$\| u; \gamma, \beta; q; Q \|_{2+\alpha} = \sum_{j=0}^{2} \| u; \gamma, \beta; q; Q \|_j + [\![u; \gamma, \beta; q; Q]\!]_{2+\alpha},$$

де, наприклад,

$$[\![u; \gamma, \beta; q; Q]\!]_{2+\alpha} = \sum_{i,j,k=1}^{n} \Big\{ \sup_{\{P_1, B_k\} \subset \bar{Q}} \Big[s(q + (2+\alpha)\gamma - \beta_i - \beta_j - \alpha\beta_k; \tilde{P}_1) \times$$

$$\times \left| x_k^{(1)} - x_k^{(2)} \right|^{-\alpha} \left| \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(P_1) - \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(B_k) \right| \Big] +$$

$$+ \sup_{\{P_1, B_k\} \subset \bar{Q}} \Big[s(q + (2+\alpha)\gamma - \alpha\beta_k; \tilde{P}_1) \left| x_k^{(1)} - x_k^{(2)} \right|^{-\alpha} \times$$

$$\times \left| \partial_t u(P_1) - \partial_t u(B_k) \right| \Big] + \sup_{\{P_k^{(2)}, B_k\} \subset \bar{Q}} \Big[s(q + (2+\alpha)\gamma - \beta_i - \beta_j; \tilde{P}_2) \times$$

$$\times \left| t^{(1)} - t^{(2)} \right|^{-\frac{\alpha}{2}} \left| \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(P_k^{(2)}) - \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(B_k) \right| \Big] +$$

$$+ \sup_{\{P_k^{(2)}, B_k\} \subset \bar{Q}} \Big[s(q + (2+\alpha)\gamma; \tilde{P}_2) \left| t^{(1)} - t^{(2)} \right|^{-\frac{\alpha}{2}} \left| \partial_t u(P_k^{(2)}) - \partial_t u(B_k) \right| \Big] \Big\},$$

$$\| u; \gamma, \beta; 0; Q \|_0 = \sup_{P \in \bar{Q}} |u(P)| \equiv \| u; Q \|_0.$$

Тут позначено $s(q; \tilde{P}_1) = \min\left(s(q; P_1), s(q; B_k) \right)$, $s(q; \tilde{P}_2) = \min\left(s(q; P_k^{(2)}), s(q; B_k) \right)$.

$C^r(\mu_j; Q)$ – множина функцій v_j, $(t,x) \in \bar{Q}$, які мають частинні похідні в $Q^{(0)}$ вигляду $\partial_x^k v_j$, $|k| \le [r]$, для яких є скінченною норма

$$\left| v_j; \mu_j, Q \right|_r = \sum_{|k| \le [r]} \sup_{P \in \bar{Q}} \left[s(\mu_j + |k|; P) \left| \partial_x^k v_j(P) \right| \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \Big\{ \sum_{|k| = [r]} \Big[\sup_{\{P_1, B_i\} \subset \bar{Q}} s(\mu_j + |k|; \tilde{P}_1) s_2(\{r\}, \tilde{x}) \left| x_i^{(1)} - x_i^{(2)} \right|^{-\{r\}} \times$$

$$\times \left| \partial_x^k v_j(P_1) - \partial_x^k v_j(B_i) \right| + \sup_{\{B_i, P_i^{(2)}\} \subset \bar{Q}} s(\mu_j; \tilde{P}_2) s_1(\{r/2\}, \tilde{t}) \times$$

$$\times \left| t^{(1)} - t^{(2)} \right|^{-\{r/2\}} \left| v_j(B_i) - v_j(P_i^{(2)}) \right| + \sup_{\{B_i, P_i^{(2)}\} \subset \bar{Q}} s(\mu_j + |k|; \tilde{P}_2) \times$$

$$\times s_1(\{r/2\}, \tilde{t}) \left| t^{(1)} - t^{(2)} \right|^{-\{r/2\}} \left| \partial_x^k v_j(B_i) - \partial_x^k v_j(P_i^{(2)}) \right| \Big] \Big\},$$

де $[r]$ – ціла частина числа r; $\{r\} = r - [r]$; $s_1(q^{(1)}, \tilde{t}) = \min\left(s_1(q^{(1)}, t^{(1)}),\right.$ $\left.s_1(q^{(1)}, t^{(2)})\right)$, $s_2(q^{(2)}, \tilde{x}) = \min\left(s_2(q^{(2)}, x^{(1)}),\ s_2(q^{(2)}, x^{(2)})\right)$.

Нехай для задачі (1)–(3) виконуються такі умови.

1°. Коефіцієнти $A_i \in C^{\alpha}(\mu_i; Q)$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $A_0 \le K < +\infty$, $K = \mathrm{const}$, $A_{ij} \in C^{\alpha}(\beta_i + \beta_j; Q)$ і для довільного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ виконується нерівність

$$c_1 |\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} s(\beta_i + \beta_j; P)\, A_{ij}(P) \xi_i \xi_j \le c_2 |\xi|^2,$$

c_1, c_2 – фіксовані додатні сталі.

2°. Функції $f \in C^{\alpha}(\gamma, \beta; \mu_0; Q)$, $\varphi \in C^{2+\alpha}(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; \mathcal{D})$, $g \in C^{1+\alpha}(\Gamma)$,

$$\gamma^{(\nu)} = \max\left\{\max_i (1 + \beta_i^{(\nu)}),\ \ \max_i (\mu_i^{(\nu)} - \beta_i^{(\nu)}),\ \ \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2}\right\},\ \ \nu \in \{1, 2\},\ \ i \in \{1, \ldots, n\},$$

$\tilde{\gamma} = (0, \gamma^{(2)})$, $\tilde{\beta} = (0, \beta^{(2)})$.

3°. Межа $\partial\mathcal{D}$ належить до класу $C^{2+\alpha}$. Вектори $\mathbf{b} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ і $\mathbf{b}_s = \{s(\beta_1; P) b_1(P), \ldots, s(\beta_n; P) b_n(P)\}$ утворюють з напрямком внутрішньої нормалі $\mathbf{n}$ до Γ у точці $P \in \Gamma$ кут, менший ніж $\frac{\pi}{2}$, $b_0(t, x) \in C^{1+\alpha}(\Gamma)$, $b_0(t, x) < 0$, $b_k \in C^{1+\alpha}(\beta_k, Q)$, $(L_0 \varphi)(x)\big|_{\partial\mathcal{D}} = g(0, x)$.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1)–(3) *виконуються умови* **1°–3°**. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(3) *у просторі* $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ *і для нього справджується оцінка*

$$\| u; \gamma, \beta; 0; Q \|_{2+\alpha} \le c\left(\| f; \gamma, \beta; \mu_0; Q \|_{\alpha} + \left\| \varphi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; \mathcal{D} \right\|_{2+\alpha} + \| g \|_{C^{1+\alpha}(\Gamma)}\right). \quad (4)$$

Для доведення теореми 1 побудуємо послідовність розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами, граничним значенням якої буде розв'язок задачі (1)–(3).

Нехай $Q_m = Q \cap \{(t, x) \in Q \mid s_1(1, t) \ge m_1^{-1},\ s_2(1, x) \ge m_2^{-1}\}$ – послідовність областей, яка при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$ збігається до Q; $\mathcal{D}_m = \{x \in \mathcal{D} \mid s_2(1, x) \ge m_2^{-1}\}$; $\partial\mathcal{D}_m = \{x \in \mathcal{D} \mid s_2(1, x) = m_2^{-1}\}$; $\Gamma_m = \partial\mathcal{D}_m \times (0, T]$, де $m = (m_1, m_2)$, m_1, m_2 – натуральні числа, $m_1 > 1$, $m_2 > 1$.

Розглянемо в області Q крайову задачу

$$(L_1 u_m)(t, x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{n} a_i(t, x) \partial_{x_i} - a_0(t, x)\right] u_m(t, x) = f_m(t, x), \quad (5)$$

$$u_m\big|_{t=0} = \varphi_m(x), \quad (6)$$

$$(L_0 u_m)(t, x)\big|_{\Gamma} = g(t, x). \quad (7)$$

Коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0 та функції f_m, φ_m визначаються таким чином.

Якщо $(t, x) \in (0, T] \times \bar{\mathcal{D}}_m$ і $\beta_i^{(1)} + \beta_j^{(1)} \ge 0$, то $a_{ij}(t, x) = \min\left(A_{ij}(t, x),\right.$ $\left.A_{ij}(m_1^{-1}, x)\right)$, коли $t^{(0)} \in (0, m_1^{-1})$, і $a_{ij}(t, x) = \min\left(A_{ij}(t, x),\ \frac{m_1(t^{(0)} - t) + 1}{2} \times\right.$

$\times A_{ij}(t^{(0)} - m_1^{-1}, x) + \dfrac{m_1(t - t^{(0)}) + 1}{2} A_{ij}(t^{(0)} + m_1^{-1}, x)\Big)$, коли $t^{(0)} \ge m_1^{-1}$. У випадку $\beta_i^{(1)} + \beta_j^{(1)} < 0$ беремо $a_{ij}(t,x) = \max\left(A_{ij}(t,x),\ A_{ij}(m_1^{-1}, x)\right)$, коли $t^{(0)} \in (0, m_1^{-1}]$, і $a_{ij}(t,x) = \max\Big(A_{ij}(t,x),\ \dfrac{m_1(t^{(0)} - t) + 1}{2} A_{ij}(t^{(0)} - m_1^{-1}, x) +$ $+ \dfrac{m_1(t - t^{(0)}) + 1}{2} A_{ij}(t^{(0)} + m_1^{-1}, x)\Big)$, коли $t^{(0)} > m_1^{-1}$.

Коефіцієнти $a_i(t,x) = \min\left(A_i(t,x),\ A_i(m_1^{-1}, x)\right)$, коли $t^{(0)} \in (0, m_1^{-1}]$, і $a_i(t,x) = \min\Big(A_i(t,x),\ \dfrac{m_1(t^{(0)} - t) + 1}{2} A_i(t^{(0)} - m_1^{-1}, x) + \dfrac{m_1(t - t^{(0)}) + 1}{2} A_i(t^{(0)} +$ $+ m_1^{-1}, x)\Big)$, коли $t^{(0)} \ge m_1^{-1}$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Функції $f_m(t,x) = \min\left(f(t,x),\ f(m_1^{-1}, x)\right)$ при $t^{(0)} \in (0, m_1^{-1}]$ і $f_m(t,x) =$ $= \min\Big(f(t,\ x),\ \ \dfrac{m_1(t^{(0)} - t) + 1}{2} f(t^{(0)} - m_1^{-1},\ x) + \dfrac{m_1(t - t^{(0)}) + 1}{2} f(t^{(0)} + m_1^{-1},\ x)\Big)$ при $t^{(0)} \ge m_1^{-1}$. Коли $x \in \mathcal{D}_m$, функції $\varphi_m(x) = \varphi(x)$.

Для $(t,x) \in Q \backslash \{(0,T) \times \mathcal{D}_m\}$ коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0 і функції f_m є розв'язками внутрішньої задачі

$$\partial_t u = \Delta u, \qquad u(0,x) = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma_m} = \psi(t,x),$$

де, наприклад, для a_i беремо $\psi = a_i\big|_{\Gamma_m}$; $\mathbf{n}$ – нормаль до Γ_m.

Для $x \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_m$ функція φ_m є розв'язком внутрішньої задачі Діріхле

$$\Delta v = 0, \qquad v\big|_{\partial\mathcal{D}_m} = \varphi\big|_{\partial\mathcal{D}_m}. \tag{8}$$

У задачі (5)–(7) зробимо заміну

$$u_m(t,x) = v_m(t,x) e^{\lambda t}, \qquad \lambda > K.$$

Одержимо

$$(L_2 v_m)(t,x) \overset{\text{def}}{=} ((L_1 + \lambda) v_m)(t,x) = f_m(t,x) e^{-\lambda t}, \tag{9}$$

$$v_m(0,x) = \varphi_m(x), \tag{10}$$

$$(L_0 v_m)(t,x)\big|_\Gamma = g(t,x) e^{-\lambda t}. \tag{11}$$

Теорема 2. *Нехай* v_m *– класичний розв'язок задачі* (9)–(11) *в області* Q *і виконуються умови* **1°–3°.** *Тоді для* v_m *справджується оцінка*

$$|v_m| \le \max\left\{ \| \varphi_m; \mathcal{D} \|_0,\ \| f_m (\lambda - a_0)^{-1}; Q \|_0,\ \| g e^{-\lambda t} b_0^{-1}; \Gamma \|_0 \right\}. \tag{12}$$

Д о в е д е н н я. Можливі три випадки: або розв'язок v_m недодатний в $\bar{Q}$, або найбільше додатне значення v_m досягається у точці $P_1 \in \Gamma_T = \Gamma \bigcup \mathcal{D}$, або це найбільше значення досягається у точці $P_2 \in Q$.

У першому випадку $\max\limits_{\bar{Q}} v_m(t,x) \le 0$, у другому – $0 < \max\limits_{\bar{Q}} v_m = v_m(P_1)$. Якщо $P_1 \in \mathcal{D}$, то $v_m(P_1) \le \max\limits_{\bar{\mathcal{D}}} \varphi_m$. Якщо $P_1 \in \Gamma$, то в точці P_1 маємо

$\sum_{k=1}^{n} b_k(P_1)\partial_{x_k} v_m(P_1) \le 0$ (вектор $\mathbf{b}$ утворює з внутрішньою нормаллю до Γ у цій точці кут, менший ніж $\frac{\pi}{2}$), тому з урахуванням крайової умови (11) $v_m(P_1) \le (ge^{-\lambda t} b_0^{-1})\big|_{P_1}$.

У третьому випадку $\max_{\bar{Q}} v_m(t,x) = v_m(P_2)$, причому в точці P_2 виконуються рівняння (9), а також співвідношення

$$\partial_t v_m \ge 0, \qquad \partial_{x_i} v_m = 0, \qquad -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j} v_m(P_2) \ge 0. \tag{13}$$

Нерівність (13) справджується, оскільки другі похідні $\partial_{y_k}\partial_{y_k} v_m$ за будь-яким напрямком

$$y_k = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{k\ell} s(\beta_\ell; P_2)(x_\ell - x_\ell^{(2)}), \qquad \det\|\alpha_{kl}\| \ne 0,$$

недодатні, а вираз

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j} v_m = \sum_{k,\ell=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} s(\beta_i + \beta_j; P_2) a_{ij}(P_2)\alpha_{ki}\alpha_{\ell j}\right)\partial_{y_k}\partial_{y_l} v_m =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \partial_{y_k}\partial_{y_k} v_m < 0.$$

Оскільки характеристичні числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ квадратичної форми за умовою **1°** є додатними, то, враховуючи (13) і рівняння (9) у точці P_2, одержуємо нерівність

$$v_m(P_2) \le (f_m e^{-\lambda t}(\lambda - a_0)^{-1})\big|_{P_2}.$$

Аналогічно, розглядаючи точку найменшого недодатного значення функції v_m, маємо

$$v_m \ge \min\left\{0, \ \min_{\bar{\mathcal{D}}} \varphi_m, \ \min_{\bar{Q}} (f_m e^{0-\lambda t}(\lambda - a_0)^{-1}), \ \min_{\Gamma} (ge^{-\lambda t} b_0^{-1})\right\}.$$

Отже, для розв'язку задачі (9)–(11) виконується нерівність (12). ◊

Введемо в просторі $C^{2+\alpha}(Q)$ норму $\|v_m; \gamma, \beta; q; Q\|_{2+\alpha}$, еквівалентну при кожному фіксованому m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і $\|u; \gamma, \beta; q; Q\|_{2+\alpha}$, тільки замість функцій $s_1(q^{(1)}, t)$, $s_2(q^{(2)}, x)$ беремо відповідно $d_1(q^{(1)}, t)$, $d_2(q^{(2)}, x)$, де $d_1(q^{(1)}, t) = \max(s_1(q^{(1)}, t), \ m_1^{-q^{(1)}})$, коли $q^{(1)} \ge 0$, і $d_1(q^{(1)}, t) = \min(s_1(q^{(1)}, t), \ m_1^{-q^{(1)}})$, коли $q^{(1)} < 0$; $d_2(q^{(2)}, x) = \max(s_2(q^{(2)}, x), \ m_2^{-q^{(2)}})$, коли $q^{(2)} \ge 0$, і $d_2(q^{(2)}, x) = \min(s_2(q^{(2)}, x), \ m_2^{-q^{(2)}})$, коли $q^{(2)} < 0$.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови* **1°–3°**, *то для розв'язку задачі* (9)–(11) *справджується оцінка*

$$\|v_m; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} \le c(\|f_m; \gamma, \beta; 2\gamma; Q\|_\alpha +$$

$$+ \|\varphi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; \mathcal{D}\|_{2+\alpha} + \|g\|_{C^{1+\alpha}(\Gamma)} + \|v_m; Q\|_0). \tag{14}$$

Стала c *не залежить від* m.

Д о в е д е н н я. Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності із [6, с. 176], маємо

$$\| v_m;\gamma,\beta;0;Q \|_{2+\alpha} \le (1+\varepsilon^\alpha)[\![v_m;\gamma,\beta;0;\mathcal{D}]\!]_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\| v_m;Q \|_0 .$$

Тому досить оцінити півнорму $[\![v_m;\gamma,\beta;0;\mathcal{D}]\!]_{2+\alpha}$.

Із означення норм випливає існування в Q точок P_1, B_k і $P_k^{(2)}$, для яких справджується одна з нерівностей:

$$\frac{1}{2}[\![v_m;\gamma,\beta;0;Q]\!]_{2+\alpha} \le E_k, \qquad k\in\{1,2,3,4\}, \tag{15}$$

$$E_1 \equiv \sum_{i,j,k=1}^{n} d(2\gamma-\beta_i-\beta_j+\alpha(\gamma-\beta_k);\tilde P_1)\left|x_k^{(1)}-x_k^{(2)}\right|^{-\alpha}\times$$
$$\times\left|\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_m(P_1)-\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_m(B_k)\right|,$$

$$E_2 \equiv \sum_{i,j,k=1}^{n} d(2\gamma-\beta_i-\beta_j+\alpha\gamma;\tilde P_2)\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\alpha/2}\times$$
$$\times\left|\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_m(B_k)-\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_m(P_k^{(2)})\right|,$$

$$E_3 \equiv \sum_{k=1}^{n} d(2\gamma+\alpha(\gamma-\beta_k);\tilde P_1)\left|x_k^{(1)}-x_k^{(2)}\right|^{-\alpha}\left|\partial_t v_m(P_1)-\partial_t v_m(B_k)\right|,$$

$$E_4 \equiv \sum_{k=1}^{n} d((2+\alpha)\gamma;\tilde P_2)\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\alpha/2}\left|\partial_t v_m(B_k)-\partial_t v_m(P_k^{(2)})\right|.$$

Нехай $\left|x_j^{(1)}-x_j^{(2)}\right| \le n^{-1}d(\gamma-\beta_k;\tilde P)\frac{\rho}{4}\equiv T_2$ або $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|\le d(2\gamma;\tilde P)\frac{\rho^2}{16}\equiv T_1$, $d(q;\tilde P)=\min\left(d(q,\tilde P_1),\ d(q;\tilde P_2)\right)$; ρ – довільна стала, $\rho\in(0,1)$. Нехай $\left|x_n^{(1)}-\xi_n\right|\ge 2T_2$, $\xi\in\partial\mathcal{D}$, або $\left|x^{(1)}-\xi\right|\ge 2T_2 n$. Запишемо задачу (9)–(11) у вигляді

$$(L_3 v_m)(t,x)\equiv\left[\partial_t-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(P_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\right]v_m =$$
$$=\Bigg[\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(t,x)-a_{ij}(P_1))\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_m+\sum_{i=1}^{n}a_i(t,x)\partial_{x_i}v_m+$$
$$+(a_0(t,x)+\lambda)v_m\Bigg]+f_m(t,x)e^{-\lambda t}\equiv F(t,x),$$

$$v_m(0,x)=\varphi_m(x),$$

$$\sum_{k=1}^{n}b_k(P_1)\partial_{x_k}v_m\Big|_\Gamma=\Bigg[\sum_{k=1}^{n}(b_k(P_1)-b_k(t,x))\partial_{x_k}v_m+$$
$$+b_k(t,x)v_m+g(t,x)e^{-\lambda t}\Bigg]\Bigg|_\Gamma\equiv\psi_2(t,x). \tag{16}$$

Нехай $V_1\in Q$, V_1 – куб з центром у точці P_1; $V_r=\{(t,x)\in Q \mid \left|t-t^{(1)}\right|\le 16r^2T_1,\ t\ge 0,\ \left|x_i^{(1)}-x_i\right|\le 4rT_2,\ i\in\{1,\dots,n\}\}$.

У задачі (16) зробимо заміну $v_m(t,x)=\omega_m(t,y)$, $y_i=d(\beta_i;P_1)x_i$, $i\in\{1,\dots,n\}$. Область визначення $\omega_m(t,y)$ позначимо через Q_0. Тоді функція $W_m(t,y)=\omega_m(t,y)\eta(t,y)$ задовольняє таку крайову задачу:

$$\left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} d(\beta_i + \beta_j; P_1) a_{ij}(P_1) \partial_{y_i} \partial_{y_j}\right] W_m =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} d(\beta_i + \beta_j; P_1) a_{ij}(P_1) \left[\partial_{y_i} \omega_m \partial_{y_j} \eta + \partial_{y_j} \omega_m \partial_{y_i} \eta\right] +$$

$$+ \omega_m \left[\sum_{i,j=1}^{n} d(\beta_i + \beta_j; P_1) a_{ij}(P_1) \partial_{y_i} \partial_{y_j} \eta - \partial_t \eta\right] + F(t, Y)\eta \equiv F_1(t, y), \qquad (17)$$

$$W_m(0, y) = \varphi_m(Y)\eta(0, y) = \Phi_1(y),$$

$$W_m\big|_\Gamma = 0, \qquad (18)$$

де

$$0 \le \eta(t, y) \le 1, \qquad \left|\partial_t^j \partial_y^k \eta(t, y)\right| \le c_{kj} d^{-1}((2j + k)\gamma; P_1),$$

$$\eta(t, y) = \begin{cases} 1, & (t, y) \in H_{1/4}, \\ 0, & (t, y) \notin H_{3/4}, \end{cases}$$

$$H_r = \left\{(t, y), \left|t - t^{(1)}\right| \le rT_1, \ \left|y_i - y_i^{(1)}\right| \le r d(\gamma, P_1) \frac{\rho}{4} n^{-1}, \ y_i^{(1)} = d(\beta_i, P_1) x_i^{(1)}\right\},$$

$$Y = (d^{-1}(\beta_1, P_1) x_1, \dots, d^{-1}(\beta_n, P_1) x_n).$$

Коефіцієнти рівняння (17) обмежені сталими, що не залежать від P_1. Тому на підставі теореми 5.2 з [1, с. 364] для довільних точок $M_1(\tau^{(1)}, \xi^{(1)}) \in H_{1/4}$ і $M_2(\tau^{(2)}, \xi^{(2)}) \in H_{1/4}$ справджується нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1, M_2) \left|\partial_\tau^j \partial_\xi^k \omega_m(M_1) - \partial_\tau^j \partial_\xi^k \omega_m(M_2)\right| \le$$

$$\le c\left(\| F_1 \|_{C^\alpha(H_{1/4})} + \| \Phi_1 \|_{C^{2+\alpha}(H_{1/4} \cap \{t=0\})}\right),$$

де $d(M_1, M_2)$ − параболічна відстань між точками M_1, M_2; $2j + |k| = 2$.

Використовуючи властивості функції $\eta(t, y)$ та означення простору $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$, знаходимо

$$E_k \le c\Big(\left\| v_m; \gamma, \beta; 0; V_{3/4} \right\|_2 + \left\| F; \gamma, \beta; 2\gamma; V_{3/4} \right\|_\alpha +$$

$$+ \left\| \varphi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; \mathcal{D} \right\|_{2+\alpha} + \left\| v_m; V_{3/4} \right\|_0\Big). \qquad (19)$$

Оцінимо норму $\left\| F; \gamma, \beta; 2\gamma; V_{3/4} \right\|_\alpha$. Враховуючи інтерполяційні нерівності, досить оцінити півнорму кожного доданка виразу $F(t, x)$.

Наприклад,

$$[\![(a_{ij}(t, x) - a_{ij}(P_1)) \partial_{x_i} \partial_{x_j} v_m; \gamma, \beta; 2\gamma; V_{3/4}]\!]_\alpha \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \sup_{\{A_1, B_k, A_k^{(2)}\} \subset V_{3/4}} \Big[d((2\gamma - \beta_i - \beta_j); \tilde{P}) \left|\partial_{\xi_i} \partial_{\xi_j} v_m(A_1)\right| \times$$

$$\times \Big\{ \left|\tau^{(1)} - \tau^{(2)}\right|^{-\alpha/2} d(\beta_i + \beta_j + \alpha\gamma; \tilde{A}) \left|a_{ij}(A_k^{(2)}) - a_{ij}(B_k)\right| +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{n} d(\beta_i + \beta_j + \alpha(\gamma - \beta_\ell); \tilde{A}) \left|\xi_\ell^{(1)} - \xi_\ell^{(2)}\right|^{-\alpha} \left|a_{ij}(A_1) - a_{ij}(B_\ell)\right| \Big\}\Big] +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sup_{\{A_1,B_k,A_k^{(2)}\}\subset V_{3/4}}\Big[\,d(\beta_i+\beta_j;\tilde{A})\left|a_{ij}(A_1)-a_{ij}(B_k)\right|\times$$

$$\times\Big\{\sum_{\ell=1}^{n}d(2\gamma-\beta_i-\beta_j+\alpha(\gamma-\beta_\ell);\tilde{A})\left|\xi_\ell^{(1)}-\xi_\ell^{(2)}\right|^{-\alpha}\times$$

$$\times\left|\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}v_m(A_1)-\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}v_m(B_\ell)\right|+d(2\gamma-\beta_i-\beta_j+\alpha\gamma;\tilde{A})\times$$

$$\times\left|\tau^{(1)}-\tau^{(2)}\right|^{-\alpha/2}\left|\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}v_m(B_\ell)-\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}v_m(A_\ell^{(2)})\right|\Big\}\Big]\le$$

$$\le c\rho^\alpha[\![\,v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}]\!]_{2+\alpha}+c_1\left\|\,v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}\right\|_2 .$$

Отже, для норми $\|\,F_1;\gamma,\beta;2\gamma;V_{3/4};\Omega\,\|_\alpha$ дістаємо оцінку

$$\|\,F_1;\gamma,\beta;2\gamma;V_{3/4};\Omega\,\|_\alpha\le c(\|\,F;\gamma,\beta;2\gamma;V_{3/4};\Omega\,\|_\alpha+\|\,v_m;V_{3/4}\,\|_0)+$$

$$+\varepsilon_1\left\|\,v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4};\Omega\right\|_{2+\alpha}, \tag{20}$$

де $\varepsilon_1=n^2\rho^\alpha+\varepsilon^\alpha$, $\varepsilon\in(0,1)$, $\rho\in(0,1)$, ρ, ε – довільні фіксовані числа.

Підставляючи (20) у (19), знаходимо

$$E_k\le c(\|\,f_m;\gamma,\beta;2\gamma;Q\,\|_\alpha+\left\|\,v_m;V_{3/4}\right\|_0+\left\|\,\varphi_m;\tilde{\gamma},\tilde{\beta};0;\mathcal{D}\right\|_{2+\alpha})+$$

$$+\varepsilon_1\|\,v_m;\gamma,\beta;0;Q\,\|_{2+\alpha},\qquad k\in\{1,\dots,4\}. \tag{21}$$

Розглянемо випадок $\left|x^{(1)}-\xi\right|\le 2T_2n$ і $\left|x_n^{(1)}-\xi_n\right|\le 2T_2$, $\xi\in\partial\mathcal{D}$. Нехай $K(r,P)$ – куля радіуса r, $r\ge 4T_2n$, з центром у деякій точці $P\in\Gamma$ і яка містить точки P_1, $P_k^{(2)}$, B_k. Використовуючи обмеження на гладкість межі $\partial\mathcal{D}$, можна розпрямити $\partial\mathcal{D}\cap K(r,P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x=\psi(y)$, в результаті якого область $\Pi\equiv 0\cap K(r,P)$ переходить в область Π_1, для точок якої $y_n\ge 0$, $t\ge 0$. Вважаємо, що P_1, $P_k^{(2)}$, B_k, E_ν, $d(\gamma,P_1)$, $x_m(t,x)$, T_1, T_2 переходять при цьому перетворенні відповідно в M_1, $M_k^{(2)}$, N_k, $E_\nu^{(1)}$, $d_1(\gamma,M_1)$, $\omega_m(t,y)$, $T_1^{(1)}$, $T_2^{(1)}$. Позначимо коефіцієнти диференціальних виразів L і B в області Π_1 через $k_{ij}(t,y)$, $k_i(t,y)$, $k_0(t,y)$, $h_k(t,y)$, $h_0(t,y)$. Тоді $\omega_m(t,y)$ буде розв'язком задачі

$$(L_2\omega_m)(t,y)=\Big[\partial_t-\sum_{i,j=1}^{n}k_{ij}(M_1)\partial_{y_i}\partial_{y_j}\Big]\omega_m(t,y)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\left[k_{ij}(t,y)-k_{ij}(M_1)\right]\partial_{y_i}\partial_{y_j}\omega_m+\sum_{i=1}^{n}k_i(t,y)\partial_{y_i}\omega_m+$$

$$+(k_0(t,y)+\lambda)\omega_m+f_m(t,\psi(y))e^{\lambda t}\equiv F_2(t,y), \tag{22}$$

$$\omega_m(0,y)\equiv\varphi(\psi(y))\equiv\varphi_1(y), \tag{23}$$

$$\sum_{k=1}^{m}h_k(M_1)\partial_{y_k}\omega_m\Big|_{y_n=0}=\Big(\sum_{i=1}^{n}\left[h_i(M_1)-h_i(t,y)\right]\partial_{y_i}\omega_m+$$

$$+h_0(t,y)\omega_m+g(t,\psi(y))e^{\lambda t}\Big)\Big|_{y_n=0}=G_2(t,y)\big|_{y_n=0}. \tag{24}$$

У задачі (22)–(24) зробимо заміну $\omega_m(t,y) = w_m(t,z)$, $z_i = d_1(\gamma; M_1)y_i$, $i \in \{1,\dots,n\}$. Тоді функція $V_m^{(1)}(t,z) = w_m(t,z)\eta_1(t,z)$ буде розв'язком крайової задачі

$$\left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} d_1(\beta_i + \beta_j; M_1)k_{ij}(M_1)\partial_{z_i}\partial_{z_j}\right] V_m^{(1)}(t,z) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} d_1(\beta_i + \beta_j; M_1)k_{ij}(M_1)\left[\partial_{z_i}\omega_m \partial_{z_j}\eta_1 + \partial_{z_i}\eta_1\partial_{z_j}\omega_m\right] +$$

$$+\omega_m\left[\sum_{i,j=1}^{n} d_1(\beta_i + \beta_j; M_1)k_{ij}(M_1)\partial_{z_i}\partial_{z_j}\eta_1 - \partial_t\eta_1\right] + F_1(t,Z)\eta_1 \equiv F_3(t,z),$$

$$V_m^{(1)}(0,z) = \varphi_1(Z)\eta_1(0,z) \equiv \varphi_2(z),$$

$$\sum_{k=1}^{n} h_k(M_1)d_1(\beta_k, M_1)\partial_{z_k}V_m^{(1)}\Big|_{\Gamma} =$$

$$= \left[G_2\eta_1 + \sum_{k=1}^{n} h_k(M_1)d_1(\beta_k, M_1)\partial_{z_k}\eta_1\right]\Bigg|_{z_n=0} \equiv G_3(t,z)\big|_{z_n=0}, \qquad (25)$$

де $Z = \left(d_1^{-1}(\beta_1, M_1)z_1, \dots, d_1^{-1}(\beta_n, M_1)z_n\right)$, функція $\eta_1(t,z)$ – тричі диференційовна та задовольняє умови

$$0 \le \eta_1(t,z) \le 1, \qquad \left|\partial_t^k \partial_z^j \eta_1(t,z)\right| \le c_{kj} d_1^{-1}\left((2k + |j|)\gamma, M_1\right),$$

$$\eta_1(t,z) = \begin{cases} 1, & (t,z) \in N_{1/2}, \\ 0, & (t,z) \notin N_{3/4}, \end{cases}$$

$$N_r = \left\{(t,z) \in \Pi_2 \mid \left|t - t^{(1)}\right| \le r^2\rho^2 d_1(2\gamma, M_1),\ \left|z_i - z_i^{(1)}\right| \le r\rho d_1(\gamma, M_1),\right.$$

$$\left. i \in \{1,\dots,n\},\ z_n \ge 0\right\}.$$

Коефіцієнти рівняння і крайової умови задачі (25) обмежені сталими, незалежними від точки M_1. Тому, використовуючи теорему 6.1 із [1, с. 368], для довільних точок $R_1 \in N_{1/4}^{(1)}$ і $R_2 \in N_{1/4}^{(1)}$ одержимо нерівність

$$d^{-\alpha}(R_1, R_2)\left|\partial_t^j\partial_z^k w_m(R_1) - \partial_t^j\partial_z^k w_m(R_2)\right| \le$$

$$\le c\left(\| F_3 \|_{C^{\alpha}(N_{3/4})} + \| \varphi_2 \|_{C^{2+\alpha}(N_{3/4}\cap\{t=0\})} + \| G_3 \|_{C^{1+\alpha}(N_{3/4}\cap\{z_n=0\})}\right), \quad (26)$$

для $2j + |k| = 2$.

Використовуючи властивості функції $\eta_1(t,z)$, знаходимо

$$E_k \le c\big(\| \omega_m; \gamma, \beta; 0; \Pi_1 \|_2 + \| F_2; \gamma, \beta; 2\gamma; \Pi_1 \|_\alpha + \| \varphi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; \mathcal{D} \|_{2+\alpha} +$$

$$+ \| G_2; \gamma, \beta; \gamma; \Pi_1 \cap \{z_n = 0\} \|_{1+\alpha} + \| \omega_m; \Pi_1 \|_0\big). \qquad (27)$$

Повторюючи міркування встановлення оцінки (21), знаходимо

$$E_k \le c\big(\| f_m; \gamma, \beta; 2\gamma; Q \|_\alpha + \| v_m; Q \|_0 + \| \varphi_m; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; \mathcal{D} \|_{2+\alpha} +$$

$$+ \| g \|_{C^{1+\alpha}(\Gamma)}\big) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)\| v_m; \gamma, \beta; 0; Q \|_{2+\alpha}, \quad \varepsilon_2 = n\rho^\alpha + \varepsilon^\alpha. \qquad (28)$$

Якщо $\left|t^{(1)} - t^{(2)}\right| \ge T_1$, то

$$E_k \le 2\rho^{\alpha} \| v_m; \gamma, \beta; 0; Q \|_{2+\alpha}, \qquad k \in \{2, 4\}. \tag{29}$$

У випадку $\left|x_k^{(1)} - x_k^{(1)}\right| \ge T_2$, маємо

$$E_k \le 2\rho^{\alpha} \| v_m; \gamma, \beta; 0; Q \|_{2+\alpha}, \qquad k \in \{1, 3\}. \tag{30}$$

Використовуючи нерівності (21), (28)–(30) і вибираючи ρ і ε досить малими, дістанемо нерівність (14). ◊

З урахуванням теорем 2 і 3 доведемо теорему 1. Оскільки

$$\| f_m; \gamma, \beta; 2\gamma; Q \|_{\alpha} \le c \| f; \gamma, \beta; \mu_0; Q \|_{\alpha},$$

$$\left\| \varphi_m; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; \mathcal{D} \right\|_{2+\alpha} \le c \left\| \varphi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; \mathcal{D} \right\|_{2+\alpha},$$

то, застосовуючи нерівність (12), маємо

$$\| v_m; \gamma, \beta; 0; Q \|_{2+\alpha} \le$$

$$\le c\left(\| f; \gamma, \beta; \mu_0; Q \|_{\alpha} + \left\| \varphi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; \mathcal{D} \right\|_{2+\alpha} + \| g \|_{C^{1+\alpha}(\Gamma)} \right). \tag{31}$$

Права частина нерівності (31) не залежить від m, і послідовності

$$\left\{V_m^{(0)}\right\} = \left\{\left|v_m(P)\right|\right\}, \qquad \left\{V_m^{(1)}\right\} = \left\{d(\gamma - \beta_i; P)\left|\partial_{x_i} v_m(P)\right|\right\},$$

$$\left\{V_m^{(2)}\right\} = \left\{d(2\gamma - \beta_i - \beta_j; P)\left|\partial_{x_i}\partial_{x_j} v_m(P)\right|\right\},$$

$$\left\{V_m^{(3)}\right\} = \left\{d(2\gamma; P)\left|\partial_t v_m(P)\right|\right\}, \qquad P \in Q,$$

рівномірно обмежені та рівностепенево неперервні. За теоремою Арцела існують підпослідовності $\left\{V_{m(r)}^{(k)}\right\}$, $k \in \{1, 2, 3\}$, рівномірно збіжні в Q. Переходячи до границі при $r \to \infty$ у задачі (5)–(7), одержимо, що $u = ve^{\lambda t}$ – єдиний розв'язок задачі (1)–(3), $u \in C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ і виконується оцінка (4). ◊

Задача оптимального керування. В області $Q = (0, T] \times \mathcal{D}$ розглянемо задачу знаходження функцій (u, p), на яких функціонал

$$I(p) = \int_0^T dt \int_{\partial\mathcal{D}} F_1(t, x, u, p)\, d_x S + \int_0^T dt \int_{\mathcal{D}} F_2(t, x, u)\, dx \tag{32}$$

досягає мінімуму в класі функцій $p \in V = \left\{p \in C^{1+\alpha}(\gamma) \mid \psi_1(x) \le p(x) \le \psi_2(x)\right\}$, із яких u є розв'язком крайової задачі

$$(Lu)(t, x) = f(t, x), \qquad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad (L_0 u)(t, x)\big|_{\Gamma} = g(t, x, p). \tag{33}$$

Будемо вважати виконаними такі умови:

4°. Функції $\psi_1 \in C^{1+\alpha}(\Gamma)$, $\psi_2 \in C^{1+\alpha}(\Gamma)$; $g(t, x, p)$, $F_1(t, x, u, p)$, $F_2(t, x, u)$ визначені відповідно в областях $M_1 = \Gamma \times [\psi_1, \psi_2]$, $M_2 = \Gamma \times \mathbb{R}^1 \times$ $\times [\psi_1, \psi_2]$, $M_3 = Q \times \mathbb{R}^1$, мають гельдерові похідні другого порядку за змінними u та p, які належать як функції від (t, x) до просторів $C^{1+\alpha}(\Gamma)$, $C(Q)$.

За обмежень **1°–4°** для будь-якого $p \in V$ існує єдиний розв'язок задачі (33) із простору $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ і для нього справджується оцінка (4).

Нехай $(G_m^{(1)}, G_m^{(2)})$ − функція Ґріна крайової задачі (9)−(11). Позначимо

$$\delta(t,x) \equiv \int_t^T d\tau \int_{\partial\mathcal{D}} G_m^{(2)}(\tau,\xi,t,x)\,\partial_u F_1(\tau,\xi,u_m,p)\,d_\xi S\,,$$

$$H(u_m,\delta,p) \equiv F_1(t,x,u_m,p) + \delta(x)g(x,p)\,.$$

Для встановлення існування розв'язку задачі (32), (33) потрібно встановити розв'язність допоміжних задач з гладкими коефіцієнтами.

Розглянемо в області Q задачу знаходження функцій (u_m,p), на яких функціонал

$$I(p) = \int_0^T dt \int_{\partial\mathcal{D}} F_1(t,x,u_m,p)\,d_x S + \int_0^T dt \int_{\mathcal{D}} F_2(t,x,u_m,p)\,dx \tag{34}$$

досягає мінімуму в класі функцій $p \in V$ і функція u_m є розв'язком крайової задачі

$$(L_1 u_m)(t,x) = f_m(t,x), \qquad u_m\big|_{t=0} = \varphi_m(x), \qquad (L_0 u_m)\big|_\Gamma = g(t,x,p)\,. \tag{35}$$

Справджуються такі теореми.

Теорема 4. *Якщо функція* $H(u_m,\delta,p)$ *за аргументом* p *монотонно зростає для* $p \in V$, *то оптимальним є керування* $p^{(0)} = \psi_1$, *а оптимальним розв'язком задачі* (35) *є* $u_m^{(0)}(t,x,p) = u_m^{(0)}(t,x,\psi_1)$.

Якщо функція $H_m(u_m,\delta,p)$ *за аргументом* p *є монотонно спадною для* $p \in V$, *то оптимальним є керування* $p^{(0)}(x) = \psi_2$, *а оптимальним розв'язком задачі* (34) *є* $u_m^{(0)}(t,x,p^{(0)}) = u_m^{(0)}(t,x,\psi_2)$.

Д о в е д е н н я проводиться за схемою доведення теореми 1 із [5].

Теореми 5. *Нехай* $H(u_m,\delta,p)$ − *немонотонна функція за аргументом* p. *Для того щоб керування* $p^{(0)}$ *і відповідний розв'язок* $u_m^{(0)}(t,x,p^{(0)})$ *крайової задачі* (35) *були оптимальними, необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови*:

(***i***) *функція* $H(u_m,\delta,p)$ *за аргументом* p *має в точці* $p = p^{(0)}$ *мінімальне значення*;

(***ii***) *для довільного вектора* $(\ell_1,\ell_2) \neq 0$ і $(t,x) \in Q$ *виконується умова*

$$\partial^2_{u_m} F_1(t,x,u_m^{(0)},p^{(0)})\ell_1^2 + 2\partial^2_{p,u_m} F_1(t,x,u_m^{(0)},p^{(0)})\ell_1\ell_2 -$$

$$-\,\delta(t,x)\partial_p^2 f(t,x,p^{(0)})\ell_2^2 > 0\,,$$

(***iii***) $\partial^2_{u_m} F_2(t,x,u_m^{(0)}) > 0$ *для* $(t,x) \in Q$.

Д о в е д е н н я теореми аналогічне до доведення теореми 2 з [5].

Зауваження стосовно визначення $u_m^{(0)}$ і $p^{(0)}$. Якщо $p^{(0)}$ − оптимальне, то $\partial_p H = 0$ і $\partial_p^2 H > 0$. Застосовуючи теорему про неявні функції до рівняння $\partial_p H(u_m,\delta,p^{(0)}) = 0$, одержимо, що $p^{(0)} = W(u_m^{(0)},\delta)$, де $W(u_m^{(0)},\delta)$ − диференційовна функція за змінними δ і $u_m^{(0)}$. Використовуючи функцію Ґріна крайової задачі (9)−(11), у відповідність задачі (34), (35) поставимо систему інтегральних рівнянь, розв'язок якої знаходимо методом послідовних наближень.

1. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
2. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
3. *Пукальський І. Д.* Нелокальна задача Неймана для параболічного рівняння з виродженням // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 9. – С. 1232–1244.
4. *Пукальський І. Д.* Одностороння нелокальна крайова задача для сингулярних параболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 11. – С. 1521–1531.
5. *Пукальський І. Д.* Функція Ґріна параболічної крайової задачі і задача оптимізації // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 4. – С. 567–571.
6. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – Москва: Наука, 1964. – 444 с.
7. *Ardent W., De Pagter B.* Spectrum and asymptotics of the Black-Scholes partial differential equation in (L^{-1}, L^{∞})-interpolation spaces // Pacif. J. Math. – 2002. – **202**, No. 1. – P. 1–36.
8. *Li Mei* Quenching for degenerate semilinear reaction diffusion equations // J. Nansing Univ. Math. (Nanjing daxue xuebaa Shxue banniankan). – 1999. – **16**, No. 2. – P. 282–292.

ЗАДАЧА С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

В пространствах классических функций со степенным весом доказана корректная разрешимость задачи с косой производной для линейных параболических уравнений с произвольным степенным порядком вырождения коэффициентов по временной и пространственным переменным. Найдены оценки решения задачи в соответствующих пространствах. Рассмотрена задача выбора оптимального управления системами, описываемыми задачей с косой производной с ограниченным управлением. Функционал качества определяется суммой объемного и поверхностного интегралов.

PROBLEM WITH DIRECTIONAL DERIVATIVE AND PROBLEM OF OPTIMUM CONTROL FOR LINEAR PARABOLIC EQUATION WITH DEGENERATION

The existence and uniqueness of the problem with directional derivative for linear parabolic equations with a free power order of degeneration of coefficients with respect to time and space variables has been proved in terms of spaces of classical functions with power order. The estimation of solution to the problem in the corresponding spaces has been found. The problem of choice of optimum control by systems, circumscribed by the problem with directional derivative with limited control is examined. The functional of quality is determined by the sum of volume and surface integrals.

Чернів. ун-т ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано
30.11.04