УДК 517.95

Н. І. Білусяк, Б. Й. Пташник

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СЛАБКО НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ НЕРОЗВ'ЯЗНОЮ ВІДНОСНО СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ ЛІНІЙНОЮ ЧАСТИНОЮ

Досліджено однозначну розв'язність крайової задачі з умовами типу умов Діріхле за змінною t і періодичними умовами за змінними $x_1, \ldots, x_p$ для слабко нелінійних диференціальних рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами в лінійній частині, яка є нерозв'язною відносно старшої похідної за часом.

Розв'язність задач з даними на всій границі області для гіперболічних і безтипних рівнянь із частинними похідними пов'язана, взагалі, з проблемою малих знаменників (див. [1, 2, 5–8, 10–14, 16] і бібліографію в [11]). У цій роботі, яка є розвитком праць [3–5], досліджено однозначну розв'язність задачі з даними на всій границі області для слабко нелінійних диференціальних рівнянь із нерозв'язною відносно старшої похідної за часом лінійною частиною у випадку, коли порядок оператора диференціювання за x при старшій похідній за часом є одним із найвищих.

В області $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{p+1} : 0 < t < T,\ x \in \Omega^p \subset \mathbb{R}^p\}$, де $\Omega^p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ – p-вимірний тор, розглядаємо задачу

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2n} L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) + \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2r} M_r\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) =$$

$$= f(t,x) + \varepsilon \Phi(t,x,u(t,x)), \qquad (1)$$

$$\left.\frac{\partial^{2q} u}{\partial t^{2q}}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^{2q} u}{\partial t^{2q}}\right|_{t=T} = 0, \qquad q = 0,1,\ldots,n-1, \qquad (2)$$

де $M_r\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|s| \le m} a_s^r \frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}}$, $r = 0,1,\ldots,n-1$; $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|s| \le 2\ell} b_s \frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}}$ – еліптичний диференціальний вираз; a_s^r, $b_s \in \mathbb{C}$; $2\ell \ge m$; $\varepsilon \in \mathbb{R}$; функція $\Phi(t,x,u)$ визначена та неперервна за змінною t і досить гладка за x, u в області

$$D_1 = \{(t,x,u) : (t,x) \in D,\ u \in \bar{S}(u^0, r)\},$$

де

$$\bar{S}(u^0, r) = \left\{u \in C^{(2n,2\ell)}(\bar{D}) : \| u - u^0 \|_{C^{(2n,2\ell)}(\bar{D})} \le r\right\},$$

$u^0 \equiv u^0(t,x)$ – розв'язок задачі (1), (2) при $\varepsilon = 0$. Вигляд області D накладає умови 2π-періодичності за змінними $x_1, \ldots, x_p$ на функції $u(t,x)$, $f(t,x)$, $\Phi(t,x,u)$.

Зауважимо, що задача з умовами (2) для лінійного рівняння вигляду (1) у випадку, коли $2\ell < m$, розглядалася в роботі [3], а для системи лінійних рівнянь вигляду (1) у загальному випадку – в роботі [4].

Розглянемо спочатку незбурену задачу (1), (2) (коли $\varepsilon = 0$). Шукатимемо її розв'язок у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k| \ge 0} u_k(t) \exp(ik, x). \qquad (3)$$

При цьому коефіцієнти $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є відповідно розв'язками таких задач:

$$L(ik)u_k^{(2n)}(t) + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{|s|\le m} a_s^r (ik_1)^{s_1} \dots (ik_p)^{s_p} u_k^{(2r)}(t) = f_k(t)\,, \tag{4}$$

$$u_k^{(2q)}(0) = u_k^{(2q)}(T) = 0, \qquad q = 0,1,\dots,n-1\,, \tag{5}$$

де

$$f_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^p} f(t,x) \exp(-ik,x)\,dx, \qquad k \in \mathbb{Z}^p\,.$$

Припустимо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$

$$L(ik) \equiv \sum_{|s|\le 2\ell} b_s (ik_1)^{s_1} \dots (ik_p)^{s_p} \ne 0\,. \tag{6}$$

Якщо $L(ik_0) = 0$ для деякого вектора $k_0 \in \mathbb{Z}^p$, то відповідна задача (4), (5) буде перевизначеною і для існування єдиного розв'язку цієї задачі треба накласти додаткові обмеження на коефіцієнти рівняння (1).

Згідно з лемою 1 із [10] існують сталі C_1 та $K \equiv K(C_1)$ такі, що

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p, \quad |k| \ge K, \qquad |L(ik)| \ge C_1 |k|^{2\ell}\,. \tag{7}$$

Зауважимо, що тут і надалі C_j, $j \in \mathbb{N}$, – додатні сталі, не залежні від k. Позначимо через $\lambda_1 \equiv \lambda_1(k),\dots,\lambda_n \equiv \lambda_n(k)$ корені рівняння

$$\lambda^n + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{|s|\le m} \frac{a_s^r (ik_1)^{s_1} \dots (ik_p)^{s_p}}{L(ik)} \lambda^r = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}^p\,, \tag{8}$$

і надалі вважатимемо, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ ці корені є різними та відмінними від нуля. Тоді корені характеристичного рівняння, яке відповідає рівнянню (4),

$$L(ik)\gamma^{2n} + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{|s|\le m} a_s^r (ik_1)^{s_1} \dots (ik_p)^{s_p} \gamma^{2r} = 0$$

мають вигляд

$$\gamma_j \equiv \gamma_j(k) = \sqrt{|\lambda_j(k)|} \exp(i(\arg \lambda_j(k))/2), \qquad j = 1,\dots,n\,,$$

$$\gamma_{n+j} \equiv \gamma_{n+j}(k) = -\sqrt{|\lambda_j(k)|} \exp(i(\arg \lambda_j(k))/2), \quad j = 1,\dots,n, \quad k \in \mathbb{Z}^p\,. \tag{9}$$

На підставі оцінок для коренів полінома [15, с. 102] і нерівностей (6), (7) одержуємо оцінки

$$|\gamma_j| \le C_2 (1+|k|)^{\mu/2}, \qquad \mu = (m-2\ell)/n, \qquad j = 1,\dots,2n, \qquad k \in \mathbb{Z}^p\,. \tag{10}$$

Фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння

$$L(ik)u_k^{(2n)}(t) + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{|s|\le m} a_s^r (ik_1)^{s_1} \dots (ik_p)^{s_p} u_k^{(2r)}(t) = 0 \tag{11}$$

зображується у вигляді

$$u_{kj}(t) = \exp(\gamma_j t), \qquad u_{k,n+j}(t) = \exp(-\gamma_j t), \qquad j = 1,\dots,n\,,$$

а характеристичний визначник $\Delta(k)$ задачі (4), (5) визначається формулою

$$\Delta(k) = 2^n \prod_{j=1}^{n} \operatorname{sh}(-\gamma_j T) \prod_{1\le r<s\le n} (\gamma_s^2 - \gamma_r^2)^2\,.$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *при* $\varepsilon = 0$ *у просторі* $C^{(2n,2\ell)}(\bar{D})$ *необхідно й достатньо, щоб виконувались умови*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \qquad 1 - \exp(2\gamma_j T) \neq 0, \qquad j = 1,\dots,n. \tag{12}$$

Д о в е д е н н я здійснюємо за схемою доведення теореми 2.4 із [11, розд. 1].

Нехай справджуються умови (12). Тоді для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ існує єдина функція Ґріна задачі (4), (5), за допомогою якої її розв'язок зображується у вигляді

$$u_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau. \tag{13}$$

У квадраті $K_T = \{(t,\tau) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le t, \tau \le T\}$, крім сторін $\tau = 0$ і $\tau = T$, функції $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, визначаються формулами

$$G_k(t,\tau) = \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\operatorname{sh}(\gamma_j(\tau - t))}{\gamma_j L(ik) \prod\limits_{r=1, r\neq j}^{n} (\gamma_r^2 - \gamma_j^2)} +$$

$$+ \sum_{s,j,r=1}^{n} \frac{(-1)^s S_{n-s}^{(j)} \gamma_r^{2s-3} (\operatorname{sh}(\gamma_j(t-T)) \operatorname{sh}(\gamma_r \tau) + \operatorname{sh}(\gamma_j t) \operatorname{sh}(\gamma_r (T-\tau)))}{L(ik) \prod\limits_{p=1, p\neq j}^{n} (\gamma_p^2 - \gamma_j^2) \prod\limits_{p=1, p\neq r}^{n} (\gamma_p^2 - \gamma_r^2) \operatorname{sh}(\gamma_j T)}, \tag{14}$$

де S_{n-s}^j – сума всіх можливих добутків елементів $\gamma_1^2, \dots, \gamma_{j-1}^2, \gamma_{j+1}^2, \dots, \gamma_n^2$, взятих у кількості $n - s$ у кожному добутку; $S_0^j \equiv 1$.

На стороні $\tau = 0$ $(\tau = T)$ квадрата K_T функції $G_k(t,\tau)$ довизначаємо за неперервністю справа (зліва).

На підставі формул (3), (13) розв'язок задачі (1), (2) зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau \exp(ik,x), \tag{15}$$

який, взагалі, є розбіжним, оскільки модулі виразів

$$\prod_{p=1, p\neq j}^{n} (\gamma_p^2 - \gamma_j^2), \qquad \operatorname{sh}(\gamma_j T), \qquad j = 1,\dots,n,$$

будучи відмінними від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної множини векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Позначимо $A(s) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + (m - 2\ell)(2n + s - 3)/(2n)$.

Теорема 2. *Нехай існують такі сталі* C_3, C_4, α_1, α_2, *що для всіх векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *справджуються оцінки*

$$\max_{0\le t\le T} \left| \frac{\operatorname{sh}(\gamma_j t)}{\operatorname{sh}(\gamma_j T)} \right| \le C_3 (1 + |k|)^{\alpha_1}, \qquad j = 1,\dots,n, \tag{16}$$

$$\left| \prod_{p=1, p\neq j}^{n} (\gamma_p^2 - \gamma_j^2) \right| \ge C_4 (1 + |k|)^{-\alpha_2}, \qquad j = 1,\dots,n. \tag{17}$$

Якщо $f \in C^{(0,h_0)}(\bar{D})$, $h_0 = [A(2n)] + p + 1$, *то при* $\varepsilon = 0$ *існує розв'язок* $u^0(t,x)$ *задачі* (1), (2) *з простору* $C^{(2n,2\ell)}(\bar{D})$, *який неперервно залежить від* $f(t,x)$.

Д о в е д е н н я. За умов теореми

$$\bar{f}_k \equiv \max_{0\le t\le T} |f_k(t)| \le C_5 (1+|k|)^{-h_0} \|f\|_{C^{(0,h_0)}(\bar{D})}, \qquad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{18}$$

На підставі формули (14) та оцінок (10), (16)–(18) отримуємо

$$\max_{0\le t\le T} \left| \frac{\partial^{s_0}}{\partial t^{s_0}} \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau \right| \le C_6 \bar{f}_k (1+|k|)^{A(s_0)-2\ell}, \tag{19}$$

де $s_0 = 0,1,\ldots,2n$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Із формули (15) і нерівностей (18), (19) одержуємо таку оцінку для норми розв'язку задачі (1), (2):

$$\| u \|_{C^{(2n,2\ell)}(\bar{D})} =$$

$$= \sum_{s_0=0}^{2n} \sum_{|s|\le 2\ell} \max_{\bar{D}} \left| \frac{\partial^{s_0+|s|}}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} \sum_{|k|\ge 0} \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau \exp(ik,x) \right| \le$$

$$\le \sum_{|k|\ge 0} \sum_{s_0=0}^{2n} \sum_{|s|\le 2\ell} \max_{0\le t\le T} \left| \frac{\partial^{s_0}}{\partial t^{s_0}} \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau \right| (1+|k|)^{|s|} \le$$

$$\le \sum_{|k|\ge 0} \sum_{s_0=0}^{2n} \sum_{|s|\le 2\ell} C_6 \bar{f}_k (1+|k|)^{A(s_0)-2\ell+|s|} \le$$

$$\le 2^{p+1} n \ell^p C_5 C_6 \sum_{|k|\ge 0} (1+|k|)^{A(2n)-2\ell} (1+|k|)^{-h_0} \| f \|_{C^{(0,h_0)}(\bar{D})} \le$$

$$\le 2^{p+1} n \ell^p C_5 C_6 \sum_{|k|\ge 0} (1+|k|)^{-p-\delta} \| f \|_{C^{(0,h_0)}(\bar{D})} \equiv \rho, \tag{20}$$

де C_5, C_6 – сталі з оцінок (18), (19) відповідно, $0 < \delta \le 1 - \{A(2n)\}$, $\{b\}$ – дробова частина числа b. Зі збіжності ряду в правій частині нерівності (20) випливає доведення теореми. ◊

Лема 1. *Якщо* $2\ell > m$, *то оцінки* (16) *справджуються для всіх векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *при* $\alpha_1 = 0$.

Д о в е д е н н я аналогічне до доведення леми 2 в [4]. ◊

Лема 2. *Нехай* $\Phi(k) \equiv \Phi(k_1,\ldots,k_p)$ – *обмежена послідовність дійсних чисел. Тоді нерівність*

$$\left| \Phi(k) - \frac{\ell a}{(1+|k|)^m} \right| < \frac{1}{(1+|k|)^{m+p+\varepsilon}}, \qquad 0 < \varepsilon < 1,$$

для майже всіх (стосовно міри Лебега) чисел $a > 0$ *має не більше ніж скінченне число розв'язків у цілих числах* $k_1,\ldots,k_p$, ℓ, *де* $\ell \ne 0$.

Д о в е д е н н я аналогічне до доведення леми 2.4 з [11, гл. 1]. ◊

Лема 3. *Якщо* $2\ell = m$, *то нерівності* (16) *виконуються при* $\alpha_1 > p$ *для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *і для всіх векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$.

Д о в е д е н н я. Позначимо через Q_j множину таких $k \in \mathbb{Z}^p$, для яких $T \operatorname{Im} \gamma_j(k) \ne \pi\ell$, $\ell \notin \mathbb{Z}$, $j = 1,\ldots,n$. На підставі нерівності

$$\sin x \ge \frac{2}{\pi} x, \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{2},$$

та нерівностей

$$|\operatorname{sh}(\gamma_j(k)T)| \ge \max\{T|\operatorname{Re}\gamma_j(k)|, \ |\sin(T\operatorname{Im}\gamma_j(k))|\},$$
$$k \in Q_j, \quad j = 1,\dots,n, \tag{21}$$

отримуємо

$$|\operatorname{sh}(\gamma_j(k)T)| \ge |\sin(\operatorname{Im}\gamma_j(k)T)| \ge \frac{2}{\pi}|T\operatorname{Im}\gamma_j(k) - \pi d_j(k)| \ge$$
$$\ge \frac{2T(1+|k|)^{\mu/2}}{\pi}\left|\frac{\operatorname{Im}\gamma_j(k)}{(1+|k|)^{\mu/2}} - \frac{\pi d_j(k)}{T(1+|k|)^{\mu/2}}\right|, \ k \in Q_j, \ j = 1,\dots,n, \tag{22}$$

де $d_j(k)$ – ціле число, для якого

$$|T\operatorname{Im}\gamma_j(k) - \pi d_j(k)| \le \frac{\pi}{2}.$$

Використовуючи лему 2, із (22) отримуємо, що для майже всіх чисел T та для всіх $k \in Q_j$, $j = 1,\dots,n$, справджуються нерівності

$$|\operatorname{sh}(\gamma_j(k)T)| \ge C_7(1+|k|)^{\mu/2}(1+|k|)^{-p-\mu/2-\delta_1} \ge C_8(1+|k|)^{-p-\delta_1}, \ \delta_1 > 0. \tag{23}$$

Якщо $k \in \mathbb{Z}^p \setminus Q_j$, то $T\operatorname{Im}\gamma_j(k) = \pi\ell$ для деякого $\ell \in \mathbb{Z}$. Тому на підставі формул (9) знаходимо, що

$$T\sqrt{|\lambda_j|}\sin((\arg\lambda_j)/2) = \pi\ell, \qquad k \in \mathbb{Z}^p \setminus Q_j, \qquad j = 1,\dots,n,$$

звідки випливає

$$\cos((\arg\lambda_j)/2) = \frac{1}{T\sqrt{|\lambda_j|}}\sqrt{T^2|\lambda_j| - \pi^2\ell^2}, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus Q_j, \quad j = 1,\dots,n.$$

На підставі формули (21), використовуючи лему 2, одержуємо, що для майже всіх чисел T справджується оцінка

$$|\operatorname{sh}(\gamma_j(k)T)|^2 \ge |T\operatorname{Re}\gamma_j(k)|^2 = \left|T\sqrt{|\lambda_j|}\cos((\arg\lambda_j)/2)\right|^2 \ge \left|T^2|\lambda_j| - \pi^2\ell^2\right| \ge$$
$$\ge T^2(1+|k|)^{\mu}\left|\frac{|\lambda_j|}{(1+|k|)^{\mu}} - \frac{\pi^2\ell^2}{T^2(1+|k|)^{\mu}}\right| \ge C_9(1+|k|)^{-p-\delta_2} \ge$$
$$\ge C_9(1+|k|)^{-2p-\delta_2}, \qquad \delta_2 > 0. \tag{24}$$

Із нерівностей (23), (24) та оцінок

$$\max_{0\le t\le T}|\operatorname{sh}(\gamma_j(k)t)| \le C_{10}, \qquad j = 1,\dots,n, \qquad k \in \mathbb{Z}^p,$$

випливає доведення леми. ◊

Позначимо через d вектор з компонентами $d_r = \operatorname{Re} a^0_{(\nu_r)}$, $r = 1,\dots p$, де

$$(\nu_r) = (\underbrace{0,\dots,0}_{r-1}, 2m_0, 0,\dots,0), \qquad m_0 = [m/2],$$

а через e – вектор, що складається з дійсних та уявних частин коефіцієнтів рівняння (1), за винятком координат вектора d.

Лема 4. *Для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^p$) *векторів* d *і довільного фіксованого вектора* e *оцінки* (17) *справджуються для всіх векторів* $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ *при* $\alpha_2 > (n-1)(-2m_0 + 2\ell + p + (n-2)(m-2\ell)/2n)$.

Д о в е д е н н я здійснюється за схемою доведення леми 3 з [10] із урахуванням оцінок (10). ◊

Розглянемо тепер задачу (1), (2), коли $\varepsilon \neq 0$. Ця задача еквівалентна нелінійному інтегральному рівнянню

$$u(t,x) = u^0(t,x) + \varepsilon \int\limits_D \mathcal{K}(t,x,\tau,\xi)\Phi(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\,d\tau\,d\xi \tag{25}$$

за умови, що ряд

$$\frac{1}{(2\pi)^p} \sum_{|k|\geq 0} G_k(t,\tau)\exp(ik,(x-\xi)) \tag{26}$$

рівномірно збігається в області $\bar{D}\times\bar{D}$ до функції $\mathcal{K}(t,x,\tau,\xi)$.

Лема 5. *Нехай справджуються нерівності*

$$2\ell > m, \qquad m > p, \qquad n > 3(2\ell - m)/(2(m-p)), \tag{27}$$

і нехай $M_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \sum\limits_{|s|\leq m} a_s^1 (ik_1)^{s_1}\dots(ik_p)^{s_p}$ *– еліптичний диференціальний вираз такий, що*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\} \qquad M_1(ik) \neq 0. \tag{28}$$

Тоді ряд (26) *рівномірно збігається в області* $\bar{D}\times\bar{D}$.

Д о в е д е н н я. Покажемо, що за умови (28) нерівність (17) справджується при $\alpha_2 \geq 2\ell - m$. Із еліптичності оператора $M_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ та умови (28) випливає, що існують сталі C_{11} і $K_1 \equiv K_1(C_{11})$ такі, що

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p, \quad |k| \geq K_1, \qquad \left|\sum_{|s|\leq m} a_s^1 (ik_1)^{s_1}\dots(ik_p)^{s_p}\right| \geq C_{11}(1+|k|)^m. \tag{29}$$

Із рівностей

$$\prod_{q=1,q\neq j}^{n}(\gamma_q^2 - \gamma_j^2) = (-1)^{n-1}L^{-1}(ik)\sum_{|s|\leq m} a_s^1 (ik_1)^{s_1}\dots(ik_p)^{s_p} +$$
$$+ (-1)^{n-1}L^{-1}(ik)\left(\sum_{r=1}^{n-2}(r+1)\sum_{|s|\leq m} a_s^{r+1}(ik_1)^{s_1}\dots(ik_p)^{s_p}\lambda_j^r\right) + n\lambda_j^{n-1},$$
$$j = 1,\dots,n, \tag{30}$$

та нерівності (29) випливає, що існують сталі C_{12} і $K_2 \equiv K_2(C_{12})$ такі, що

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p, \;\; |k| \geq K_3, \qquad \left|\prod_{\substack{q=1,\\ q\neq j}}^{n}(\gamma_q^2 - \gamma_j^2)\right| \geq C_{12}(1+|k|)^{m-2\ell}, \quad j=1,\dots,n, \tag{31}$$

де $K_3 = \max\{K_1, K_2\}$. За умов (27) із (14), нерівності (31) і леми 1 отримуємо

$$\max_{\bar{D}\times\bar{D}} |G_k(t,\tau)\exp(ik,(x-\xi))| \leq C_{13}(1+|k|)^{-p-\delta_3}, \quad \delta_3 > 0. \tag{32}$$

Із оцінок (32) випливає рівномірна збіжність ряду (26) в області $\bar{D}\times\bar{D}$. Лему доведено. ◊

Лема 6. *Нехай* $2\ell = m$, $\ell > pn$. *Тоді ряд* (26) *рівномірно збігається в області* $\bar{D}\times\bar{D}$ *для довільного фіксованого вектора* e *та для майже всіх* (*стосовно міри Лебега*) *векторів* d *і чисел* T.

Д о в е д е н н я. За умов леми на підставі (14) та лем 3 і 4 випливає, що для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів d і чисел T справджуються оцінки

$$\max_{\bar{D}\times\bar{D}} |G_k(t,\tau)\exp(ik,(x-\xi))| \leq C_{14}(1+|k|)^{p-\delta_4}, \quad \delta_4 > 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{33}$$

Із (33) випливає рівномірна збіжність ряду (26) в області $\bar{D}\times\bar{D}$. Лему доведено. ◊

Запишемо рівняння (25) у вигляді операторного рівняння

$$u(t,x) = A_{u_0} u(t,x),$$

де A_v − нелінійний інтегральний оператор, визначений у кулі $\bar{S}(u^0, r)$ формулою

$$A_v u(t,x) \equiv v(t,x) + \varepsilon \int_D \mathcal{K}(t,x,\tau,\xi)\Phi(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\, d\tau\, d\xi. \qquad (34)$$

Позначимо $\varepsilon_i = \min\left\{ \dfrac{r}{\psi(h_i)}, \dfrac{1}{\psi(h_i)} \right\}$, $i = 1,2$, де

$$h_1 = [3(2\ell - m)/2n + p + 1], \qquad h_2 = 2np + 1,$$

$$\psi(z) = 2\ell(2n+1)\bar{\Phi}(z) C_5 C_6 (1 + r + \rho)^{z+1},$$

$$\bar{\Phi}(z) = \max_{0 \le |s| + s_0 \le z+1} \max_{D_1} \left| \frac{\partial^{|s|+s_0} \Phi(t,x,u)}{\partial u^{s_0} \partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} \right|,$$

C_5, C_6, ρ − сталі з оцінок (18)−(20) відповідно.

Теорема 3. *Нехай* $2\ell > m$, *виконуються умови* (12), (27), (28) *і нехай* $f \in C^{(0,h_0)}(\bar{D})$, *де* $h_0 = [3(2\ell - m)/2n] + p + 1$, *а функція* $\Phi(t,x,u)$ *неперервна за* t *і має обмежені похідні в області* D_1 *за змінними* x, u *до порядку* $h_1 + 1$. *Тоді для всіх* ε *таких, що* $|\varepsilon| < \varepsilon_1$, *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який належить кулі* $\bar{S} \subset C^{(2n,2\ell)}(\bar{D})$ *і неперервно залежить від функції* $f(t,x)$.

Д о в е д е н н я. Позначимо через V сукупність функцій $v \in C^{2n}(\bar{D})$, для яких

$$\left\| v - u^0 \right\|_{C^{2n}(\bar{D})} \le \chi = r - |\varepsilon|\, \psi(h_1).$$

Покажемо, що для довільної функції $v(t,x)$ із V оператор A_v переводить кулю $\bar{S}(u^0, r)$ в себе, якщо $|\varepsilon| < \dfrac{r}{\psi(h_1)}$.

Нехай $u(t,x) = \sum\limits_{m \in \mathbb{Z}^p} u_m(t) \exp(im,x) \in \bar{S}(u^0, v)$. На підставі формули

$$\Phi_k(t, \{u_m(t)\}) = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\Omega^p} \Phi\left(t, x, \sum_{m \in \mathbb{Z}^p} u_m(t) \exp(im,x) \right) \exp(-ik,x)\, dx,$$

враховуючи, що $u \in \bar{S}(u^0, r)$, одержуємо, що

$$\max_{0 \le t \le T} \left| \Phi_k(t, \{u_m(t)\}) \right| \le C_5 B_\alpha (1 + |k|)^{-\alpha}, \qquad k \in \mathbb{Z}^p, \qquad (35)$$

де

$$B_\alpha = \max_{1 \le r \le p} \max_{\bar{D}} \left| \frac{\partial^\alpha \Phi(t,x,u(t,x))}{\partial x_r^\alpha} \right|, \qquad \alpha = 0,1,\dots,h_1 + 1.$$

Користуючись правилом диференціювання складної функції, знаходимо

$$B_\alpha \le \bar{\Phi}(h_1)(1 + \| u \|_{C^{(2n,2\ell)}(\bar{D})})^\alpha \le$$

$$\le \bar{\Phi}(h_1)(1 + \left\| u - u^0 \right\|_{C^{(2n,2\ell)}(\bar{D})} + \left\| u^0 \right\|_{C^{(2n,2\ell)}(\bar{D})})^\alpha \le$$

$$\le \bar{\Phi}(h_1)(1 + r + \rho)^\alpha, \qquad \alpha = 0,1,\dots,h_1 + 1. \qquad (36)$$

Із формули (34), враховуючи оцінки (19), (31), (35), (36) і лему 1, отримуємо оцінку

$$\left\| A_v u(t,x) - u^0(t,x) \right\|_{C^{(2n,2\ell)}(\bar{D})} \le \left\| v - u^0 \right\|_{C^{(2n,2\ell)}(\bar{D})} +$$

$$+ \frac{|\varepsilon|}{(2\pi)^p} \left\| \int\limits_D \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} G_k(t,\tau) f(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) \exp(ik,(x-\xi))\, d\tau\, d\xi \right\|_{C^{(2n,2\ell)}(\bar{D})} \le$$

$$\le \chi + |\varepsilon| \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \sum_{|s_0|\le 2n} \sum_{|s|\le 2\ell} (1+|k|)^{|s|} \max_{0\le t\le T} \left| \frac{\partial^{s_0}}{\partial t^{s_0}} \int\limits_0^T G_k(t,\tau) \Phi_k(\tau,\{u_m(\tau)\})\, d\tau \right| \le$$

$$\le \chi + |\varepsilon_1|\, 2\ell(2n+1)\bar{\Phi}(h_1) C_5 C_6 (1+r+\rho)^{h_1+1} = \chi + |\varepsilon_1|\, \psi(h_1) = r\,.$$

Покажемо тепер, що для довільної функції $v \in V$ оператор A_v є оператором стиску, якщо $|\varepsilon| < \dfrac{r}{\psi(h_1)}$. Нехай $u_1, u_2 \in \bar{S}(u^0, r)$ і нехай

$$F(t,x) \equiv \Phi(t,x,u_1(t,x)) - \Phi(t,x,u_2(t,x))\,.$$

Із формули (34), враховуючи оцінки (19), (31), (35), (36), лему 1 і формулу Лагранжа про скінченні прирости, одержуємо оцінку

$$\| A_v u_1(t,x) - A_v u_2(t,x) \|_{C^{(2n,2\ell)}(\bar{D})} \le$$

$$\le \frac{|\varepsilon|}{(2\pi)^p} \left\| \int\limits_D \mathcal{K}(t,x,\tau,\xi) F(t,x)\, d\tau\, d\xi \right\|_{C^{(2n,2\ell)}(\bar{D})} \le$$

$$\le |\varepsilon|\, \psi(h_1) \| u_2 - u_1 \|_{C^{(2n,2\ell)}(\bar{D})}\,.$$

Якщо $|\varepsilon|\, \psi(h_1) < 1$, то A_v є оператором стиску. Очевидно, що оператор A_v неперервний за v. Згідно з теоремами 1 і 3 з роботи [9] рівняння (25), а, отже, і задача (1), (2) має єдиний розв'язок, що неперервно залежить від $f(t,x)$. Теорему доведено. ◊

Теорема 4. *Нехай* $2\ell = m$, *виконуються умови* (12), $\ell > np$, $f \in C^{(0,h_3)}(\bar{D})$, $h_3 = 2p(n+1)+1$, *а функція* $\Phi(t,x,u)$ *неперервна за* t *і має обмежені похідні в області* D_1 *за змінними* x, u *до порядку* $h_2 + 1$. *Тоді для всіх* ε, $|\varepsilon| < \varepsilon_2$, *для довільного фіксованого вектора* e *та для майже всіх* (*стосовно міри Лебега*) *чисел* T *і векторів* d *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який належить кулі* $\bar{S} \subset C^{(2n,2\ell)}(\bar{D})$ *і неперервно залежить від функції* $f(t,x)$.

Д о в е д е н н я здійснюється за схемою доведення теореми 3 з урахуванням лем 3 і 4. ◊

1. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели. 1. Об отображении окружности на себя // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1961. – **25**, № 1. – С. 21–86.
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
3. *Білусяк Н.* Крайова задача для диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Міжнар. наук. конф. «Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь», Дрогобич, 1–5 жовт. 2001: Тези доп. – С. 19.
4. *Білусяк Н. І., Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Задача типу Діріхле для систем рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1592–1602.

5. *Білусяк Н. І., Пташник Б. Й.* Крайова задача з даними на всій границі області для слабконелінійних гіперболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 2. – С. 244–249.
6. *Бобик І. О., Пташник Б. Й.* Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 7. – С. 795–802.
7. *Бурский В. П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 2002. – 315 с.
8. *Горбачук М. Л., Федак И. В.* Задача Коши для дифференциально-операторного уравнения, связанного с колебаниями стратифицированных жидкостей // Докл. АН СССР. – 1987. – **297**, № 1. – С. 14–17.
9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1977. – 742 с.
10. *Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Крайові задачі для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 9. – С. 1197–1208.
11. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264с.
12. *Романко В. К.* Граничные задачи для общих дифференциальных операторов с выделенной переменной: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Москва, 1980. – 26 с.
13. *Романко В. К.* О граничных задачах для дифференциально-операторных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной // Докл. АН СССР. – 1977. – **235**, № 5. – С. 1030–1033.
14. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. – Новосибирск: Наука, 1984. – 224 с.
15. *Фаддєєв Д. К., Сомінський І. С.* Збірник задач з вищої алгебри. – Київ: Вища шк., 1971. – 316 с.
16. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. – Zeist: VSP, 2003. – 268 p.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕРАЗРЕШИМОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТЬЮ

Исследована однозначная разрешимость краевой задачи с условиями типа условий Дирихле по переменной t и периодическими условиями по переменным $x_1, \dots, x_p$ для слабо нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка с постоянными коэффициентами в линейной части, неразрешимой относительно старшей производной по времени.

BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR WEAKLY NON-LINEAR EQUATIONS WITH LINEAR PART, UNSOLVABLE WITH RESPECT TO THE HIGHEST DERIVATIVE

The conditions of existence of unique solution to the problem with Dirichlet conditions on the marked variable t and periodic conditions on the rest coordinates $x_1, \dots, x_p$ for weakly non-linear equations with a linear part, unsolved with respect to the highest derivative with respect to time, are established.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
12.08.04