

## СВЯЗАННЫЕ ТЕРМОУПРУГИЕ ПОЛЯ В СЛОЕ ПРИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ВОЗБУЖДЕНИЯХ

Построена полная система однородных решений уравнений связанной задачи термоупругости для слоя в  $\mathbb{R}^3$  с учетом конечной скорости распространения тепла. С учетом структуры однородных решений получена матрица фундаментальных решений, соответствующая действию в слое гармонических во времени сосредоточенных усилий и тепловых источников. Рассмотрены примеры сосредоточенных гармонических и импульсных возбуждений слоя.

Одним из эффективных методов решения граничных задач математической физики является метод однородных решений. Он достаточно хорошо отработан в задачах гидродинамики и теплопроводности, упругости и электроупругости [2, 5, 7, 9, 11–14, 18] и др. В данной статье схема построения однородных решений распространена на уравнения связанной термоупругости для слоя.

Отметим, что при решении трехмерных граничных задач для пластин методом однородных решений возникает проблема соответствия между граничными условиями теории упругости и граничными условиями для счетной совокупности метагармонических функций, входящих в однородные решения. Этот вопрос рассматривался в [2]. Если конфигурация области отлична от круговой, то целесообразно использовать технику сингулярных или регулярных интегральных уравнений в сочетании с методом однородных решений. В работе [15] было найдено взаимно однозначное соответствие между плотностями в интегральных представлениях метагармонических функций и физическими величинами – скачками кинематических величин на граничных поверхностях разрезов. Этот путь неудобен тем, что приводит к необходимости регуляризации расходящихся интегралов и, как следствие, – к одномерным интегро-дифференциальным уравнениям достаточно сложной структуры [4, 15, 17, 20].

В связи со сказанным одним из авторов был предложен новый подход к решению пространственных стационарных динамических и статических задач упругости для многосвязных плит, опирающийся не на однородные, а на  $2h$ -периодические фундаментальные решения для слоя. На этом пути удастся избежать указанных выше трудностей, приходя к хорошо изученным одномерным интегральным уравнениям. Матрицы фундаментальных решений в упругости и электроупругости для слоя построены в [16, 19]. Ниже схема построения  $2h$ -периодических фундаментальных решений распространяется на связанную задачу термоупругости.

**1. Однородные решения.** Основная система уравнений связанной термоупругости [1, 3, 10] после исключения временного множителя  $e^{-i\omega t}$  принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta U_j + \sigma \partial_j e - \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \alpha_T \partial_j U_4 + \gamma_2^2 U_j + \frac{1}{\mu} X_j^* &= 0, \quad j = 1, 2, 3, \\ \Delta U_4 + (\gamma_T^2 + i\gamma^2) U_4 + m\omega(i + \tau^*\omega) e + \frac{Q^*}{\lambda_T} (1 - i\omega\tau^*) &= 0, \\ \gamma_T^2 = \frac{\omega^2}{V_T^2}, \quad \gamma^2 = \frac{\omega^2}{a^2}, \quad \gamma_2^2 = \frac{\omega^2}{V_2^2}, \quad m = \sigma E T_0 \frac{\alpha_T}{\lambda_T}, \quad a^2 = \frac{\lambda_T}{\rho c_\varepsilon}, \\ \sigma = \frac{1}{1 - 2\nu}, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \Delta = \partial_j \partial_j, \quad e = \partial_k U_k, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $U_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $U_4$ ,  $X_j^*$  и  $Q^*$  – амплитуды перемещений  $u_j$ , температуры  $\theta = T - T_0$ , интенсивностей объемных сил  $F_j$  и тепловых источников  $Q$  соответственно;  $E$ ,  $\nu$ ,  $\rho$  – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность;  $\alpha_T$ ,  $\lambda_T$ ,  $c_e$  – коэффициенты линейного расширения, теплопроводности и удельная теплоемкость материала;  $V_T$  и  $V_2$  – скорости распространения тепловых и механических сдвиговых возмущений в среде;  $T_0$  – температура тела в исходном невозмущенном состоянии;  $\tau^*$  – время релаксации теплового потока;  $\omega$  – круговая частота.

Амплитуды тензора напряжения определяются равенствами [10]

$$S_{ij} = \mu (\partial_i U_j + \partial_j U_i) + [\lambda e - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T U_4] \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

При построении однородных решений уравнений (1) полагаем  $X_j = 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ , и  $Q = 0$ . В декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$  рассмотрим слой  $-\infty < x_1, x_2 < \infty$ ,  $|x_3| \leq h$  при следующих граничных условиях на его основаниях  $x_3 = \pm h$ :

$$u_3 = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_3} = 0.$$

Согласно установившейся в литературе терминологии решения однородной системы (1) при однородных граничных условиях на основаниях слоя называются однородными [9, 11].

Из (1) обычным приемом исключим неизвестные  $U_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . В результате приходим к системе относительно функций  $U_4$  и  $e$  вида

$$\Delta e + \gamma_1^2 e - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \Delta U_4 = 0,$$

$$\omega m^* e + (\Delta + \gamma_T^2 + i\gamma^2) U_4 = 0, \quad m^* = m(i + \omega \tau^*).$$

Отсюда получаем

$$(\Delta \Delta + a_* \Delta + b_*) U_4 = 0, \quad e = -\frac{1}{\omega m^*} (\Delta + \gamma_T^2 + i\gamma^2) U_4, \quad (3)$$

где

$$a_* = \gamma_1^2 + \gamma_T^2 + i\gamma^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \omega m^* \alpha_T,$$

$$b_* = \gamma_1^2 (\gamma_T^2 + i\gamma^2), \quad \gamma_2^2 = (1 + \sigma) \gamma_1^2.$$

Первое уравнение (3) интегрируем операторным методом [9]. Имея в виду симметричное решение, находим

$$U_4 = \sum_{j=1}^2 \operatorname{ch} k_j x_3 C_j^*(x_1, x_2),$$

$$e = -\frac{1}{\omega m^*} \sum_{j=1}^2 (\zeta_j^2 + \gamma_T^2 + i\gamma^2) \operatorname{ch} k_j x_3 C_j^*(x_1, x_2),$$

$$\zeta_{1,2} = -\frac{a_*}{2} \pm \sqrt{\frac{a_*^2}{4} - b_*}, \quad k_{1,2}^2 = \zeta_{1,2} - \beta^2, \quad \beta^2 = \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2. \quad (4)$$

Возвращаясь теперь к исходной системе (1) и вводя туда выражения для функции  $U_4$  и  $e$  из (4), получаем три несвязанных уравнения

$$(\Delta + \gamma_2^2)U_k = \sum_{j=1}^2 a_j \partial_k \operatorname{ch} k_j x_3 C_j^*, \quad k = 1, 2, 3, \quad (5)$$

$$a_j = \sigma_0(\zeta_j + \gamma_T^2 + i\gamma^2) + \alpha_0, \quad \sigma_0 = \frac{\sigma}{\omega m^*}, \quad \alpha_0 = 2(1 + \nu)\sigma\alpha_T.$$

Интегрируя уравнения (5), получаем

$$U_k(x) = \cos \delta x_3 A_k + \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\zeta_j + \gamma_2^2} \partial_k \operatorname{ch} k_j x_3 e_j, \quad k = 1, 2,$$

$$U_3(x) = -\delta^{-1} \sin \delta x_3 (\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2) + \sum_{j=1}^2 \frac{k_j}{\zeta_j + \gamma_2^2} \operatorname{sh} k_j x_3 C_j, \quad (6)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad \delta^2 = \beta^2 + \gamma_2^2, \quad C_j = a_j C_j^*(x_1, x_2), \quad A_k = A_k(x_1, x_2).$$

Соотношения (4), (6) представляют симметричное решение системы (1) в операторной форме.

Разложим функции  $A_k(x_1, x_2)$  на потенциальную и вихревую части:

$$A_1 = h^2(\partial_1 \Psi_1 + \partial_2 \Psi_2), \quad A_2 = h^2(\partial_2 \Psi_1 - \partial_1 \Psi_2)$$

и введем их в выражения (6). Вычисляя по формулам (2), (4) амплитуды напряжений  $S_{13}$ ,  $S_{23}$ , а также  $\partial U_4 / \partial x_3$ , приходим из граничных условий  $U_3 = S_{13} = S_{23} = 0$ ,  $\partial_3 U_4 = 0$  на основаниях слоя  $x_3 = \pm h$  к следующей системе соотношений:

$$\partial_1 u - \partial_2 v = 0, \quad \partial_2 u + \partial_1 v = 0,$$

$$\sum_{j=1}^2 \frac{k_j}{\zeta_j + \gamma_2^2} \operatorname{sh} k_j h C_j - h^2 \delta^{-1} \sin \delta h \nabla^2 \Psi_1 = 0,$$

$$\sum_{j=1}^2 k_j \operatorname{sh} k_j h C_j = 0,$$

$$u = -h^2 \delta^{-1} \sin \delta h (\nabla^2 + \delta^2) \Psi_1 + 2 \sum_{j=1}^2 \frac{k_j}{\zeta_j + \gamma_2^2} \operatorname{sh} k_j h C_j,$$

$$v = h^2 \delta \sin \delta h \Psi_2. \quad (7)$$

Первые два уравнения в (7) представляют собой равенства Коши – Римана, откуда получаем

$$u = \operatorname{Re} f(z), \quad v = \operatorname{Im} f(z), \quad (8)$$

где  $f(z)$  – произвольная аналитическая функция комплексного переменного  $z = x_1 + ix_2$ .

Интегрируя второе из уравнений (8), находим

$$\Psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^{(2)} + \frac{\operatorname{Im} f(z)}{\gamma_2 h^2 \sin(\gamma_2 h)}, \quad (\nabla^2 + \mu_n^2) \psi_n^{(2)} = 0, \quad (9)$$

$$\mu_n^2 = \gamma_2^2 - \lambda_n^2, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{h}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Таким образом, функция  $\Psi_2$ , ответственная за вихревую часть однородных решений, представлена набором метагармонических функций  $\psi_n^{(2)}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Оставшиеся уравнения в (7) в совокупности со вторым из уравнений (8) можно преобразовать к равносильной форме

$$\delta^{-1} \sin \delta h \Psi_1 = -\frac{\operatorname{Re} f(z)}{h^2 \gamma_2^2}, \quad \sum_{j=1}^2 \frac{k_j}{\zeta_j + \gamma_2^2} \operatorname{sh} k_j h C_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^2 k_j \operatorname{sh} k_j h C_j = 0. \quad (10)$$

Интегрирование первого операторного уравнения (10) дает

$$\Psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^{(1)} - \frac{\operatorname{Re} f(z)}{\gamma_2 h^2 \sin(\gamma_2 h)}, \quad (11)$$

где  $\Psi_n^{(1)}$  – метагармонические функции, удовлетворяющие тому же уравнению, что и функции  $\Psi_n^{(2)}$ .

Наконец, интегрируя два последних уравнения (10), находим

$$C_k = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(k)}, \quad (\nabla^2 + \varepsilon_{kn}^2) \varphi_n^{(k)} = 0, \quad (12)$$

$$\varepsilon_{kn}^2 = -\lambda_n^2 - \zeta_k, \quad k = 1, 2, \quad n = 0, 1, \dots$$

Искомые однородные решения находим, реализуя фигурирующие в формулах (6) оператор-функции с учетом соотношений (9), (11) и (12). Окончательно после преобразований получаем

$$U_1 = h^2 \partial_2 \Psi_0^{(2)} + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial_1 \Phi_0^{(j)}}{\zeta_j + \gamma_2^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ h^2 (\partial_1 \Psi_n^{(1)} + \partial_2 \Psi_n^{(2)}) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial_1 \Phi_n^{(j)}}{\zeta_j + \gamma_2^2} \right\} \cos \lambda_n x_3,$$

$$U_2 = -h^2 \partial_1 \Psi_0^{(2)} + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial_2 \Phi_0^{(j)}}{\zeta_j + \gamma_2^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ h^2 (\partial_2 \Psi_n^{(1)} - \partial_1 \Psi_n^{(2)}) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial_2 \Phi_n^{(j)}}{\zeta_j + \gamma_2^2} \right\} \cos \lambda_n x_3,$$

$$U_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ h^2 \frac{\mu_n^2}{\lambda_n} \Psi_n^{(1)} - \lambda_n \sum_{j=1}^2 \frac{\Phi_n^{(j)}}{\zeta_j + \gamma_2^2} \right\} \sin \lambda_n x_3,$$

$$U_4 = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^2 \frac{1}{a_j} \varphi_n^{(j)} \right) \cos \lambda_n x_3. \quad (13)$$

Как и следовало ожидать, аналитическая функция  $f(z)$  не входит в окончательный результат.

**2. Фундаментальные решения для слоя.** Пусть вдоль шнура  $x_1 = x_{10}$ ,  $x_2 = x_{20}$ ,  $|x_3| \leq h$  распределены усилия  $Y_j = \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} X_j)$  или тепловые источники  $q = \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} Q)$  с амплитудами

$$\{X_1, X_2, Q\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{P_{1n}, P_{2n}, P_{4n}\} \cos \lambda_n x_3, \quad X_3 = \sum_{n=1}^{\infty} P_{3n} \sin \lambda_n x_3. \quad (14)$$

Полевые величины, исходя из структуры однородных решений (13), будем разыскивать в виде

$$\{U_1, U_2, U_4\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{U_{1n}, U_{2n}, U_{4n}\} \cos \lambda_n x_3, \quad U_3 = \sum_{n=1}^{\infty} P_{3n} \sin \lambda_n x_3,$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} e_n \cos \lambda_n x_3, \quad e_n = \partial_1 U_{1n} + \partial_2 U_{2n} + \lambda_n U_{3n}. \quad (15)$$

Исключая из (1) время и толщинную координату  $x_3$ , с учетом соотношений (14), (15) получаем систему дифференциальных уравнений относительно коэффициентов Фурье полевых величин

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 + \mu_n^2)U_{kn} + \partial_k \left( \sigma e_n - \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \alpha_T U_{4n} \right) + \frac{P_{kn}}{\mu} \delta(x) &= 0, \quad k = 1, 2, 3, \\
(\nabla^2 + d_n^2)U_{4n} + \omega m^* e_n + \frac{P_{4n}}{\lambda_T} (1 - i\omega\tau^*) \delta(x) &= 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (16) \\
\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \quad \partial_3 = -\lambda_n, \quad d_n^2 = \gamma_T^2 + i\gamma^2 - \lambda_n^2,
\end{aligned}$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция [1].

Отсюда получаем сначала систему из двух уравнений относительно неизвестных  $U_{4n}$  и  $e_n$ :

$$\begin{aligned}
\ell_{11}e_n - \ell_{12}U_{4n} &= -\frac{p_{1n}\partial_1 + p_{2n}\partial_2 + p_{3n}\lambda_n}{\mu(\sigma + 1)} \delta(x), \\
\ell_{21}e_n + \ell_{22}U_{4n} &= -\frac{p_{4n}}{\lambda_T} (1 - i\omega\tau^*) \delta(x), \quad (17) \\
\ell_{11} = \nabla^2 + \gamma_1^2 - \lambda_n^2, \quad \ell_{12} = \frac{1+v}{1-v} \alpha_T (\nabla^2 - \lambda_n^2), \quad \ell_{21} = \omega m^*, \quad \ell_{22} = \nabla^2 + d_n^2.
\end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения целесообразно провести для четырех различных вариантов возбуждения. Подробно рассмотрим первый случай:  $X_1 \neq 0$ ,  $X_2 = X_3 = Q = 0$ .

В этом случае полагаем  $e_n = \ell_{22}\Phi_n^{(1)}$ ,  $U_{4n} = -\ell_{21}\Phi_n^{(1)}$ . Тогда второе из уравнений (17) будет удовлетворено тождественно, а первое примет вид

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 \nabla^2 + A_n \nabla^2 + B_n) \Phi_n^{(1)} &= -\frac{p_{1n}}{\mu(\sigma + 1)} \partial_1 \delta(x), \quad (18) \\
A_n &= \gamma_1^2 - \lambda_n^2 + d_n^2 + \frac{1+v}{1-v} \omega \alpha_T m^*, \\
B_n &= (\gamma_1^2 - \lambda_n^2) d_n^2 - \frac{1+v}{1-v} \lambda_n^2 \omega \alpha_T m^*.
\end{aligned}$$

Интегрирование уравнения (18) в классе  $D'$  обобщенных функций [1] дает

$$\begin{aligned}
\Phi_n^{(1)} &= \frac{p_{1n}\alpha_n}{4i\mu} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_{jn}r), \quad \alpha_n = \frac{1}{(\sigma + 1)(\mu_{1n}^2 - \mu_{2n}^2)}, \\
z &= x_1 + ix_2, \quad z_0 = x_{10} + ix_{20}, \quad r = |z - z_0|,
\end{aligned}$$

где  $H_p^{(1)}(x)$  – функция Ганкеля первого рода порядка  $p$ ;  $\mu_{1n}, \mu_{2n}$  – корни характеристического уравнения

$$Z_n^4 - A_n Z_n^2 + B_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Очевидно, необходимо выбрать корни с неотрицательными мнимыми частями. Далее находим

$$\begin{aligned}
e_n^{(1)} = \ell_{22}\Phi_n^{(1)} &= \frac{p_{1n}\alpha_n}{4i\mu} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} (d_n^2 - \mu_{jn}^2) \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_{jn}r), \\
U_{4n}^{(1)} &= -\omega m^* \Phi_n^{(1)}. \quad (19)
\end{aligned}$$

Соотношения (19) дают возможность свести систему (16) к трем независимым уравнениям вида

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 + \mu_n^2)U_{kn} &= \\
&= -\frac{p_{kn}\alpha_n}{4i\mu} \sigma \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \rho_{jn} \partial_1 \partial_k H_0^{(1)}(\mu_{jn}r) - \frac{p_{1n}}{\mu} \delta(x) \delta_{k1}, \quad k = 1, 2, 3, \\
\rho_{jn} &= d_n^2 - \mu_{jn}^2 + 2(1+v)\alpha_T \omega m^*, \quad \partial_3 = -\lambda_n.
\end{aligned}$$

Интегрирование этой системы дает

$$U_{kn}^{(1)} = \frac{i p_{1n}}{4\mu} \delta_{k1} H_0^{(1)}(\mu_n r) - \frac{p_{1n} \alpha_n \sigma}{4i\mu} \sum_{j=0}^2 (-1)^{j-1} B_{jn} \partial_1 \partial_k H_0^{(1)}(\mu_{jn} r), \quad (20)$$

$$B_{0n} = \sum_{j=1}^2 \frac{\rho_{jn}}{\mu_n^2 - \mu_{jn}^2}, \quad B_{jn} = \frac{\rho_{jn}}{\mu_n^2 - \mu_{jn}^2}, \quad \mu_{0n} = \mu_n, \quad j = 1, 2, \quad n = 0, 1, \dots$$

Легко видеть, что соотношение  $e_n = \partial_1 U_{1n} + \partial_2 U_{2n} + \lambda_n U_{3n}$  функциями (19), (20) выполняется на самом деле.

Таким образом, формулы (19), (20) полностью определяют решение системы (16) для рассматриваемого варианта возбуждения слоя. Три остальных случая рассматриваются совершенно аналогично. Выпишем здесь окончательные результаты

$$1^\circ. \quad X_1 \neq 0, \quad X_2 = X_3 = Q = 0:$$

$$U_{kn}^{(1)} = \frac{P_{1n}}{4i\mu} g_{kn}^{(1)}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$g_{1n}^{(1)} = -H_0^{(1)}(\mu_n r) + \sigma \alpha_n \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} \partial_1^2 H_0^{(1)}(\mu_{jn} r),$$

$$g_{2n}^{(1)} = \sigma \alpha_n \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} \partial_1 \partial_2 H_0^{(1)}(\mu_{jn} r),$$

$$g_{3n}^{(1)} = -\sigma \alpha_n \lambda_n \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_{jn} r),$$

$$g_{4n}^{(1)} = -\omega \alpha_n m^* \partial_1 H_n(r), \quad H_n(r) = H_0^{(1)}(\mu_{1n} r) - H_0^{(1)}(\mu_{2n} r); \quad (21)$$

$$2^\circ. \quad X_2 \neq 0, \quad X_1 = X_3 = Q = 0:$$

$$U_{kn}^{(2)} = \frac{P_{2n}}{4i\mu} g_{kn}^{(2)},$$

$$g_{1n}^{(2)} = g_{2n}^{(1)}, \quad g_{2n}^{(2)} = -H_0^{(1)}(\mu_n r) + \sigma \alpha_n \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} \partial_2^2 H_0^{(1)}(\mu_{jn} r),$$

$$g_{3n}^{(2)} = -\sigma \alpha_n \lambda_n \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} \partial_2 H_0^{(1)}(\mu_{jn} r), \quad g_{4n}^{(2)} = -\omega \alpha_n m^* \partial_2 H_n(r); \quad (22)$$

$$3^\circ. \quad X_3 \neq 0, \quad X_1 = X_2 = Q = 0:$$

$$U_{kn}^{(3)} = \frac{P_{3n}}{4i\mu} g_{kn}^{(3)},$$

$$g_{1n}^{(3)} = -g_{3n}^{(1)}, \quad g_{2n}^{(3)} = -g_{3n}^{(2)}, \quad g_{4n}^{(3)} = -\alpha_n \lambda_n \omega m^* H_n(r),$$

$$g_{3n}^{(3)} = -H_0^{(1)}(\mu_n r) - \alpha_n \lambda_n^2 \sigma \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} H_0^{(1)}(\mu_{jn} r); \quad (23)$$

$$4^\circ. \quad Q \neq 0, \quad X_1 = X_2 = X_3 = 0:$$

$$U_{kn}^{(4)} = \frac{P_{4n}}{4i\mu} g_{kn}^{(4)}, \quad g_{1n}^{(4)} = -\frac{\beta_n E \alpha_T}{2(1-\nu)} \partial_1 H_n(r), \quad g_{2n}^{(4)} = -\frac{\beta_n E \alpha_T}{2(1-\nu)} \partial_2 H_n(r),$$

$$g_{3n}^{(4)} = \frac{\beta_n E \alpha_T \lambda_n}{2(1-\nu)} H_n(r), \quad g_{4n}^{(4)} = \mu \beta_n \sum_{j=1}^2 (-1)^j (\gamma_1^2 - \lambda_n^2 - \mu_{jn}^2) H_0^{(1)}(\mu_{jn} r),$$

$$\beta_n = \frac{i\omega \tau^* - 1}{\lambda_T (\mu_{1n}^2 - \mu_{2n}^2)}. \quad (24)$$

Формулы (21)–(24) определяют матрицу фундаментальных решений для слоя, соответствующую принятым граничным условиям на его основаниях.

**3. Сосредоточенное гармоническое возбуждение слоя.** В качестве первого примера рассмотрим случай, когда вдоль шнура  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $|x_3| \leq h$  действует в направлении оси  $x_1$  нагрузка, распределенная по параболическому закону вдоль толщинной координаты  $x_3$ :

$$Y_1 = \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} X_1), \quad X_1 = X_0 \left( \frac{1 - x_3^2}{h^2} \right).$$

Коэффициенты Фурье функции  $X_1$ , фигурирующие в (14), таковы:

$$p_{10} = \frac{2}{3} X_0, \quad p_{1n} = (-1)^{n-1} \frac{4X_0}{\pi^2 n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

По формулам (2) с учетом соотношений (21) находим комбинации амплитуд напряжений:

$$\begin{aligned} S_1 = S_{11} + S_{22} &= \sum_{n=0}^{\infty} S_1^{(n)} \cos \lambda_n x_3, & S_2 = S_{22} - S_{11} + 2iS_{12} &= \sum_{n=0}^{\infty} S_2^{(n)} \cos \lambda_n x_3, \\ \tilde{S}_2 = S_{22} - S_{11} - 2iS_{12} &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{S}_2^{(n)} \cos \lambda_n x_3, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} S_1^{(n)} &= S_{11}^{(n)} + S_{22}^{(n)} = \frac{i}{2} \sigma P_{1n} \left\{ \frac{\mu_n \lambda_n^2}{\sigma \gamma_2^2} H_1^{(1)}(\mu_n r) + \beta_n^* g_n^{(1,1)}(r) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma \alpha_n \sum_{j=1}^2 (-1)^j B_{jn} \mu_{jn} (\mu_{jn}^2 + 2v\lambda_n^2) H_1^{(1)}(\mu_{jn} r) \right\} \cos \alpha, \\ \left\{ \begin{matrix} \tilde{S}_2^{(n)} \\ S_2^{(n)} \end{matrix} \right\} &= S_{22}^{(n)} - S_{11}^{(n)} \mp 2iS_{12}^{(n)} = \frac{P_{1n}}{2i} \left[ \frac{\mu_n}{2} \left( 1 + \frac{\lambda_n^2}{\gamma_2^2} \right) H_1^{(1)}(\mu_n r) \left\{ \begin{matrix} e^{i\alpha} \\ e^{-i\alpha} \end{matrix} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma \alpha_n}{2} \sum_{j=1}^2 (-1)^j B_{jn} \left( \mu_{jn}^3 H_1^{(1)}(\mu_{jn} r) \left\{ \begin{matrix} e^{i\alpha} \\ e^{-i\alpha} \end{matrix} \right\} + g_{jn}^{(3,3)} \left\{ \begin{matrix} e^{3i\alpha} \\ e^{-3i\alpha} \end{matrix} \right\} \right) \right], \\ g_n^{(1,1)}(r) &= \mu_{2n} H_1^{(1)}(\mu_{2n} r) - \mu_{1n} H_1^{(1)}(\mu_{1n} r), & \beta_n^* &= 2(1+v)\omega \alpha_n \alpha_T m^*, \\ g_{jn}^{(3,3)}(r) &= \mu_n^3 H_3^{(1)}(\mu_n r) - \mu_{jn}^3 H_3^{(1)}(\mu_{jn} r), & z &= r e^{i\alpha}. \end{aligned}$$

Зная комбинации (25), можно вычислить амплитуды напряжений  $S_{ij}$ .

На рис. 1 представлены кривые изменения величины  $\Lambda = |S_{11}/X_0|$  в зависимости от расстояния точки наблюдения  $(x_1, 0, 0)$  до источника для полистирола [3] при  $h = 1$ . Кривые 1, 2 построены для значений  $\gamma_1 h = 5$  и  $\gamma_1 h = 10$  соответственно, при этом принято, что  $\tau^* = 10^{-5}$  с. Кривая 3 соответствует значениям  $\gamma_1 h = 10$  и  $\tau^* = 0$ .

Пусть теперь вдоль шнура  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $|x_3| \leq h$  распределены тепловые источники интенсивности  $q = \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} Q)$ , где  $Q = Q_0(1 - x_3^2/h^2)$ . Согласно равенствам (24) комбинации (25), величины  $S_{33}^{(n)}$  и амплитудное значение температуры  $\theta = T - T_0$  определяются в этом случае соотношениями

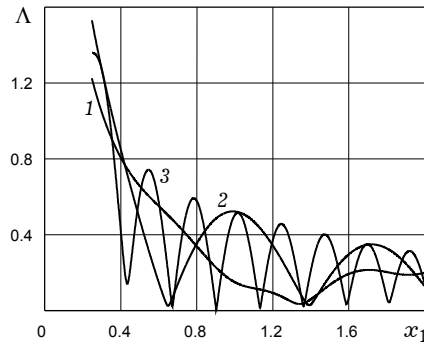


Рис. 1

$$\begin{aligned}
S_1^{(n)} &= \frac{P_{4n}}{4i} \frac{E\alpha_T}{1-\nu} \beta_n \sum_{j=1}^2 (-1)^j (\mu_{jn}^2 + 2\lambda_n^2 - \gamma_2^2) H_0^{(1)}(\mu_{jn}r), \\
\left\{ \begin{array}{l} \tilde{S}_2^{(n)} \\ S_2^{(n)} \end{array} \right\} &= \frac{iP_{4n}}{4} \frac{E\alpha_T}{1-\nu} \beta_n \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_{jn}^2 H_2^{(1)}(\mu_{jn}r) \left\{ \begin{array}{l} e^{2i\alpha} \\ e^{-2i\alpha} \end{array} \right\}, \\
S_{33}^{(n)} &= \frac{P_{4n}}{4i} \frac{E\alpha_T}{1-\nu} \beta_n \sum_{j=1}^2 (-1)^j (\mu_{jn}^2 + 2\lambda_n^2 - \gamma_2^2) H_0^{(1)}(\mu_{jn}r), \\
U_{4n} &= \frac{P_{4n}}{4i} \beta_n \sum_{j=1}^2 (-1)^j (\gamma_1^2 - \lambda_n^2 - \mu_{jn}^2) H_0^{(1)}(\mu_{jn}r), \\
P_{40} &= \frac{2}{3} Q_0, \quad P_{4n} = (-1)^{n-1} \frac{4Q_0}{\lambda^2 n^2}. \tag{26}
\end{aligned}$$

Отметим, что в данном случае главная асимптотика некоторых полевых величин в точке приложения сосредоточенного функционала зависит от частоты возбуждения, что не наблюдается в параболической модели. Используя асимптотику функций Ганкеля при малых  $r$ , из соотношений (26) находим

$$S_{11}^{(n)} = S_{22}^{(n)} = -\frac{1}{2} S_{33}^{(n)}, \quad U_{4n} = \frac{P_{4n}}{2\pi\lambda_T} (i\omega\tau^* - 1) \ln \frac{r}{h}, \quad S_{33}^{(n)} = -\frac{E\alpha_T}{1-\nu} U_{4n}.$$

Согласно данным [3] время тепловой релаксации  $\tau^*$  для некоторых полимеров может достигать значений  $10^{-5}$  с и более.

На рис. 2 показаны результаты расчетов относительной величины  $\delta = \lambda_T U_4 / Q_0$  в зависимости от относительного волнового числа  $\gamma_1 h$  в точке наблюдения  $(10^{-5}, 0, 0)$  для полистирола. Эти данные можно объяснить за счет весьма низкой теплопроводности полистирола.

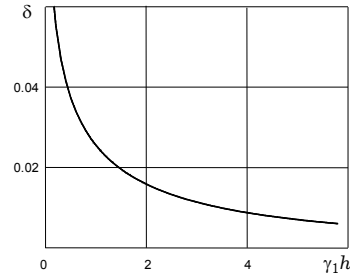


Рис. 2

**4. Сосредоточенное импульсное возбуждение слоя.** Рассмотрим возбуждение слоя прямоугольным импульсом, распределенным вдоль шнура  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $|x_3| \leq h$ . Пространственную интенсивность объемных сил и тепловых источников представим в виде

$$\begin{aligned}
F_k &= f_k(t) \sum_{n=0}^{\infty} f_{kn} \cos \lambda_n x_3 \delta(x), \quad k = 1, 2, \quad F_3 = f_3(t) \sum_{n=1}^{\infty} f_{3n} \sin \lambda_n x_3 \delta(x), \\
q &= f_4(t) \sum_{n=0}^{\infty} f_{4n} \cos \lambda_n x_3 \delta(x). \tag{27}
\end{aligned}$$

Вектор перемещения и функцию  $\theta = T - T_0$  также представим своими рядами Фурье

$$\begin{aligned}
u_k &= \sum_{n=0}^{\infty} u_{kn} \cos \lambda_n x_3, \quad k = 1, 2, \quad u_3 = \sum_{n=1}^{\infty} u_{3n} \sin \lambda_n x_3, \\
u_4 &= \theta = \sum_{n=0}^{\infty} u_{4n} \cos \lambda_n x_3, \quad u_{mn} = u_{mn}(x, t), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Исключив в системе уравнений связанной термоупругости координату  $x_3$ , приведем ее к виду

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 - \lambda_n^2) u_{kn} + \sigma \partial_k (\partial_m u_{mn}) - \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \alpha_T \partial_k u_{4n} + \\
+ \frac{1}{\mu} f_{kn} f_k(t) \delta(x) - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 u_{kn}}{\partial t^2} = 0, \quad k = 1, 2, 3,
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& (\nabla^2 - \lambda_n^2)u_{4n} - \frac{1}{V_T^2} \frac{\partial^2 u_{4n}}{\partial t^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u_{4n}}{\partial t} - \\
& - m \left( \frac{\partial e_n}{\partial t} + \tau^* \frac{\partial^2 e_n}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{\lambda_T} \left( f_4(t) + \tau^* \frac{\partial f_4}{\partial t} \right) f_{4n} \delta(x) = 0, \quad (28)
\end{aligned}$$

$$e_n = \partial_m u_{mn}, \quad \partial_3 = -\lambda_n.$$

Применив теперь к системе (28) одностороннее преобразование Фурье по времени

$$\begin{aligned}
U_{kn}(x, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\omega t} u_{kn}(x, t) dt, \quad k = 1, 2, 3, 4, \\
P_k(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\omega t} f_k(t) dt, \quad u_{kn}(x, t)|_{t=0} = \frac{\partial u_{kn}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,
\end{aligned}$$

приведем ее к виду (16) относительно трансформант Фурье соответствующих полевых величин, где спектральные функции  $P_{kn}$  определяются в соответствии с представлениями (27) формулами

$$P_{kn} = P_k(\omega) f_{kn}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad n = 0, 1, \dots \quad (29)$$

Пусть  $F_2 = F_3 = q = 0$ , а интенсивность объемной силы в направлении оси  $x_1$  такова:

$$F_1 = f_1(t) \left( 1 - \frac{x_3^2}{h^2} \right) \delta(x), \quad f_1(t) = C[\eta(t) - \eta(t - T)], \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

где  $C$  – высота прямоугольного импульса,  $T$  – его продолжительность,  $\eta(t)$  – единичная функция Хевисайда [8].

В этом случае величины, фигурирующие в формуле (29), имеют вид

$$\begin{aligned}
P_1(\omega) &= \frac{CT}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega T} - 1}{i\omega T}, \quad P_k(\omega) = 0, \quad k = 2, 3, 4, \\
f_{10} &= \frac{2}{3}, \quad f_{1n} = (-1)^{n-1} \frac{4}{\pi^2 n^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \\
f_{kn} &= 0, \quad k = 2, 3, 4, \quad n = 0, 1, \dots \quad (30)
\end{aligned}$$

Волновые поля перемещений и температуры определяются при помощи обратного преобразования Фурье (формулу для перемещения  $u_3$  не выписываем):

$$u_k = \frac{C}{4\pi\mu} \sum_{n=0}^\infty f_{1n} \cos \lambda_n x_3 \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-i\omega t} \frac{1 - e^{i\omega T}}{\omega} g_{kn}^{(1)}(x, \omega) d\omega, \quad k = 1, 2, 4, \quad (31)$$

где компоненты матрицы фундаментальных решений  $g_{kn}^{(1)}$  определяются в (21).

На рис. 3 показан характер изменения во времени относительной величины  $u = \mu u_1 / C$  в точке  $(3, 0, 0)$  при  $h = 100$ ,  $T = 3$  с и  $T = 5$  с для полистирола.

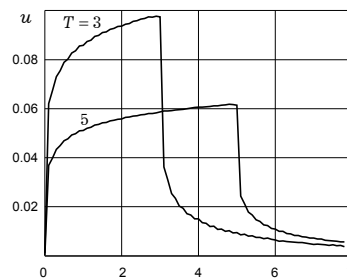


Рис. 3

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1981. – 512 с.
2. Ворович И. И., Малкина О. С. Напряженное состояние толстой плиты // Прикл. математика и механика. – 1967. – **31**, № 2. – С. 230–241.
3. Грибанов В. Ф., Паничкин Н. Р. Связанные и динамические задачи термоупругости. – Москва: Машиностроение, 1984. – 184 с.
4. Григolloк Э. И., Ковалев Ю. Д., Фильштинский Л. А. Изгиб слоя, ослабленного сквозными туннельными разрезами // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естествознания. – 2000. – № 3. – С. 46–47.

5. *Жиров В. Е.* Электроупругое равновесие пьезокерамической плиты // Прикл. математика и механика. – 1977. – **41**, № 6. – С. 1114–1121.
6. *Коваленко А. Д.* Термоупругость. – Киев: Вища шк., 1975. – 216 с.
7. *Космодамианский А. С., Шалдырван В. А.* Толстые многосвязные пластины. – Киев: Наук. думка, 1978. – 237 с.
8. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1973. – 736 с.
9. *Лурье А. И.* К теории толстых плит // Прикл. математика и механика. – 1942. – **6**, № 2/3. – С. 151–169.
10. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. – Киев: Наук. думка, 1976. – 312 с.
11. *Прокопов В. К.* Обзор работ по однородным решениям теории упругости и их приложениям // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. – 1967. – **279**. – С. 31–46.
12. *Устинов Ю. А.* О полноте системы однородных решений теории плит // Прикл. математика и механика. – 1976. – **40**, № 3. – С. 755–758.
13. *Фильшитинский Л. А.* Периодические по времени однородные решения уравнения теплопроводности для анизотропного слоя в  $\mathbb{R}^3$  // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 2. – С. 147–154.
14. *Фильшитинский Л. А.* Периодические решения теории упругости и электроупругости для цилиндра в  $\mathbb{R}^3$  // Теорет. и прикл. механика. – 1990. – Вып. 21. – С. 13–20.
15. *Фильшитинский Л. А.* Растяжение слоя, ослабленного туннельными разрезами // Прикл. математика и механика. – 1995. – **59**, № 5. – С. 827–835.
16. *Фильшитинский Л. А.* Фундаментальные решения уравнений электроупругости для пьезокерамического слоя в  $\mathbb{R}^3$  // Механика композитных материалов. – 2001. – **31**. – С. 377–388.
17. *Фильшитинский Л. А., Ковалев Ю. Д.* Смешанная кососимметричная задача об упругом слое, ослабленном сквозными полостями // Физ.-хим. механика матеріалів. – 2001. – **37**, № 5. – С. 114–116.
18. *Фильшитинский Л. А., Сиренко Ю. В.* Однородные решения задачи Неймана для композитного слоя в  $\mathbb{R}^3$  // Совр. проблемы механики сплошной среды. – Ростов-на-Дону: Новая книга, 2003. – Т. 1. – С. 200–205.
19. *Фильшитинский Л. А., Шрамко Л. В., Шрамко Ю. В.* Фундаментальные решения для пьезокерамического слоя в  $\mathbb{R}^3$  (симметричный случай, смешанные граничные условия) // Совр. проблемы механики сплошной среды. – Ростов-на-Дону: Новая книга, 2003. – Т. 2. – С. 199–203.
20. *Filshitskii L. A., Kovalyov Yu. D., Ventsel E. S.* Solutions of the elastic boundary value problems for a layer with tunnel stress raisers // Int. J. Solids and Struct. – 2002. – **39**. – P. 6385–6402.

#### **ЗВ'ЯЗАНІ ТЕРМОПРУЖНІ ПОЛЯ В ШАРІ ПРИ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ ЗБУРЕННЯХ**

*Побудовано повну систему однорідних розв'язків рівнянь зв'язаної задачі термопружності для шару в  $\mathbb{R}^3$  з урахуванням скінченної швидкості поширення тепла. З урахуванням структури однорідних розв'язків отримано матрицю фундаментальних розв'язків, що відповідає діючим у шарі гармонічним за часом зосередженим зусиллям і тепловим джерелам. Розглянуто приклади зосереджених гармонічних та імпульсних збурень шару.*

#### **COUPLED THERMOELASTIC FIELDS IN THE LAYER IN THE CASE OF CONCENTRATED PERTURBATIONS**

*The full system of coupled thermoelasticity homogeneous solutions for the layer in  $\mathbb{R}^3$  has been obtained in the case of finite heat distribution velocity. The matrix of the fundamental solutions has been obtained with the help of homogeneous solutions, according to the time harmonic concentrated forces and thermal sources, acting in the layer. The examples of the concentrated harmonic and impulse layer perturbations have been studied.*

Сум. гос. ун-т, Сумы

Получено  
14.04.04