

**ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ В ІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНКАХ
ДОВІЛЬНОЇ КРИВИНИ З ПОВЕРХНЕВИМИ ТРІЩИНАМИ**

Розглянуто задачу про визначення напружено-деформованого стану ізотропної оболонки довільної кривини з поверхневою тріщиною. Наведено результати розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напружень у центральній точці поверхневої тріщини в оболонках при різних співвідношеннях геометричних параметрів (товщини та головних кривин оболонки, глибини й довжини тріщини).

Дослідження поверхневої тріщини в елементах конструкцій, які можна зобразити пластинами або оболонками, з огляду на практичне застосування є однією з найважливіших задач механіки руйнування. У загальному випадку ця задача зводиться до задачі про тривимірну тріщину в тілі скінченних розмірів, де поле напружень, збурених тріщиною, зазнає сильного впливу границь твердого тіла. Для розв'язання задачі використовують різні числові методи, одним з яких методів є метод лінійних пружин [3].

Основна ідея, що лежить в основі моделі, полягає в апроксимації тривимірної задачі для тріщини за допомогою двовимірної задачі шляхом заміни напружень, що виникають у залишковому перетині матеріалу, мембранним T і згинним M навантаженнями, що діють у нейтральній поверхні пластины або оболонки. У відповідній двовимірній задачі переміщення поверхні тріщини подаються через розкриття тріщини δ і кут розкриття тріщини θ .

Перше припущення, на якому базується ця модель, полягає у тому, що тріщина довжини 2ℓ вважається наскрізною, а обмеження на переміщення, викликані діючими в залишковому перетині напруженнями (вони протидіють розкриттю тріщини), можуть бути враховані шляхом прикладання до поверхні тріщини мембранного $T(x)$ і згинного $M(x)$ навантажень. Тобто, якщо дія навантажень $T_2^*(x)$ і $M_2^*(x)$ (мембранне зусилля і згинний момент на лінії тріщини в суцільній оболонці, викликані зовнішнім навантаженням) спрямована на розкриття тріщини, то $T(x)$ і $M(x)$ – на її змикання.

Друге припущення полягає у тому, що коефіцієнт інтенсивності напружень за координатою x (уздовж фронту тріщини) можна апроксимувати відповідною функцією, яка визначається з розв'язку задачі для смуги з крайовою тріщиною глибини $L(x)$ в умовах плоскої деформації. При цьому смуга навантажена рівномірними розтягувальним зусиллям $T(x)$ і крутним моментом $M(x)$, прикладеними далеко від тріщини.

До цього часу більшість авторів обмежувалася ізотропними циліндричними оболонками і тонкими пластинами. Так, наприклад, В. А. Осадчук, І. С. Костенко, Р. З. Стасюк досліджували збуджений напружений стан замкненої циліндричної оболонки з системою поздовжніх поверхневих тріщин. Р. М. Кушнір, М. М. Николишин, В. А. Осадчук досліджували циліндричні оболонки з поверхневими тріщинами [1]. Дж. Райс і Н. Леві розглядали задачі про розтягування і згинання пластины, яка містить поверхневу тріщину [7]. Ф. Ділейл і Ф. Е. Ердоган досліджували циліндричні оболонки та пластины, які містять кільцеві або осьові ненаскрізні тріщини [4–6].

Розглянемо ізотропну оболонку довільної гауссової кривини сталої товщини h , яка містить поверхневу тріщину вздовж лінії кривини. Далекі від тріщини до оболонки прикладене навантаження, яке є простим однорідним розтягуванням уздовж осі y і згином уздовж осі x . Довжина 2ℓ тріщини на поверхні є великою порівняно з товщиною оболонки (рис. 1).

Для того, щоб виразити T і M через стрибки переміщення вздовж лінії тріщини $[v]$ і кута розкриття тріщини $[\theta_2]$, енергію, яка виділяється при руйнуванні, визначають двома способами, а саме: через енергію змикання тріщини і через добуток навантаження на переміщення точок прикладення цих навантажень. Енергію G , яка виділяється при руйнуванні, можна виразити так:

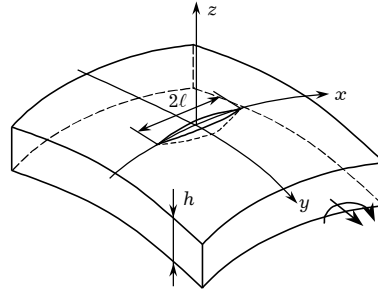


Рис. 1

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \quad \text{або} \quad G = \frac{\partial}{\partial L} (U - V), \quad (1)$$

де K_I – коефіцієнт інтенсивності напружень, який визначається в умовах плоскої деформації, V – енергія деформації, U – робота зовнішніх навантажень.

Введемо позначення

$$\tau = \begin{Bmatrix} \sigma \\ m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{T}{h} \\ \frac{6M}{h^2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{Bmatrix} T \\ 6M \end{Bmatrix}, \quad \omega = \begin{Bmatrix} [v] \\ \frac{h}{6} [\theta_2] \end{Bmatrix}. \quad (2)$$

Згідно з моделлю лінійних стержнів маємо [3]

$$\tau = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{1}{h} C \omega.$$

Елементи матриці $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ знаходимо таким чином:

$$c_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{\Delta}, \quad \text{де} \quad \alpha_{ij} = \int_0^L g_i(s) g_j(s) dL, \quad \Delta = \alpha_{11}^2 \alpha_{22}^2 - \alpha_{12}^2.$$

Тут g_t і g_b – безрозмірні функції від s , де $s = \frac{L}{h}$ – відношення глибини тріщини L до товщини оболонки h . Ці функції при $0 < s < 0.8$ мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} g_t(s) &= \sqrt{\pi s} (1.1216 + 6.5200s^2 - 12.3877s^4 + 89.0554s^6 - 188.6080s^8 + \\ &\quad + 207.3870s^{10} - 32.0524s^{12}), \\ g_b(s) &= \sqrt{\pi s} (1.1202 - 1.8872s + 18.0143s^2 - 87.3851s^3 + 241.9124s^4 - \\ &\quad - 319.9402s^5 + 168.0105s^6), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\alpha_{11} = s^2 \sum_{n=0}^{12} C_{bb}^{(n)} s^n, \quad \alpha_{22} = s^2 \sum_{n=0}^{12} C_{tt}^{(n)} s^{2n},$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = -s^2 \sum_{n=0}^{18} C_{bt}^{(n)} s^n.$$

Коефіцієнти $C_{bb}^{(n)}$, $C_{tt}^{(n)}$, $C_{bt}^{(n)}$ наведено в [5].

Для дослідження напруженого стану в ізотропній оболонці з наскрізною тріщиною маємо рівняння [2]

$$\int_{-1}^1 (\mathcal{K}_{11}(x-t)\psi_1 + \mathcal{K}_{13}(x-t)\psi_3) ds = \pi(T_2(x) - T_2^*(x)),$$

$$\int_{-1}^1 (\mathcal{K}_{31}(x-t)\psi_1 + \mathcal{K}_{33}(x-t)\psi_3) ds = c^2 R_2 \pi(M_2(x) - M_2^*(x)), \quad (4)$$

де

$$\mathcal{K}_{11}(x) =$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{4c^2 \ell^2}{\pi} x \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d^2(\theta) \cos(2n-1)\theta \operatorname{Im} G(\ell c |x| |d(\theta)|\sqrt{i}) d\theta,$$

$$\mathcal{K}_{13}(x) = \frac{1}{(1-\nu)(3+\nu)} \mathcal{K}_{31}(x),$$

$$\mathcal{K}_{31}(x) =$$

$$= \frac{4c^2 \ell^2 x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta (\nu \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d^2(\theta) \cos(2n-1)\theta \operatorname{Re} G(\ell c |x| |d(\theta)|\sqrt{i}) d\theta,$$

$$\mathcal{K}_{33}(x) = \frac{1}{x} +$$

$$+ \frac{4c^2 \ell^2 x}{\pi(1-\nu)(3+\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\nu \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2}{\cos \theta} d^2(\theta) \cos(2n-1)\theta \operatorname{Im} G(\ell c |x| |d(\theta)|\sqrt{i}) d\theta,$$

$$c^2 = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{R_2 h}, \quad d^2(\theta) = \cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta, \quad \lambda = \frac{R_2}{R_1}, \quad (5)$$

R_1, R_2 – радіуси головних кривин оболонки.

Невідомі функції мають такий вигляд:

$$\psi_1 = \frac{Eh}{4\ell} \frac{d[v]}{dt}, \quad \psi_3 = \frac{Eh}{4\ell} \sqrt{\frac{3(1-\nu)}{1+\nu}} \cdot (3+\nu) \left(\frac{h}{6} \cdot \frac{d[\theta_2]}{dt} \right).$$

Запишемо співвідношення (2) через ці функції:

$$\left\{ \begin{array}{l} T \\ \frac{6M}{h} \end{array} \right\} = \frac{2}{1-\nu^2} \frac{\ell}{h} C \left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^x \psi_1(t) dx \\ \frac{1}{3+\nu} \sqrt{\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}} \int_{-1}^x \psi_3(t) dx \end{array} \right\}. \quad (6)$$

Оскільки $\int_{-1}^x \psi(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \psi(t) \operatorname{sign}(x-t) dt$, співвідношення (6) можна записати також у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} T \\ \frac{6M}{h} \end{array} \right\} = \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\ell}{h} C \left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 \psi(t) \operatorname{sign}(x-t) dt \\ \frac{1}{3+\nu} \sqrt{\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}} \int_{-1}^1 \psi(t) \operatorname{sign}(x-t) dt \end{array} \right\}. \quad (7)$$

Звідси одержуємо для розглядуваної задачі систему інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned}
& - \pi T_2^*(x) = \int_{-1}^1 (\mathcal{K}_{11}(x-t)\psi_1(t) + \mathcal{K}_{13}(x-t)\psi_3(t)) dt - \\
& - \frac{\pi}{1-\nu^2} \frac{\ell}{h} \left(c_{11} \int_{-1}^1 \psi(t) \operatorname{sign}(x-t) dt + \right. \\
& \left. + c_{12} \frac{1}{3+\nu} \sqrt{\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}} \int_{-1}^1 \psi(t) \operatorname{sign}(x-t) dt \right), \\
& - \pi c^2 R_2 M_2^*(x) = \int_{-1}^1 (K_{31}(x-t)\psi_1(t) + K_{33}(x-t)\psi_3(t)) dt - \\
& - \frac{\pi}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{\ell}{h} \left(c_{21} \int_{-1}^1 \psi(t) \operatorname{sign}(x-t) dt + \right. \\
& \left. + c_{22} \frac{1}{3+\nu} \sqrt{\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}} \int_{-1}^1 \psi(t) \operatorname{sign}(x-t) dt \right). \tag{8}
\end{aligned}$$

Розрахунки виконано для K_I/K_∞ , де K_I виражається через σ_0 і m_0 за формулою $K_I = \sqrt{h}(\sigma_0 g_t + m_0 g_b)$, а K_∞ – коефіцієнт інтенсивності напружень для тріщини глибини L_0 і нескінченної довжини ($\ell \rightarrow \infty$) при тому ж розтягувальному або згинному навантаженні на нескінченності. На рис. 2 наведено графіки залежності K_I/K_∞ від ℓ/h у центральній точці поверхневої тріщини в пластині (штрихові криві) та сфері (суцільні криві) для різних значень відношення глибини тріщини до товщини оболонки (пластини): $L_0/h = 0.7, 0.5, 0.3, 0.1$ (відповідно криві 1–4 тут і на рис. 3, 4). Обчислення виконано для чистого розтягування ($\sigma_\infty = 1, m_\infty = 0$).

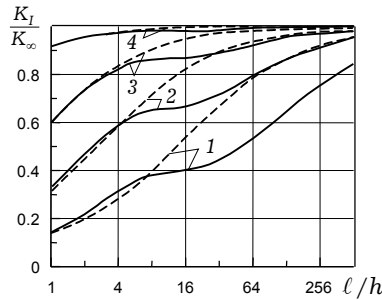


Рис. 2

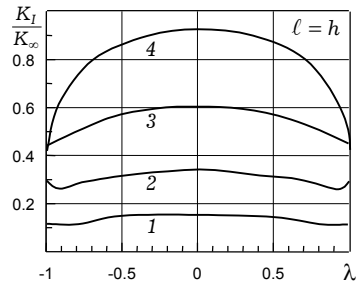


Рис. 3

Особливість цих результатів полягає у тому, що при збільшенні довжини тріщини коефіцієнт інтенсивності напружень для поверхневої тріщини прямує до коефіцієнта інтенсивності напружень зовнішньої тріщини в смузі, що плоско деформується (K_∞). З аналізу графіків випливає, що коефіцієнт інтенсивності для сферичної оболонки є меншим, ніж у пластині.

На рис. 3 зображено коефіцієнт інтенсивності напружень для сферичної оболонки вздовж тріщини при чистому розтягуванні. При проведенні розрахунків вважали, що довжина тріщини дорівнює товщині оболон-

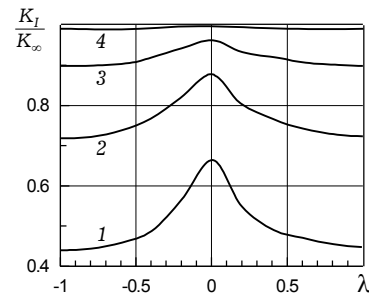


Рис. 4

ки. З аналізу графіків випливає, що коефіцієнт інтенсивності має найбільше значення у центральній точці.

На рис. 4 зображено залежність коефіцієнта інтенсивності від кривини оболонки при чистому розтягуванні. Розрахунки проводили в центральній точці наскрізної тріщини при $\ell/h = 32$. На графіках видно, що найбільший коефіцієнт інтенсивності досягається в циліндричній оболонці.

Розв'язок системи сингулярних інтегральних рівнянь (7) повністю узгоджуються з результатами, отриманими Дж. Райсом і Н. Леві для тонкої пластини [7], і з результатами Ф. Ділейла і Ф. Е. Ердогана для циліндричної оболонки з поверхневими тріщинами [3, 4].

1. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛЮМ, 2003. – 318 с.
2. Шевченко В. П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек // Гузь А. Н., Космодамианский А. С., Шевченко В. П. и др. Концентрация напряжений. – Киев: А. С. К., 1998. – 387 с. – (Механика композитов: В 12 т. – Т. 7). – С. 159–196.
3. Эрдоган Ф. Модель в виде линейных пружин // Вычислительные методы в механике разрушения / Под ред. Атлури. – Москва: Мир, 1990. – С. 243–265.
4. Delale F., Erdogan F. Application of the line-spring model to a cylindrical shell containing a circumferential or an axial part-through crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1982. – **49**, No. 1. – P. 97–102.
5. Delale F., Erdogan F. Line-spring model for surface cracks in Reissner plate // Int. J. Eng. Sci. – 1981. – **19**, No. 11. – P. 13–31.
6. Delale F., Erdogan F. The crack problem in a specially orthotropic shell with double curvature // Eng. Fract. Mech. – 1983. – **18**, No. 3. – P. 529–544.
7. Rice J. R., Levy N. The part-through crack in an elastic plate // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1972. – **32**. – P. 185–194.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧКАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ С ПОВЕРХНОСТНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Рассмотрена задача определения напряженно-деформированного состояния изотропной оболочки произвольной кривизны с поверхностной трещиной. Приведены результаты расчета коэффициентов интенсивности напряжений в центральной точке поверхностной трещины в оболочках при разных соотношениях геометрических параметров (толщины и главных кривизн оболочки, глубины и длины трещины).

INVESTIGATION OF STRESS STATE IN ISOTROPIC SHELLS OF ARBITRARY CURVATURE WITH SURFACE CRACKS

The problem on determination of stressed-stained state of isotropic shell of arbitrary curvature with a surface crack is studied. The calculation result are presented for stress intensity factors at the central point of the surface crack for different relations of geometric parameters (the value of the shell main curvature, depth and length of the crack).

Донец. нац. ун-т, Донецьк

Одержано
14.12.04