УДК 536.21

Ю. В. Немировский, А. П. Янковский

УТОЧНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Построены внешние асимптотические разложения решений задачи стационарной теплопроводности анизотропных пластин при различных граничных условиях на лицевых поверхностях. Проанализированы получающиеся двумерные разрешающие уравнения и исследованы асимптотические свойства решений задачи теплопроводности. Получены оценки точности, с которой температуру в пластине за пределами погранслоя можно считать линейно или квадратично распределенной по толщине конструкции. Проведено сравнение с асимптотикой, построенной ранее другими авторами.

Настоящая работа является продолжением исследований, опубликованных в [3], где были построены асимптотические разложения решений задачи теплопроводности длинных стержней и тонких пластин по малому параметру, являющемуся отношением толщины конструкции к ее характерному размеру в плане. Однако при изучении задачи теплопроводности пластин авторы в [3] волевым решением навязали граничным условиям на лицевых поверхностях пластины асимптотические свойства, не присущие реальной конструкции (подробно это будет показано ниже). Поэтому построенная в [3] асимптотика соответствует искусственной, а не реальной задаче теплопроводности пластин, и не отражает некоторых важных свойств решения этой задачи (что будет продемонстрировано ниже). В силу этих обстоятельств настоящая работа посвящена построению асимптотических разложений решений задачи теплопроводности анизотропных пластин, соответствующих реальным асимптотическим свойствам граничных условий на лицевых поверхностях конструкции. Такое исследование, в частности, позволит оценить, с какой точностью за пределами погранслоя температуру в тонкостенной конструкции можно задавать постоянной или распределенной по линейному, квадратичному и другим законам по толщине пластины.

Рассмотрим анизотропную пластину постоянной толщины $2H$. Для простоты изложения будем предполагать, что материал пластины нетермочувствителен и коэффициенты теплопроводности не изменяются по толщине конструкции. (Эти предположения не являются принципиальными в рамках настоящего исследования, и развиваемая ниже теория может быть применена к пластинам, материал которых обладает более общими свойствами: термочувствительностью, неоднородностью по толщине и т. д.) Свяжем с пластиной прямоугольную декартову систему координат $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ так, чтобы срединной поверхности соответствовало значение $\bar{x}_3 = 0$.

При сделанных предположениях уравнение стационарной теплопроводности имеет вид

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \left(\sum_{j=1}^{3} \bar{\lambda}_{ij} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}_j} \right) = - \bar{Q}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3), \tag{1}$$

где $\bar{T}$ – температура пластины; $\bar{Q}$ – плотность мощности внутренних источников тепла; $\bar{\lambda}_{ij}$ – коэффициенты теплопроводности, не зависящие от переменной $\bar{x}_3$. (Здесь и далее размерные функции и величины будем помечать сверху чертой, а соответствующие им безразмерные функции и величины будем обозначать теми же символами, но без черты.)

На лицевых поверхностях пластины $\bar{x}_3 = \pm H$ могут быть заданы следующие граничные условия:

– по температуре

$$\bar{T}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \pm H) = \bar{T}^{(\pm)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \tag{2}$$

– по тепловому потоку

$$-\operatorname{sgn}(\bar{x}_3)\sum_{i=1}^{3}\bar{\lambda}_{3i}\left.\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{x}_i}\right|_{\bar{x}_3=\pm H}=\bar{Q}^{(\pm)}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\,, \tag{3}$$

– по закону конвективного теплообмена Ньютона

$$-\operatorname{sgn}(\bar{x}_3)\sum_{i=1}^{3}\bar{\lambda}_{3i}\left.\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{x}_i}\right|_{\bar{x}_3=\pm H}=\bar{\alpha}^{(\pm)}\left(\bar{T}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\pm H)-\bar{T}_{\infty}^{(\pm)}\right), \tag{4}$$

где $\bar{T}^{(\pm)}$ – заданная на поверхностях $\bar{x}_3=\pm H$ температура; $\bar{Q}^{(\pm)}$ – заданные на поверхностях $\bar{x}_3=\pm H$ проекции вектора теплового потока на направление внешней нормали; $\bar{\alpha}^{(\pm)}$ – коэффициенты конвективного теплообмена с окружающей средой на верхней (+) и нижней (–) сторонах пластины; $\bar{T}_{\infty}^{(\pm)}$ – температура окружающей среды со стороны верхней (+) и нижней (–) лицевых поверхностей пластины. (Возможно задание и смешанных из (2)–(4) граничных условий.)

На торцевых поверхностях (кромках) пластины также должны быть заданы граничные условия, аналогичные (2)–(4). Эти условия общеизвестны [3] и в настоящем исследовании не потребуются, поэтому не будем их выписывать.

Обезразмерим соотношения (1)–(4). С этой целью введем безразмерные независимые переменные

$$x_i=\bar{x}_i/a,\qquad i=1,2,\qquad x_3=\bar{x}_3/H,\qquad |x_3|\le 1\,, \tag{5}$$

где a – характерный размер пластины в плане. Уравнение (1) обезразмерим умножением на постоянную величину $H^2/(\bar{\lambda}_0\bar{T}_*)$. Тогда с учетом (5) получим

$$\varepsilon^2L_2(T)+\varepsilon L_1(T)+\lambda_{33}T_{,33}=-\varepsilon^2Q(x_1,x_2,x_3)\,, \tag{6}$$

где

$$L_2(T)\equiv\left(\lambda_{11}T_{,1}+\lambda_{12}T_{,2}\right)_{,1}+\left(\lambda_{21}T_{,1}+\lambda_{22}T_{,2}\right)_{,2}\,,$$

$$L_1(T)\equiv\left(\lambda_{13}T_{,3}\right)_{,1}+\left(\lambda_{23}T_{,3}\right)_{,2}+\lambda_{31}T_{,13}+\lambda_{32}T_{,23}=L_0(T_{,3})=\left(L_0(T)\right)_{,3}\,,$$

$$L_0(T)\equiv\left(\lambda_{13}T\right)_{,1}+\left(\lambda_{23}T\right)_{,2}+\lambda_{31}T_{,1}+\lambda_{32}T_{,2}\,,\qquad \lambda_{ij}=\lambda_{ji}\,,\qquad i,j=1,2,3\,, \tag{7}$$

$\varepsilon=H/a$ – малый параметр; нижний индекс после запятой означает частное дифференцирование по соответствующей переменной x_i, $i=1,2,3$.

Граничные условия (2) обезразмерим делением на $\bar{T}_*=\mathrm{const}$, а условия (3), (4) – умножением на $H/(\bar{\lambda}_0\bar{T}_*)=\mathrm{const}$:

$$T(x_1,x_2,\pm1)=T^{(\pm)}(x_1,x_2)\,, \tag{8}$$

$$-\operatorname{sgn}(x_3)\left[\varepsilon\left(\lambda_{31}T_{,1}+\lambda_{32}T_{,2}\right)+\lambda_{33}T_{,3}\right]\Big|_{x_3=\pm1}=\varepsilon Q^{(\pm)}(x_1,x_2)\,, \tag{9}$$

$$-\operatorname{sgn}(x_3)\left[\varepsilon\left(\lambda_{31}T_{,1}+\lambda_{32}T_{,2}\right)+\lambda_{33}T_{,3}\right]\Big|_{x_3=\pm1}=\varepsilon\alpha^{(\pm)}\left(T(x_1,x_2,\pm1)-T_{\infty}^{(\pm)}\right). \tag{10}$$

Обобщая условия (9), (10), можно записать

$$-\operatorname{sgn}(x_3)\left[\varepsilon\left(\lambda_{31}T_{,1}+\lambda_{32}T_{,2}\right)+\lambda_{33}T_{,3}\right]\Big|_{x_3=\pm1}-\varepsilon\alpha^{(\pm)}T(x_1,x_2,\pm1)=$$

$$=\varepsilon q^{(\pm)}(x_1,x_2)\,, \tag{11}$$

где

$$q^{(\pm)}(x_1,x_2)\equiv Q^{(\pm)}(x_1,x_2)-\alpha^{(\pm)}T_{\infty}^{(\pm)}\,. \tag{12}$$

Граничные условия (11) с учетом (12) имеют место при конвективном теплообмене через лицевые поверхности пластины и при дополнительном притоке или оттоке тепла, например, за счет теплового излучения.

В соотношениях (6)–(12) использованы следующие формулы обезразмеривания и обозначения:

$$T=\bar{T}/\bar{T}_*,\quad \lambda_{ij}=\bar{\lambda}_{ij}/\bar{\lambda}_0,\quad i,j=1,2,3,\qquad Q=\bar{Q}a^2/(\bar{\lambda}_0\bar{T}_*),\qquad T^{(\pm)}=\bar{T}^{(\pm)}/\bar{T}_*,$$

$$Q^{(\pm)} = \bar{Q}^{(\pm)} a/(\bar{\lambda}_0 \bar{T}_*), \qquad \alpha^{(\pm)} = \bar{\alpha}^{(\pm)} a/\bar{\lambda}_0, \qquad T_\infty^{(\pm)} = \bar{T}_\infty^{(\pm)}/\bar{T}_*, \tag{13}$$

$\bar{T}_*$ – некоторая характерная температура конструкции (например, температура естественного состояния); $\bar{\lambda}_0$ – характерное значение коэффициента теплопроводности материала пластины (например, максимальная величина наибольшего из главных значений тензора коэффициентов теплопроводности $\bar{\lambda}_{ij}$).

Как обычно, предполагаем, что температура $\bar{T}$ незначительно отличается от значения $\bar{T}_*$ (в противном случае пришлось бы учитывать термочувствительность материала пластины, что выходит за рамки настоящего исследования). В силу формул обезразмеривания (13) и выбора величины $\bar{\lambda}_0$ безразмерные коэффициенты теплопроводности λ_{ij} близки по значениям к единице. Если принять, что изменению малого параметра ε соответствует изменение толщины пластины $2H$ при фиксированной геометрии конструкции в плане (при фиксированном характерном размере a), то все остальные функции и величины, приведенные в (12), (13), имеют следующие асимптотические свойства:

$$\lambda_{ij} = O(1), \quad i,j = 1,2,3, \qquad Q = O(1), \qquad T^{(\pm)} = O(1),$$

$$Q^{(\pm)} = O(1), \qquad \alpha^{(\pm)} = O(1), \qquad T_\infty^{(\pm)} = O(1), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{14}$$

Замечание. В работе [3] использованы такие же формулы обезразмеривания независимых переменных, уравнения теплопроводности и граничных условий на лицевых поверхностях пластины, что и выше (см. (5)–(13)), но предполагается, что правые части в равенствах (9)–(11) имеют не первый, а второй порядок малости по ε, т. е. вместо (14) искусственно навязываются асимптотические свойства

$$Q^{(\pm)} = O(\varepsilon), \qquad \alpha^{(\pm)} = O(\varepsilon), \qquad q^{(\pm)} = O(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0, \tag{15}$$

что противоречит формулам обезразмеривания (13). При этом на торцевой поверхности (кромке) пластины коэффициент теплообмена $\bar{\alpha}_s$, обезразмеренный аналогично $\bar{\alpha}^{(\pm)}$ в (13), в [3] имеет порядок $\alpha_s = O(1)$ при $\varepsilon \to 0$, т. е. такой же, как в (14), а не в (15). Асимптотика (15) потребовалась авторам в [3], чтобы в качестве разрешающего получить уравнение

$$L_2(T_0) - \alpha T_0 = -\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} Q\, dx_3 + q^{(+)} + q^{(-)} \right), \qquad T_0 = T_0(x_1, x_2) \tag{16}$$

(где $\alpha = \alpha^{(\pm)}(\varepsilon)/\varepsilon = O(1)$, $\varepsilon \to 0$; T_0 – первое слагаемое в асимптотическом разложении по ε температуры T), по структуре аналогичное тем, что получаются при сведении трехмерной задачи теплопроводности к двумерной методом Бубнова – Галеркина. Фактически в [3] авторы поставили перед собой задачу получения в качестве разрешающих двумерных уравнений для коэффициентов асимптотических разложений уравнения типа (16) и под эту цель навязали асимптотические свойства (15), не присущие реальной задаче. Поэтому-то и возникла необходимость уточнения асимптотических разложений задачи теплопроводности анизотропных пластин. ◊

Наличие в уравнении (6) и граничных условиях (9)–(11) малого параметра ε позволяет применить к решению задачи теплопроводности асимптотические методы. Для разных граничных условий (8)–(11) нужно использовать разные асимптотические разложения. Построим некоторые из этих разложений.

Если на обеих лицевых поверхностях заданы лишь тепловые потоки (9), то в качестве внешнего разложения следует выбрать

$$T(x_1, x_2, x_3) \sim \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x_1, x_2, x_3)\varepsilon^n. \tag{17}$$

Подставив (17) в (6), (9) и умножив на ε, получим уравнение

$$\sum_{n=2}^{\infty} L_2(T_{n-2})\varepsilon^n + \sum_{n=1}^{\infty} L_1(T_{n-1})\varepsilon^n + \lambda_{33}\sum_{n=0}^{\infty} T_{n,33}\,\varepsilon^n = -\,\varepsilon^3 Q \tag{18}$$

и граничные условия

$$-\operatorname{sgn}(x_3)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{31}T_{n-1,1} + \lambda_{32}T_{n-1,2}\right)\varepsilon^n + \lambda_{33}\sum_{n=0}^{\infty} T_{n,3}\,\varepsilon^n\right]\Bigg|_{x_3=\pm 1} = \varepsilon^2 Q^{(\pm)}. \tag{19}$$

Собирая в (18), (19) слагаемые при одинаковых степенях ε, получим цепочку равенств для определения функций T_n:

$$\lambda_{33}T_{0,33} = 0\,, \tag{20}$$

$$-\lambda_{33}T_{0,3} = 0, \quad x_3 = 1, \qquad \lambda_{33}T_{0,3} = 0, \quad x_3 = -1\,, \tag{21}$$

$$\lambda_{33}T_{1,33} + L_0(T_{0,3}) = 0\,, \tag{22}$$

$$-\operatorname{sgn}(x_3)\left(\lambda_{33}T_{1,3} + \lambda_{31}T_{0,1} + \lambda_{32}T_{0,2}\right) = 0, \qquad x_3 = \pm 1\,, \tag{23}$$

$$\lambda_{33}T_{2,33} + L_0(T_{1,3}) + L_2(T_0) = 0\,, \tag{24}$$

$$-\operatorname{sgn}(x_3)\left(\lambda_{33}T_{2,3} + \lambda_{31}T_{1,1} + \lambda_{32}T_{1,2}\right) = Q^{(\pm)}, \qquad x_3 = \pm 1\,, \tag{25}$$

$$\lambda_{33}T_{3,33} + L_0(T_{2,3}) + L_2(T_1) = -\,Q\,, \tag{26}$$

$$-\operatorname{sgn}(x_3)\left(\lambda_{33}T_{3,3} + \lambda_{31}T_{2,1} + \lambda_{32}T_{2,2}\right) = 0, \qquad x_3 = \pm 1\,, \tag{27}$$

$$\lambda_{33}T_{n,33} + L_0(T_{n-1,3}) + L_2(T_{n-2}) = 0, \qquad n = 4,5,6,\ldots\,, \tag{28}$$

$$-\operatorname{sgn}(x_3)\left(\lambda_{33}T_{n,3} + \lambda_{31}T_{n-1,1} + \lambda_{32}T_{n-1,2}\right) = 0, \quad x_3 = \pm 1, \quad n = 4,5,\ldots. \tag{29}$$

Построим решение системы (20)–(29). Общий интеграл уравнения (20) имеет вид

$$T_0(x_1,x_2,x_3) = T_0^{(1)}(x_1,x_2)x_3 + T_0^{(0)}(x_1,x_2)\,, \tag{30}$$

где $T_0^{(1)}$, $T_0^{(0)}$ – произвольные функции, подлежащие определению. Из (30) и граничных условий (21) следует, что

$$T_0^{(1)} \equiv 0, \qquad T_0 = T_0^{(0)}(x_1,x_2), \qquad T_{0,3} = 0\,. \tag{31}$$

Общий интеграл уравнения (22) относительно T_1 с учетом (31) имеет вид

$$T_1(x_1,x_2,x_3) = T_1^{(1)}(x_1,x_2)x_3 + T_1^{(0)}(x_1,x_2)\,, \tag{32}$$

где $T_1^{(1)}$, $T_1^{(0)}$ – произвольные функции, подлежащие определению. Подставив (32) в граничные условия (23), с учетом (31) получим

$$T_1^{(1)}(x_1,x_2) = -\left(\lambda_{31}T_{0,1} + \lambda_{32}T_{0,2}\right)/\lambda_{33}\,. \tag{33}$$

Следовательно, функция $T_1^{(1)}$ в (32) определяется через T_0 равенством (33), а функции $T_1^{(0)}$, T_0 подлежат определению в дальнейшем.

Общий интеграл уравнения (24) относительно T_2 с учетом (31), (32) имеет вид

$$T_2(x_1,x_2,x_3) = \\ = -\frac{1}{2\lambda_{33}}\left[L_2(T_0) + L_0\left(T_1^{(1)}\right)\right]x_3^2 + T_2^{(1)}(x_1,x_2)x_3 + T_2^{(0)}(x_1,x_2)\,, \tag{34}$$

где $T_2^{(1)}$, $T_2^{(0)}$ – произвольные функции. Подставив (34) в граничные условия (25), после несложных преобразований с учетом (7), (32), (33) получим

$$L_2(T_0) - \left[\lambda_{13}\left(\lambda_{31}T_{0,1} + \lambda_{32}T_{0,2}\right)/\lambda_{33}\right]_{,1} - \\ -\left[\lambda_{23}\left(\lambda_{31}T_{0,1} + \lambda_{32}T_{0,2}\right)/\lambda_{33}\right]_{,2} = \left(Q^{(+)} + Q^{(-)}\right)/2\,, \tag{35}$$

$$T_2^{(1)}(x_1,x_2) = -\left(Q^{(+)} - Q^{(-)}\right)/(2\lambda_{33}) - \left(\lambda_{31}T_{1,1}^{(0)} + \lambda_{32}T_{1,2}^{(0)}\right)/\lambda_{33}\,. \tag{36}$$

Уравнение (35) определяет функцию $T_0(x_1, x_2)$, зная которую, из (33) можем определить $T_1^{(1)}$, а равенство (36) задает зависимость $T_2^{(1)}$ от $T_1^{(0)}$. Функции $T_1^{(0)}$ в (32) и $T_2^{(0)}$ в (34) подлежат определению в дальнейшем.

Общий интеграл уравнения (26) относительно T_3 с учетом (32), (34) имеет вид

$$T_3(x_1, x_2, x_3) = \left\{ -\frac{1}{\lambda_{33}} \int\limits_{-1}^{x_3} \int\limits_{-1}^{s} Q(x_1, x_2, t)\, dt\, ds - \right.$$

$$- \frac{1}{\lambda_{33}} L_0 \left[-\frac{x_3^3}{6\lambda_{33}} \left[L_2(T_0) + L_0\left(T_1^{(1)}\right) \right] + T_2^{(1)} \frac{x_3^2}{2} \right] -$$

$$\left. - \frac{1}{\lambda_{33}} L_2 \left(T_1^{(1)} \frac{x_3^3}{6} + T_1^{(0)} \frac{x_3^2}{2} \right) \right\} + T_3^{(1)}(x_1, x_2) x_3 + T_3^{(0)}(x_1, x_2)\,, \tag{37}$$

где $T_3^{(1)}$, $T_3^{(0)}$ – произвольные функции. Подставив (37) в граничные условия (27), после несложных преобразований с учетом (7), (36) получим

$$L_2\left(T_1^{(0)}\right) - \left[\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{33}} \left(\lambda_{31} T_{1,1}^{(0)} + \lambda_{32} T_{1,2}^{(0)} \right) \right]_{,1} - \left[\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{33}} \left(\lambda_{31} T_{1,1}^{(0)} + \lambda_{32} T_{1,2}^{(0)} \right) \right]_{,2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} Q\, dx_3 + \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{33}} \left(Q^{(+)} - Q^{(-)} \right) \right]_{,1} + \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{33}} \left(Q^{(+)} - Q^{(-)} \right) \right]_{,2}, \tag{38}$$

$$T_3^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\lambda_{33}} \left\{ \int\limits_{-1}^{1} Q\, dx_3 - L_0 \left[\frac{1}{\lambda_{33}} \left[L_2(T_0) + L_0\left(T_1^{(1)}\right) \right] \right] + L_2\left(T_1^{(1)}\right) + \right.$$

$$\left. + \lambda_{31} \left[\frac{1}{\lambda_{33}} \left[L_2(T_0) + L_0\left(T_1^{(1)}\right) \right] \right]_{,1} + \lambda_{32} \left[\frac{1}{\lambda_{33}} \left[L_2(T_0) + L_0\left(T_1^{(1)}\right) \right] \right]_{,2} \right\} -$$

$$- \frac{1}{\lambda_{33}} \left(\lambda_{31} T_{2,1}^{(0)} + \lambda_{32} T_{2,2}^{(0)} \right). \tag{39}$$

Уравнение (38) определяет функцию $T_1^{(0)}$, зная которую, из (36) можем определить $T_2^{(1)}$, а равенство (39) задает дифференциальную зависимость $T_3^{(1)}$ от $T_2^{(0)}$. Функции $T_2^{(0)}$ в (34) и $T_3^{(0)}$ в (37) подлежат определению в дальнейшем.

Сравнивая равенства (33), (36), (39), запишем

$$T_n^{(1)}(x_1, x_2) = \theta_n^{(1)}(x_1, x_2) - \left(\lambda_{31} T_{n-1}^{(0)}{}_{,1} + \lambda_{32} T_{n-1}^{(0)}{}_{,2} \right) / \lambda_{33}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{40}$$

где $\theta_n^{(1)}$ – известные функции, причем

$$\theta_1^{(1)} \equiv 0, \quad \theta_2^{(1)} \equiv -\left(Q^{(+)} - Q^{(-)} \right) / (2\lambda_{33}), \quad \theta_3^{(1)} \equiv F_3(x_1, x_2) / (2\lambda_{33})\,, \tag{41}$$

F_3 определяется выражением, заключенным в (39) в фигурные скобки, и является известной функцией.

Сравнивая выражения (30), (32), (34), (37), предположим, что функции T_{n-1}, T_{n-2} в уравнении (28) можно представить в виде

$$T_{n-1} = T_{n-1}^{*} + T_{n-1}^{(1)} x_3 + T_{n-1}^{(0)}\,,$$

$$T_{n-2} = T_{n-2}^{*} + T_{n-2}^{(1)} x_3 + T_{n-2}^{(0)}, \qquad n = 4, 5, 6, \ldots\,, \tag{42}$$

где при $n = 4$ (см. (34), (37)) получим

$$T_{n-2}^{*} = T_2^{*}(x_1, x_2, x_3) \equiv -\frac{1}{2\lambda_{33}} \left[L_2(T_0) + L_0\left(T_1^{(1)}\right) \right] x_3^2\,,$$

а функция $T_{n-1}^{*} = T_3^{*}(x_1, x_2, x_3)$ определяется выражением, заключенным в (37) в фигурных скобках. Следовательно, при $n = 4$ функции $T_{n-2}^{*} = T_2^{*}$, $T_{n-1}^{*} = T_3^{*}$ –

известные функции, а в (42) неизвестны функции $T_{n-2}^{(0)} = T_2^{(0)}$, $T_{n-1}^{(0)} = T_3^{(0)}$ и $T_{n-1}^{(1)} = T_3^{(1)}$ (функция $T_{n-2}^{(1)} = T_2^{(1)}$ известна из (36), (38)), причем $T_{n-1}^{(1)}$ связана с $T_{n-2}^{(0)}$ дифференциальным соотношением (39) или (40), где $\theta_{n-1}^{(1)}$ – известная функция.

По аналогии со случаем $n = 4$ предположим, что и при $n = 5,6,\ldots$ справедливы равенства (42), в которых T_{n-2}^{*}, T_{n-1}^{*}, $T_{n-2}^{(1)}$ – известные функции, функция $T_{n-1}^{(1)}$ связана с $T_{n-2}^{(0)}$ соотношением (40), в котором $\theta_{n-1}^{(1)}(x_1, x_2)$ – известная функция, а $T_{n-1}^{(0)}$, $T_{n-2}^{(0)}$ подлежат определению в дальнейшем. (При $n = 4$ эти допущения выполняются.)

При сделанных допущениях общий интеграл уравнения (28) относительно T_n имеет вид

$$T_n(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{\lambda_{33}}\left[L_2\left(\int_{-1}^{x_3}\int_{-1}^{s} T_{n-2}^{*}(x_1, x_2, t)\,dt\,ds + \frac{T_{n-2}^{(1)}}{6}x_3^3 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{T_{n-2}^{(0)}}{2}x_3^2 \right) + L_0\left(\int_{-1}^{x_3} T_{n-1}^{*}(x_1, x_2, s)ds + \frac{T_{n-1}^{(1)}}{2}x_3^2 \right)\right]$$
$$+ T_n^{(1)}(x_1, x_2)\,x_3 + T_n^{(0)}(x_1, x_2), \qquad n = 4,5,\ldots, \tag{43}$$

где $T_{n-1}^{(1)}$, $T_{n-2}^{(0)}$ связаны соотношением (40). Из сравнения (42) и (43) следует, что $T_n^{*} \equiv -T_n^{**}/\lambda_{33}$, где T_n^{**} – функция, определяемая выражением, заключенным в (43) в квадратных скобках.

Подставив (43) в граничные условия (29), с учетом (7), (40), (42) после некоторых преобразований получим

$$L_2(T_{n-2}^{(0)}) - \left[\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{33}}\left(\lambda_{31}T_{n-2}^{(0)},_1 + \lambda_{32}T_{n-2}^{(0)},_2\right)\right],_1 - \left[\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{33}}\left(\lambda_{31}T_{n-2}^{(0)},_1 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \lambda_{32}T_{n-2}^{(0)},_2\right)\right],_2 = -\left(\lambda_{13}\theta_{n-1}^{(1)}\right),_1 - \left(\lambda_{23}\theta_{n-1}^{(1)}\right),_2 - \frac{1}{2}\left\{ L_0\left(T_{n-1}^{*}(1) - \right.\right.$$
$$- T_{n-1}^{*}(-1)\big) + L_2\left(\int_{-1}^{-1} T_{n-2}^{*}\,dx_3\right) - \lambda_{13}\left(T_{n-1}^{*}(1) - T_{n-1}^{*}(-1)\right),_1 -$$
$$\left. - \lambda_{23}\left(T_{n-1}^{*}(1) - T_{n-1}^{*}(-1)\right),_2 \right\}, \qquad n = 4,5,\ldots, \tag{44}$$

$$T_n^{(1)} = -\frac{1}{\lambda_{33}}\left[\lambda_{13}T_{n-1}^{(0)},_1 + \lambda_{23}T_{n-1}^{(0)},_2\right] + \frac{1}{2\lambda_{33}}\left\{ L_2(T_{n-2}^{(1)}) + \right.$$
$$+ L_0\left(T_{n-1}^{*}(1) + T_{n-1}^{*}(-1)\right) + L_2\left(\int_{-1}^{-1} T_{n-2}^{*}dx_3\right) - \lambda_{13}\left(T_{n-1}^{*}(1) + \right.$$
$$\left. + T_{n-1}^{*}(-1)\right),_1 - \lambda_{23}\left(T_{n-1}^{*}(1) + T_{n-1}^{*}(-1)\right),_2 \Big\}, \qquad n = 4,5,\ldots, \tag{45}$$

где $T_{n-1}^{*}(\pm 1) \equiv T_{n-1}^{*}\Big|_{x_3=\pm 1}$. Сравнивая (40) и (45), получаем, что

$$\theta_n^{(1)}(x_1, x_2) \equiv \frac{1}{2\lambda_{33}}F_n(x_1, x_2), \qquad n = 4,5,\ldots,$$

где F_n – известная функция, определяемая выражением, заключенным в (45) в фигурных скобках.

В силу сделанных предположений о функциях T_{n-2}^*, T_{n-1}^*, $T_{n-2}^{(1)}$ функцию $\theta_n^{(1)}$ в (40) при $n = 4, 5, \ldots$ можно считать известной. По этим же соображениям правая часть уравнения (44), определяющего функцию $T_{n-2}^{(0)}$ при $n = 4, 5, \ldots$, также известна. Следовательно, при $n = 4, 5, \ldots$ из (44) можно определить функцию $T_{n-2}^{(0)}$, а из (40) – функцию $T_{n-1}^{(1)}$. После этого функция T_n^* (или, что то же самое, первое слагаемое в (43)) будет известна, а значит, по схеме (40)–(45) можно получить неизвестные функции $T_{n-2}^{(0)}$, $T_{n-1}^{(1)}$ при следующем значении n и т. д. (При $n = 4$, как показано выше, сделанные допущения справедливы, поэтому по схеме (40)–(45) можно определить все коэффициенты в разложении (17) при $n = 4, 5, \ldots$.)

Таким образом, для определения неизвестных коэффициентов T_n в асимптотическом разложении (17) при каждом $n = 0, 1, 2, \ldots$ необходимо проинтегрировать уравнения (35), (38), (44), которые отличаются лишь известными правыми частями. Характеристическое уравнение для (35), (38), (44) имеет вид

$$\left(\lambda_{22}\lambda_{33} - \lambda_{23}^2\right)x_2'^2 - 2(\lambda_{12}\lambda_{33} - \lambda_{13}\lambda_{23})x_2' + \left(\lambda_{11}\lambda_{33} - \lambda_{13}^2\right) = 0 ,$$

где $x_2'(x_1) = dx_2/dx_1$ – производная, задающая направление характеристики. Дискриминант этого уравнения

$$D = -\,4\lambda_{33}\det(\lambda_{ij}), \qquad i, j = 1, 2, 3 ,$$

где $\det(\lambda_{ij})$ – определитель матрицы коэффициентов теплопроводности. Согласно постулату Онзагера [2], $\lambda_{33} > 0$, $\det(\lambda_{ij}) > 0$, поэтому $D < 0$. Следовательно, уравнения (35), (38), (44) являются эллиптическими уравнениями второго порядка, зависящими от переменных x_1, x_2.

Обсудим некоторые свойства полученного асимптотического разложения (17). Используя разложение (17) и равенства (31), (32), (34), можем утверждать, что с точностью $O(\varepsilon^2)$ температура в пластине при задании тепловых потоков на лицевых поверхностях за пределами погранслоя, возникающего в окрестности кромок, распределена по квадратичному закону по толщине конструкции:

$$T(x_1, x_2, x_3) \sim T_0(x_1, x_2)/\varepsilon + \left(T_1^{(1)}x_3 + T_1^{(0)}\right) + \left\{-\left[L_2(T_0) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + L_0\left(T_1^{(1)}\right)\right] x_3^2/(2\lambda_{33}) + T_2^{(1)}x_3 + T_2^{(0)}\right\}\varepsilon + O(\varepsilon^2). \qquad (46)$$

Из разложений (17) или (46) следует, что при $Q^{(\pm)} \neq 0$ имеем

$$T(x_1, x_2, x_3) = O(1/\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0 , \qquad (47)$$

т. е. с уменьшением ε температура T неограниченно возрастает по модулю. Этот факт имеет физическое объяснение. Именно, уменьшению ε соответствует уменьшение толщины пластины при фиксированных прочих входных данных задачи (размерах пластины в плане, плотности мощности внутренних источников тепла, тепловых потоках на лицевых поверхностях). Так как характерный размер пластины a и тепловые потоки на лицевых поверхностях $Q^{(\pm)}$ фиксированы, то фиксирован безразмерный приток (отток) тепла через эти поверхности

$$Q_* = -\iint\limits_S \left(Q^{(+)} + Q^{(-)}\right)dx_1\,dx_2 , \qquad (48)$$

где S – область, занимаемая пластиной в плане в безразмерных переменных x_1, x_2. При уменьшении же толщины пластины (уменьшении ε) уменьшаются объем конструкции и площади торцевых поверхностей пластины (на кромках). Поэтому, чтобы обеспечить фиксированный отток (приток) тепла через эту поверхность, равный значению (48), при уменьшении ε должны возрастать по модулю компоненты теплового потока в пластине, лежащие в плоскости конструкции, а, значит, по закону Фурье неограниченно должен возрастать модуль градиента температуры. Следствием этого будет неограниченное возрастание по модулю температуры при $\varepsilon \to 0$. Этот факт и отражает соотношение (47).

Отметим, что построенное в [3] внешнее асимптотическое разложение температуры в виде

$$T(x_1, x_2, x_3) \sim \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x_1, x_2, x_3)\varepsilon^n, \tag{49}$$

отличном от (17), не позволяет отследить этого явления, хотя авторы в [3] претендуют на построение корректной асимптотики решения задачи теплопроводности при самых общих граничных условиях (11), (12), заданных на лицевых поверхностях пластины. Кроме того, согласно [3] функция $T_0(x_1, x_2)$ в разложении (49) должна удовлетворять разрешающему уравнению (16), дифференциальный оператор которого не зависит от коэффициентов «поперечной» теплопроводности λ_{31}, λ_{32}, λ_{33} (см. (7)), а правая часть в (16) указывает на то, что вклады в температуру от внутренних источников тепла Q и тепловых потоков, входящих в $q^{(\pm)}$ (см. (12)) и заданных на лицевых поверхностях пластины, имеют один порядок по ε, так как и Q, и $q^{(\pm)}$ определяют T_0 и все последующие функции T_n в разложении (49).

Дифференциальный же оператор, определяющий левые части разрешающих уравнений (35), (38), (44), полученных в настоящем исследовании, напротив, зависит от коэффициентов λ_{31}, λ_{32}, λ_{33}. Кроме того, из (17), (35), (38), (46) следует, что вклад в температуру от тепловых потоков $Q^{(\pm)}$, заданных на лицевых поверхностях пластины, на порядок по ε больше вклада от внутренних источников тепла Q, так как $Q^{(\pm)}$ определяют функцию T_0 и последующие T_n, $n = 1, 2, \ldots$ (см. (35)), а Q задает функцию $T_1^{(0)}$ и последующие T_n, $n = 2, 3, \ldots$ (см. (38)). Этот факт также имеет физическое объяснение. При уменьшении ε уменьшается объем пластины, а значит, в силу (14) уменьшается количество тепла Q_V, производимого в единицу времени во всей пластине внутренними источниками тепла Q, причем $Q_V \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, так как стремится к нулю объем пластины. Количество же тепла Q_*, привносимого в конструкцию в единицу времени за счет тепловых потоков $Q^{(\pm)}$, фиксировано и не зависит от ε (см. (48)). Поэтому тепловые потоки $Q^{(\pm)}$, заданные на лицевых поверхностях, оказывают большее влияние на температуру, чем внутренние источники тепла. (Асимптотика, построенная в [3], не отслеживает этого явления.)

Если лицевые поверхности пластины термоизолированы ($Q^{(\pm)} = 0$) и в асимптотических разложениях граничных условий, заданных на кромках пластины, отсутствуют слагаемые порядка $O(1/\varepsilon)$, то из (33), (35) получим

$$T_0(x_1, x_2) \equiv 0, \qquad T_1^{(1)}(x_1, x_2) \equiv 0, \tag{50}$$

но при наличии внутренних источников тепла ($Q \neq 0$) из (36), (38) следует

$$T_1^{(0)}(x_1, x_2) \neq 0, \qquad T_2^{(1)}(x_1, x_2) \neq 0. \tag{51}$$

Из соотношений (46), (50), (51) вытекает, что в рассматриваемом случае с точностью $O(\varepsilon^2)$ можно задать температуру линейно распределенной, но не постоянной, по толщине пластины; с точностью же $O(\varepsilon)$ можно считать температуру постоянной по толщине пластины за пределами погранслоя.

Если в каждой точке пластины одна из главных осей анизотропии ортогональна срединной плоскости, то $\lambda_{31} = \lambda_{32} = 0$. (Такими свойствами обладают, например, пластины, армированные в плоскостях, параллельных срединной плоскости конструкции.) В этом случае при термоизоляции лицевых поверхностей ($Q^{(\pm)} = 0$) и наличии внутренних источников тепла ($Q \neq 0$) из (33), (36) получаем

$$T_1^{(1)}(x_1, x_2) \equiv 0, \qquad T_2^{(1)}(x_1, x_2) \equiv 0 \tag{52}$$

независимо от того, имеются или нет слагаемые порядка $O(1/\varepsilon)$ в асимптотических разложениях граничных условий на кромках пластины (независимо от $T_0 \equiv 0$ или $T_0 \neq 0$). Следовательно, при $\lambda_{31} = \lambda_{32} = 0$ и $Q^{(\pm)} = 0$ из (46) вытекает, что с точностью $O(\varepsilon^2)$ температуру можно считать постоянной по толщине пластины за пределами погранслоя, так как $L_2(T_0) = 0$ (см. (35)). Если внутренние источники тепла распределены равномерно по толщине пластины ($Q \neq 0$, $Q_{,3} = 0$), то из (37) с учетом (38), (39) получим, что функция T_3 не зависит от x_3, поэтому при $Q_{,3} = 0$ за пределами погранслоя с точностью $O(\varepsilon^3)$ температуру в такой пластине можно считать постоянной по толщине. Если же лицевые поверхности не термоизолированы ($Q^{(\pm)} \neq 0$), то при $Q_{,3} = 0$, $\lambda_{31} = \lambda_{32} = 0$ для T_3 имеет место квадратичное распределение по x_3, поэтому из (17) следует, что с точностью $O(\varepsilon^3)$ распределение температуры за пределами погранслоя по толщине пластины можно задавать по квадратичному закону. Если же отсутствуют внутренние источники тепла ($Q \equiv 0$) и лицевые поверхности термоизолированы ($Q^{(\pm)} = 0$), то с учетом (52) и $L_2(T_0) = L_2\left(T_1^{(0)}\right) = 0$ (см. (35), (38)) из (39)–(45) получим, что $T_n(x_1, x_2, x_3) = T_n^{(0)}(x_1, x_2)$, т. е. за пределами погранслоя температура в пластине постоянна по толщине и определяется из уравнения $L_2(T) = 0$, $T_{,3} = 0$ (см. (7)).

В общем же случае, когда $\lambda_{31} \neq 0$, $\lambda_{32} \neq 0$, при термоизоляции лицевых поверхностей ($Q^{(\pm)} \equiv 0$) и отсутствии внутренних источников тепла ($Q \equiv 0$) температуру в пластине за пределами погранслоя нельзя считать постоянной по толщине (исключение составляет лишь случай постоянства температуры на кромках пластины, так как при этом $T(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$). Точность, с которой при этом можно считать температуру постоянной по толщине, зависит от особенностей асимптотического разложения граничных условий на кромках пластины. Так, если в этих разложениях отсутствуют слагаемые порядка $O(1/\varepsilon)$ (имеют место равенства (50)), но присутствуют непостоянные по контуру слагаемые порядка $O(1)$, то из (38) следует $T_1^{(0)} \neq \text{const}$ (хотя правая часть уравнения (38) равна нулю), а из (36) имеем $T_2^{(1)} \neq 0$, т.е. температура постоянна по толщине пластины по-прежнему с точностью $O(\varepsilon)$ (см. (46)), линейна с точностью $O(\varepsilon^2)$ и имеет квадратичное распределение с точностью $O(\varepsilon^3)$ (см. (17), (37)).

Если на лицевых поверхностях пластины теплообмен осуществляется за счет конвекции (возможно, с одновременным притоком (оттоком) тепла за счет теплового излучения), т. е. имеют место граничные условия (11), (12), где допускается $\alpha^{(+)} = 0$ или $\alpha^{(-)} = 0$ (но не одновременное равенство $\alpha^{(+)} = \alpha^{(-)} = 0$, что соответствует рассмотренному выше случаю граничных условий (9)), то в качестве внешнего асимптотического разложения температуры выберем (49).

После подстановки разложения (49) в (6), (11) получим уравнение

$$\sum_{n=2}^{\infty} L_2(T_{n-2})\varepsilon^n + \sum_{n=1}^{\infty} L_1(T_{n-1})\varepsilon^n + \lambda_{33} \sum_{n=0}^{\infty} T_{n,33}\, \varepsilon^n = -\varepsilon^2 Q(x_1, x_2, x_3) \tag{53}$$

и граничные условия

$$-\operatorname{sgn}(x_3)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda_{31}T_{n-1},_1+\lambda_{32}T_{n-1},_2\right]\varepsilon^n+\lambda_{33}\sum_{n=0}^{\infty}T_n,_3\,\varepsilon^n\right]-$$

$$-\alpha^{(\pm)}\sum_{n=1}^{\infty}T_{n-1}\varepsilon^n=\varepsilon q^{(\pm)}(x_1,x_2),\qquad x_3=\pm 1. \tag{54}$$

Собирая в (53), (54) слагаемые при одинаковых степенях ε, получим цепочку равенств для определения функций T_n:

$$\lambda_{33}T_0,_{33}=0,\qquad -\lambda_{33}T_0,_3=0,\qquad x_3=1,$$

$$\lambda_{33}T_0,_3=0,\qquad x_3=-1, \tag{55}$$

$$\lambda_{33}T_1,_{33}+L_1(T_0)=\lambda_{33}T_1,_{33}+L_0(T_0,_3)=0, \tag{56}$$

$$-\operatorname{sgn}(x_3)\big(\lambda_{33}T_1,_3+\lambda_{31}T_0,_1+\lambda_{32}T_0,_2\big)-\alpha^{(\pm)}T_0=q^{(\pm)},\qquad x_3=\pm 1, \tag{57}$$

$$\lambda_{33}T_2,_{33}+L_0(T_1,_3)+L_2(T_0)=-\,Q(x_1,x_2,x_3), \tag{58}$$

$$-\operatorname{sgn}(x_3)\big(\lambda_{33}T_2,_3+\lambda_{31}T_1,_1+\lambda_{32}T_1,_2\big)-\alpha^{(\pm)}T_1=0,\qquad x_3=\pm 1, \tag{59}$$

$$\lambda_{33}T_n,_{33}+L_0(T_{n-1},_3)+L_2(T_{n-2})=0,\qquad n=3,4,\ldots, \tag{60}$$

$$-\operatorname{sgn}(x_3)\big(\lambda_{33}T_n,_3+\lambda_{31}T_{n-1},_1+\lambda_{32}T_{n-1},_2\big)-\alpha^{(\pm)}T_{n-1}=0,\quad x_3=\pm 1,$$
$$n=3,4,\ldots. \tag{61}$$

Граничная задача (55) совпадает с (20), (21) и ее решение имеет вид (31), где функция $T_0(x_1,x_2)$ подлежит определению в дальнейшем. Уравнение (56) совпадает с (22) и его общий интеграл имеет вид (32), после подстановки которого в граничные условия (57) с учетом (12), (31) получим

$$T_0(x_1,x_2)=-\frac{q^{(+)}+q^{(-)}}{\alpha^{(+)}+\alpha^{(-)}}=-\frac{Q^{(+)}+Q^{(-)}}{\alpha^{(+)}+\alpha^{(-)}}+\frac{\alpha^{(+)}T_\infty^{(+)}+\alpha^{(-)}T_\infty^{(-)}}{\alpha^{(+)}+\alpha^{(-)}}, \tag{62}$$

$$T_1^{(1)}(x_1,x_2)=-\frac{1}{\lambda_{33}}\left(\frac{\alpha^{(-)}q^{(+)}-\alpha^{(+)}q^{(-)}}{\alpha^{(+)}+\alpha^{(-)}}+\lambda_{31}T_0,_1+\lambda_{32}T_0,_2\right), \tag{63}$$

т. е. T_0, $T_1^{(1)}$ – известные функции. Функция же $T_1^{(0)}$ в (32) подлежит определению в дальнейшем.

Общий интеграл уравнения (58) относительно T_2 с учетом (7), (32) имеет вид

$$T_2(x_1,x_2,x_3)=-\frac{1}{\lambda_{33}}\int_{-1}^{x_3}\int_{-1}^{s}Q(x_1,x_2,t)\,dt\,ds-\frac{1}{2\lambda_{33}}\left[L_2(T_0)+L_0\big(T_1^{(1)}\big)\right]x_3^2+$$

$$+\,T_2^{(1)}(x_1,x_2)x_3+T_2^{(0)}(x_1,x_2), \tag{64}$$

где $T_2^{(1)}$, $T_2^{(0)}$ – произвольные функции. Подставив (64) в граничные условия (59), после очевидных преобразований получим

$$T_1^{(0)}(x_1,x_2)=-\frac{q_2^{(+)}+q_2^{(-)}}{\alpha^{(+)}+\alpha^{(-)}},$$

$$T_2^{(1)}(x_1,x_2)=-\frac{1}{\lambda_{33}}\left(\frac{\alpha^{(-)}q_2^{(+)}-\alpha^{(+)}q_2^{(-)}}{\alpha^{(+)}+\alpha^{(-)}}+\lambda_{31}T_1^{(0)},_1+\lambda_{32}T_1^{(0)},_2\right), \tag{65}$$

где

$$q_2^{(+)}(x_1,x_2)\equiv-\int_{-1}^{1}Q\,dx_3+\lambda_{31}T_1^{(1)},_1+\lambda_{32}T_1^{(1)},_2-L_2(T_0)-L_0\big(T_1^{(1)}\big)+\alpha^{(+)}T_1^{(1)},$$

$$q_2^{(-)}(x_1,x_2)\equiv\lambda_{31}T_1^{(1)},_1+\lambda_{32}T_1^{(1)},_2-L_2(T_0)-L_0\big(T_1^{(1)}\big)-\alpha^{(-)}T_1^{(1)}, \tag{66}$$

т. е. в силу (62), (63) $q_2^{(\pm)}$, а значит, и $T_1^{(0)}$, $T_2^{(1)}$ – известные функции. Функция же $T_2^{(0)}$ в (64) подлежит определению в дальнейшем.

Общий интеграл уравнения (60) относительно T_n с учетом (7) имеет вид

$$T_n(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{\lambda_{33}} L_2 \left(\int_{-1}^{x_3} \int_{-1}^{s} T_{n-2}(x_1, x_2, t)\, dt\, ds \right) -$$

$$-\frac{1}{\lambda_{33}} L_0 \left(\int_{-1}^{x_3} \int_{-1}^{s} T_{n-1},_3 (x_1, x_2, t)\, dt\, ds \right) + T_n^{(1)}(x_1, x_2)\, x_3 + T_n^{(0)}(x_1, x_2)\,,$$

$$n = 3, 4, 5, \ldots\ . \qquad (67)$$

Предположим, что функции T_{n-2}, $T_{n-1},_3$ уже известны (при $n = 3$ это действительно так: $T_{n-2} = T_1$ определена в (32) с учетом равенств (63), (65), а $T_{n-1},_3 = T_2,_3$ определяется дифференцированием по x_3 соотношения (64) с учетом (65)). Тогда в (67) неизвестны лишь $T_n^{(1)}$, $T_n^{(0)}$, а также не определена функция $T_{n-1}^{(0)}(x_1, x_2)$, не входящая в (67).

Для удобства дальнейшего изложения представим функции T_m в виде

$$T_m(x_1, x_2, x_3) = T_m^{**}(x_1, x_2, x_3) + T_m^{(0)}(x_1, x_2), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (68)$$

при этом выполняются соотношения $T_m,_3 = T_{m,3}^{**}$ и (см. (31), (32))

$$T_0^{**} \equiv 0, \qquad T_1^{**}(x_1, x_2, x_3) = T_1^{(1)}(x_1, x_2)\,,$$

T_2^{**} определяется правой частью равенства (64), если в ней отбросить последнее слагаемое $T_2^{(0)}$. Следовательно, при $m = 0, 1, 2$ функции T_m^{**} уже известны.

Подставив (67) в граничные условия (61), после очевидных преобразований получим

$$T_{n-1}^{(0)}(x_1, x_2) = -\frac{q_n^{(+)} + q_n^{(-)}}{\alpha^{(+)} + \alpha^{(-)}}\,,$$

$$T_n^{(1)}(x_1, x_2) = -\frac{1}{\lambda_{33}} \left(\frac{\alpha^{(-)} q_n^{(+)} - \alpha^{(+)} q_n^{(-)}}{\alpha^{(+)} + \alpha^{(-)}} + \lambda_{31} T_{n-1}^{(0)},_1 + \lambda_{32} T_{n-1}^{(0)},_2 \right),$$

$$n = 3, 4, \ldots\ , \qquad (69)$$

где

$$q_n^{(+)} \equiv \lambda_{31} T_{n-1}^{**},_1 (1) + \lambda_{32} T_{n-1}^{**},_2 (1) - L_2 \left(\int_{-1}^{1} T_{n-2}\, dx_3 \right) -$$

$$- L_0 \left(T_{n-1}^{**}(1) - T_{n-1}^{**}(-1) \right) + \alpha^{(+)} T_{n-1}^{**}(1)\,,$$

$$q_n^{(-)} \equiv \lambda_{31} T_{n-1}^{**},_1 (-1) + \lambda_{32} T_{n-1}^{**},_2 (-1) + \alpha^{(-)} T_{n-1}^{**}(-1), \qquad n = 3, 4, 5, \ldots, \qquad (70)$$

$$T_{n-1}^{**}(\pm 1) \equiv T_{n-1}^{**}\Big|_{x_3 = \pm 1}\,, \qquad T_{n-1}^{**},_i (\pm 1) \equiv T_{n-1}^{**},_i \Big|_{x_3 = \pm 1}\,, \qquad i = 1, 2\,,$$

причем в силу (67)

$$T_{n-1}^{**}(-1) = -\, T_{n-1}^{(1)}\,.$$

Из сравнения (67), (68) получаем, что T_n^{**} определяется правой частью равенства (67), если в ней отбросить последнее слагаемое $T_n^{(0)}$, и в силу (69), (70) является известной функцией. Следовательно, по схеме (67)–(70) можно последовательно определить все функции T_n, $n = 3, 4, 5, \ldots$, в разложении (49).

Таким образом, при задании на лицевых поверхностях пластины конвективного теплообмена (11), (12) все неизвестные функции в разложении (49) определяются равенствами (31), (32), (64), (67), в которых произвольные функции задаются конечными соотношениями (62), (63), (65), (69) и нет необходимости определять их из двумерных эллиптических уравнений вида (35), (38), (44), как это было в случае задания на лицевых поверхностях тепловых потоков (9). (В [3] же при граничных условиях (11), (12) указанные произволы определяются из эллиптических уравнений, аналогичных (16).)

Из (49), (62), (65), (66) следует, что как в случае задания граничных условий (9), так и при задании (11), (12) тепловые потоки $Q^{(\pm)}$ (за счет теплового излучения) и конвективный теплообмен на лицевых поверхностях пластины оказывают на температуру на порядок по ε большее влияние, чем внутренние источники тепла, так как потоки $Q^{(\pm)}$ и конвективный теплообмен определяют функцию T_0 (см. (62)) и все последующие T_n, $n = 1, 2, \ldots$, а плотность мощности внутренних источников тепла Q определяет $T_1^{(0)}$ (см. (65), (66)) и все последующие функции T_n, $n = 2, 3, \ldots$. Этот факт имеет то же физическое объяснение, что и в случае задания граничных условий (9). (Как уже отмечалось, построенная в [3] асимптотика не отслеживает этого факта при граничных условиях (11), (12), что следует из уравнения (16).)

Из соотношений (49), (31), (32), (62), (63), (65) вытекает, что при задании конвективного теплообмена на лицевых поверхностях температуру за пределами погранслоя с точностью $O(\varepsilon^2)$ можно считать линейно распределенной по толщине пластины, а при учете (64) и равномерном распределении по толщине плотности мощности внутренних источников тепла ($Q_{,3} = 0$) с точностью $O(\varepsilon^3)$ температуру за пределами погранслоя можно задавать по квадратичному закону по толщине конструкции.

Попытка построить асимптотическое разложение решения задачи теплопроводности пластины при граничных условиях (11), (12) в виде (17) приводит к равенству $T_0 \equiv 0$, т. е. в разложении (17) отсутствует слагаемое порядка $O(1/\varepsilon)$. Следовательно, в конечном итоге приходим к разложению типа (49). Отсутствие в асимптотическом разложении температуры слагаемого порядка $O(1/\varepsilon)$ при задании конвективного теплообмена на лицевых поверхностях имеет физическое объяснение. При уменьшении ε уменьшаются толщина и площадь торцевой поверхности пластины на кромках, а также объем конструкции, поэтому при $\varepsilon \to 0$ уменьшаются по модулю приток (отток) тепла через кромки и производство тепла за счет внутренних источников (стоков). Однако при некоторой конечной температуре устанавливается тепловой баланс между притоком (оттоком) тепла через лицевые поверхности за счет теплового излучения $Q^{(\pm)}$ и конвективного теплообмена ($\alpha^{(\pm)} \neq 0$). Такой баланс был бы невозможен, если бы в асимптотическом разложении температуры присутствовало слагаемое порядка $O(1/\varepsilon)$, так как в этом случае получили бы $|T| \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$ и отток (приток) тепла за счет конвективного теплообмена был бы неограниченно большим по модулю, а приток (отток) тепла за счет потоков $Q^{(\pm)}$ – ограничен и фиксирован (см. (48)).

В граничных условиях (10) или (11) безразмерные коэффициенты $\alpha^{(\pm)}$, характеризующие критерий Био [3], могут быть порядка единицы, а могут быть большими и малыми величинами по сравнению с единицей. Так, для медной пластины ($\bar{\lambda}_{ii} = 400$ Вт/(м · К) [6]) с характерным размером в плане $a = 1$ м при свободной конвекции воды ($\bar{\alpha}^{(\pm)} = 500$ Вт/(м$^2 \cdot$ К) [5]) безразмерный коэффициент теплообмена $\alpha^{(\pm)} = 5/4 = 1.25$ (см. (13)); при свободной конвекции газов ($\bar{\alpha}^{(\pm)} = 30$ Вт/(м$^2 \cdot$ К) [5]) для той же пластины получаем $\alpha^{(\pm)} = 3/40 = 0.075$; в случае вынужденной конвекции воды ($\bar{\alpha}^{(\pm)} = 10000$ Вт/(м$^2 \cdot$ К) [5]) для указанной пластины имеем $\alpha^{(\pm)} = 100/4 = 25$, а для стальной пластины ($\bar{\lambda}_{ii} = 45$ Вт/(м · К) [6]) тех же размеров $\alpha^{(\pm)} = 10000/45 = 222.22$. Следовательно, при определенных условиях теплообмена безразмерные величины $\alpha^{(\pm)}$ можно рассматривать как независимые от ε малые или большие параметры, а значит, вместо (49) можно построить асимптотическое разложение температуры по трем параметрам ε, $\alpha^{(+)}$, $\alpha^{(-)}$, что и было проделано авторами. Однако величины $\alpha^{(\pm)}$ не входят в уравнение теплопроводности (6), а определяют лишь граничные условия (10) или (11), (12), поэтому такое разложение не приводит к принципиальному упрощению двумерных разрешающих уравнений для коэффициентов асимптотического ряда, но порождает громоздкую цепочку равенств. Основные асимптотические свойства, порождаемые параметрами $\alpha^{(\pm)}$, можно отследить, используя равенства (62), (63), (65), (69).

При интенсивном конвективном теплообмене хотя бы на одной из лицевых поверхностей ($\alpha^{(+)} \gg 1$ или $\alpha^{(-)} \gg 1$, или $\alpha^{(\pm)} \gg 1$) и $Q^{(\pm)} \neq 0$ первое слагаемое в правой части равенства (62) является малой величиной и стремится к нулю в предельном случае $\alpha^{(+)} \to \infty$ или $\alpha^{(-)} \to \infty$, или $\alpha^{(\pm)} \to \infty$, т. е. вклад в T_0 от теплового излучения (от потоков $Q^{(\pm)}$) мал, однако он может оказать значительное влияние на функцию $T_1^{(1)}$ (см. (63), (12)). Второе же слагаемое в правой части (62) при любых (малых и больших) значениях $\alpha^{(\pm)}$ определяет среднее по правилу смеси значение от безразмерных температур $T_\infty^{(\pm)}$ окружающей среды по разные стороны лицевых поверхностей пластины. Если же на обеих лицевых поверхностях осуществляется неинтенсивный конвективный теплообмен ($\alpha^{(\pm)} \ll 1$), то при $Q^{(\pm)} \neq 0$ первое слагаемое в правой части (62) может быть велико по модулю, который неограниченно возрастает в предельном случае $\alpha^{(\pm)} \to 0$. При этом функция T_0 имеет порядок $O(1/\alpha^{(\pm)})$ при $\alpha^{(\pm)} \to 0$. Если же тепловой поток отсутствует, то $T_0 = O(1)$, $\alpha^{(\pm)} \to 0$ (см. (62) при $Q^{(\pm)} = 0$). Аналогичными асимптотическими свойствами обладают и функции $T_1^{(0)}, T_{n-1}^{(0)}$ (см. (65), (69) с учетом (66), (70)).

Если из каких-то требований, например жизнеобеспечения, необходимо на одной из лицевых поверхностей пластины, например нижней ($x_3 = -1$), поддерживать фиксированную температуру ($T^{(-)}$), а на второй поверхности, например верхней ($x_3 = 1$), задан конвективный теплообмен, то смешанные из (8), (11) граничные условия примут вид

$$T(x_1, x_2, -1) = T^{(-)}(x_1, x_2),$$

$$-\varepsilon\left(\lambda_{31}T_{,1} + \lambda_{32}T_{,2}\right) - \lambda_{33}T_{,3} - \varepsilon\alpha^{(+)}T = \varepsilon q^{(+)}(x_1, x_2), \qquad x_3 = 1. \tag{71}$$

Используя асимптотическое разложение (49), из уравнения теплопроводности (6) и граничных условий (71) для коэффициентов разложения T_n получим цепочку уравнений (20), (56), (58), (60) и соответствующие им граничные условия:

$$T_0(x_1, x_2, -1) = T^{(-)}(x_1, x_2), \qquad -\lambda_{33}T_{0,3}(x_1, x_2, 1) = 0, \tag{72}$$

$$T_1(x_1, x_2, -1) = 0,$$

$$\lambda_{31}T_{0,1} + \lambda_{32}T_{0,2} + \lambda_{33}T_{1,3} + \alpha^{(+)}T_0 = -q^{(+)}(x_1, x_2), \qquad x_3 = 1, \tag{73}$$

$$T_n(x_1, x_2, -1) = 0,$$

$$\lambda_{31}T_{n-1,1} + \lambda_{32}T_{n-1,2} + \lambda_{33}T_{n,3} + \alpha^{(+)}T_{n-1} = 0, \qquad x_3 = 1, \qquad n \geq 2. \tag{74}$$

Подставив общий интеграл (30) уравнения (20) в граничные условия (72), получим

$$T_0^{(1)} \equiv 0, \qquad T_0 = T_0^{(0)}(x_1, x_2) = T^{(-)}(x_1, x_2), \qquad T_{0,3} = 0. \tag{75}$$

Подстановка общего интеграла (32) уравнения (56), полученного с учетом соотношений (75), в граничные условия (73) дает

$$T_1^{(0)}(x_1, x_2) = T_1^{(1)}(x_1, x_2) = -\left[q^{(+)} + \alpha^{(+)} T_0 + \lambda_{31} T_{0,1} + \lambda_{32} T_{0,2}\right] / \lambda_{33}. \tag{76}$$

Общий интеграл уравнения (58) имеет вид (64), где с учетом (75), (76) неизвестны лишь функции $T_2^{(0)}$, $T_2^{(1)}$. После подстановки (64) в граничные условия (74) (при $n = 2$) получим

$$T_2^{(1)} = \frac{1}{\lambda_{33}}\left[L_2(T_0) + L_0\left(T_1^{(1)}\right) + \int_{-1}^{1} Q\, dx_3 - \lambda_{31}\left(T_1^{(1)} + T_1^{(0)}\right)_{,1} - \right.$$
$$\left. - \lambda_{32}\left(T_1^{(1)} + T_1^{(0)}\right)_{,2} - \alpha^{(+)}\left(T_1^{(1)} + T_1^{(0)}\right)\right],$$
$$T_2^{(0)} = T_2^{(1)} + \frac{1}{2\lambda_{33}}\left[L_2(T_0) + L_0\left(T_1^{(1)}\right)\right]. \tag{77}$$

Общий интеграл уравнения (60) имеет вид (67), где функции T_{n-2}, T_{n-1} предположим уже известными (при $n = 3$ это действительно так, см. (32), (64) с учетом (76), (77)). Тогда после подстановки (67) в граничные условия (74) будем иметь

$$T_n^{(0)}(x_1, x_2) = T_n^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_{33}}\left[T_{n-1}(1) - T_{n-1}(-1) + \right.$$
$$\left. + \int_{-1}^{1} T_{n-2}\, dx_3 - \lambda_{31} T_{n-1,1}(1) - \lambda_{32} T_{n-1,2}(1) - \alpha^{(+)} T_{n-1}(1)\right],$$
$$T_{n-1}(\pm 1) \equiv T_{n-1}\big|_{x_3 = \pm 1}, \qquad T_{n-1,i}(1) \equiv T_{n-1,i}\big|_{x_3 = 1}, \qquad n \ge 3. \tag{78}$$

Используя равенства (67), (78), можно последовательно определить все функции T_n, $n = 3, 4, \ldots$, в разложении (49).

Таким образом, при граничных условиях (71) все неизвестные функции в разложении (49) определяются равенствами (31), (32), (64), (67), в которых произвольные функции задаются конечными соотношениями (75)–(78). Температура обладает теми же асимптотическими (по ε) свойствами, что и при задании граничных условий (11), (12) на обеих лицевых поверхностях: за пределами погранслоя с точностью $O(\varepsilon^2)$ температуру можно считать линейно распределенной по толщине пластины, а при однородном по толщине распределении внутренних источников тепла ($Q_{,3} = 0$) с точностью $O(\varepsilon^3)$ температуру можно задавать по квадратичному закону в поперечном направлении x_3. Если задан интенсивный конвективный теплообмен ($\alpha^{(+)} \gg 1$), то из (76)–(78) следует, что функции $T_n^{(0)}$, $T_n^{(1)}$, $n \ge 1$, могут иметь большие по модулю значения, которые неограниченно возрастают в предельном случае $\alpha^{(+)} \to \infty$. При малом значении $\alpha^{(+)} \ll 1$ из тех же равенств получаем $T_n^{(0)} = O(1)$, $T_n^{(1)} = O(1)$ при $\alpha^{(+)} \to 0$, т. е. все коэффициенты T_n асимптотического ряда (49) остаются ограниченными по модулю.

Построенные выше внешние асимптотические разложения температуры могут привести к невязкам в граничных условиях на кромках пластины [4], для устранения которых можно использовать обычную процедуру [3, 4] введения в окрестности контура внутренних «растянутых» переменных в плане пластины, соответствующих x_1, x_2, и построения внутреннего асимптотического разложения для погранслоя с последующим «сшиванием» (согласованием) его с внешним разложением. Изучение этих вопросов выходит за рамки настоящей статьи в силу ограниченности ее объема.

Полученные в настоящей работе внешние асимптотические разложения и сделанные на их основе оценки точности представления температуры по линейному или квадратичному закону распределения по толщине пластины могут быть использованы при расчетах на прочность и податливость тонкостенных конструкций, так как используемые на практике приближенные теории изгиба пластин (Кирхгофа, Тимошенко и др. [1]) дают приемлемую точность лишь на некотором удалении от кромок пластины или линий искажения напряженного состояния, т. е. за пределами погранслоя и локальных эффектов, распространяющихся вглубь конструкции на расстояние порядка ее толщины [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02−01−00115).

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин (прочность, устойчивость и колебания). − Москва: Наука, 1967. − 268 с.
2. *Гуров К. П.* Феноменологическая термодинамика необратимых процессов. − Москва: Наука, 1978. − 128 с.
3. *Зино И. Е., Тропп Э. А.* Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. − Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. − 224 с.
4. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. − Москва: Наука, 1989. − 336 с.
5. *Луканин В. Н., Шатров М. Г., Камфер Г. М. и др.* Теплотехника. − Москва: Высш. шк., 2003. − 671 с.
6. *Физические* свойства сталей и сплавов, применяемых в энергетике: Справочник. − Москва − Ленинград: Энергия, 1967. − 240 с.

УТОЧНЕННЯ АСИМПТОТИЧНИХ РОЗВИНЕНЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ АНІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИН

Побудовано зовнішні асимптотичні розклади розв'язків задачі стаціонарної теплопровідності анізотропних пластин при різних граничних умовах на лицьових поверхнях. Проаналізовано отримані двовимірні розв'язувальні рівняння і досліджено асимптотичні властивості розв'язків задачі теплопровідності. Отримано оцінки точності, з якою температуру в пластині поза примежовим шаром можна вважати лінійно або квадратично розподіленою по товщині конструкції. Виконано порівняння з асимптотикою, побудованою раніше іншими авторами.

REVISION OF ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF SOLUTIONS TO THE PROBLEM ON HEAT CONDUCTION OF ANISOTROPIC PLATES

The external asymptotic expansion of solutions to the problem on stationary heat conduction of anisotropic plates under various boundary conditions on the facial surfaces are constructed. The obtained bidimensional resolving equations are analyzed and the asymptotic properties of solutions to the problem of heat conduction are studied. Estimations of accuracy, with which the temperature in the plate outside the boundary layer can be considered linearly or quadratically distributed through the thickness, are obtained. Comparison with asymptotic integrations, constructed earlier by other authors, is carried out.

Ин-т теорет. и прикл. механики
СО РАН, Новосибирск, Россия

Получено
22.03.04