УДК 539.3

І. О. Бутрак

АСИМПТОТИКА ДАЛЬНЬОГО ПОЛЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ І НАПРУЖЕНЬ ВІД ДИНАМІЧНОГО РОЗКРИТТЯ ПРОСТОРОВОЇ ТРІЩИНИ

Розглянуто тривимірну задачу дифракції гармонічних хвиль на просторовій тріщині в безмежному пружному тілі. Шляхом апроксимації ядер в інтегральних поданнях компонент відбитих хвиль отримано формули для ефективного розрахунку переміщень, напружень, а також поперечних перерізів розсіяння у дальній зоні через стрибки переміщень протилежних поверхонь тріщини.

Для розв'язання задач взаємодії пружних хвиль з тріщинами складної геометрії широко застосовують методи розривних розв'язків [2], граничних інтегральних рівнянь [1, 5, 8, 10], Т-матриць (нульового поля) [7] і модифікований варіаційно-різницевий метод [3]. У рамках цих методів отримано залежності компонент напружено-деформованого стану тіла з тріщиною від функцій розкриття тріщини, які дозволяють безпосередньо визначати динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень в околі дефекту. Дальня зона характеризується згладженням фронтів відбитих від тріщини хвиль. Відповідне спрощення опису хвильової картини в цій зоні можна досягнути з використанням асимптотичних подань розв'язків, що здійснено у випадку плоскої тріщини [9], а у випадку тріщини з викривленою поверхнею – лише для компонент переміщень [7, 10].

У цій роботі побудовано апроксимаційні інтегральні зображення як компонент переміщень, так і напружень у дальній зоні внаслідок дифракції гармонічних хвиль на неплоскій тріщині. Наведено також аналітичні вирази для поперечних перерізів розсіяння хвиль різних мод, які є актуальними з точки зору діагностики дефектів.

Розглянемо безмежне пружне тіло з просторовою тріщиною уздовж довільної розімкнутої поверхні Ляпунова S. Під довільним кутом до тріщини в тілі поширюється гармонічна хвиля з циклічною частотою ω. Внаслідок падіння хвилі на дефект виникає розсіяне поле, що описується вектором переміщень [4]

$$\mathbf{u}^{\text{sc}}(\mathbf{x}) = \iint\limits_S \mathbf{Y}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\Delta\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})\,dS_{\boldsymbol{\xi}}\,. \tag{1}$$

Тут і надалі фігурують амплітудні значення відповідних величин гармонічного процесу, $\mathbf{Y}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ – квадратна матриця розмірності 3×3, елементи якої визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= \left(\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{\xi}}} + n_{i\boldsymbol{\xi}}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left[\frac{\exp(i\omega_2\,|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|)}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right] + \\ &+ (1-2\gamma^2)n_{j\boldsymbol{\xi}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\exp(i\omega_1\,|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|)}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right] + \\ &+ \frac{2}{\omega_2^2}\frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{\xi}}}\left[\frac{\exp(i\omega_2\,|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|) - \exp(i\omega_1\,|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|)}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right], \quad i,j = 1,2,3\,, \end{aligned} \tag{2}$$

$\Delta\mathbf{u}(\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$ – стрибок переміщень протилежних поверхонь тріщини; $\omega_j = \omega/c_j$, $j = 1,2$, – хвильові числа; c_1, c_2 – швидкості поширення поздовжніх і поперечних хвиль відповідно; $\gamma = c_2/c_1 = \sqrt{(1-2\nu)/2(1-\nu)}$; ν – коефіцієнт Пуассона; δ_{jr} – символ Кронекера; $|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|$ – відстань між точкою спостереження $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ і точкою інтегрування $\boldsymbol{\xi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$; $n_{j\boldsymbol{\xi}}$, $j = 1, 2, 3$, – проекції нормалей до поверхні S у точці $\boldsymbol{\xi}$. Зазначимо, що функції Δu_j, $j = 1, 2, 3$, є розв'язками системи граничних інтегральних рівнянь, де праві частини визначаються через напруження у заданій падаючій хвилі. Методику аналітичного обернення цих рівнянь для низькочастотного діапазону коливань запропоновано у [8], тому ці функції вважатимемо відомими.

Викликані переміщеннями (1) компоненти напружень у тілі матимуть вигляд

$$\frac{\sigma_{ij}(\mathbf{x})}{2G} = \sum_{k=1}^{3} \iint_S \Delta u_k(\boldsymbol{\xi}) \left\{ (1-2\gamma^2) \left[n_{k\boldsymbol{\xi}} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial n_{\boldsymbol{\xi}}} - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{1-2\gamma^2}{2} \delta_{ij} n_{k\boldsymbol{\xi}} \omega_2^2 \right] \left[\frac{\exp(i\omega_1 |\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|)}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{\xi}}} \left(\delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(n_{i\boldsymbol{\xi}} \frac{\partial}{\partial x_j} + n_{j\boldsymbol{\xi}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right] \left[\frac{\exp(i\omega_2 |\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|)}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} \right] +$$
$$\left. + \frac{2}{\omega_2^2} \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{\xi}}} \left[\frac{\exp(i\omega_2 |\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|) - \exp(i\omega_1 |\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|)}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} \right] \right\} dS_{\boldsymbol{\xi}},$$
$$i, j = 1, 2, 3, \tag{3}$$

де G – модуль зсуву.

Співвідношення (1), (3) описують напружено-деформований стан тіла у довільній його точці та вміщують згортки функцій розкриття тріщини з різницевими ядрами потенціалів Гельмгольца, які ускладнюють аналітичні розрахунки. Для отримання компонент розсіяного поля у зручній для подальших обчислень формі на великій відстані від тріщини, тобто при $|\mathbf{x}| \gg |\boldsymbol{\xi}|$, використаємо наступні наближення:

$$|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}| \sim |\mathbf{x}| - (\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi})/|\mathbf{x}|, \qquad |\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|^{-1} \sim |\mathbf{x}|^{-1}, \qquad \boldsymbol{\xi} \in S, \qquad \mathbf{x} \to \infty. \tag{4}$$

Тоді після диференціювання в інтегральних зображеннях (1), (3) і підстановки виразів (4) дістанемо асимптотичні розподіли переміщень і напружень у відбитій хвилі:

$$u_i^{\text{sc}}(\mathbf{x}) \cong \sum_{m=1}^{2} B_i^m \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) \frac{\exp(i\omega_m |\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|}, \qquad |\mathbf{x}| \to \infty, \qquad i = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\sigma_{ij}^{\text{sc}}(\mathbf{x})}{2G} \cong \sum_{m=1}^{2} D_{ij}^m \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) \frac{\exp(i\omega_m |\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|}, \qquad |\mathbf{x}| \to \infty, \qquad i, j = 1, 2, 3, \tag{5}$$

де

$$B_i^m = i\omega_m \sum_{k=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} A_{iks}^m \iint_S \exp\left(- i\omega_m \frac{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}{|\mathbf{x}|} \right) \Delta u_k(\boldsymbol{\xi}) n_{s\boldsymbol{\xi}} \, dS_{\boldsymbol{\xi}},$$

$$D_{ij}^m = (i\omega_m)^2 \sum_{k=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} C_{ijks}^m \iint_S \exp\left(- i\omega_m \frac{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}{|\mathbf{x}|} \right) \Delta u_k(\boldsymbol{\xi}) n_{s\boldsymbol{\xi}} \, dS_{\boldsymbol{\xi}},$$

B_i^m, D_{ij}^m – компоненти векторних (тензорних) амплітуд поздовжніх ($m = 1$) і поперечних ($m = 2$) хвиль, розсіяних у напрямку одиничної нормалі $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Вони задаються формулами

$$A_{iks}^1 = \left[2\gamma^2 \frac{x_k x_s}{|\mathbf{x}|^2} + (1-2\gamma^2)\delta_{ks} \right] \frac{x_i}{|\mathbf{x}|}, \qquad A_{iks}^2 = \delta_{ik} \frac{x_s}{|\mathbf{x}|} + \delta_{is} \frac{x_k}{|\mathbf{x}|} - 2 \frac{x_i x_k x_s}{|\mathbf{x}|^3},$$

$$C^1_{ijks} = 2\gamma^2 \frac{x_i x_j x_k x_s}{|\mathbf{x}|^4} + (1-2\gamma^2)\left(\delta_{ij}\frac{x_k x_s}{|\mathbf{x}|^2} + \delta_{ks}\frac{x_i x_j}{|\mathbf{x}|^2}\right) + \frac{(1-2\gamma^2)^2}{2\gamma^2}\delta_{ij}\delta_{ks},$$

$$C^2_{ijks} = -2\frac{x_i x_j x_k x_s}{|\mathbf{x}|^4} + \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\frac{x_j x_s}{|\mathbf{x}|^2} + \delta_{jk}\frac{x_i x_s}{|\mathbf{x}|^2} + \delta_{is}\frac{x_j x_k}{|\mathbf{x}|^2} + \delta_{js}\frac{x_i x_k}{|\mathbf{x}|^2}\right).$$

Поклавши в наближеннях (5) $n_{s\boldsymbol{\xi}} = \delta_{s3}$, $s = 1, 2, 3$, легко отримаємо апроксимаційні зображення компонент напружено-деформованого стану тіла з плоскою тріщиною у дальній зоні. У цьому випадку

$$B^m_i = i\omega_m \sum_{k=1}^{3} A^m_{ik3} \iint_S \exp\left(-i\omega_m \frac{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}{|\mathbf{x}|}\right)\Delta u_k(\boldsymbol{\xi})\, dS_{\boldsymbol{\xi}},$$

$$D^m_{ij} = (i\omega_m)^2 \sum_{k=1}^{3} C^m_{ijk3} \iint_S \exp\left(-i\omega_m \frac{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}{|\mathbf{x}|}\right)\Delta u_k(\boldsymbol{\xi})\, dS_{\boldsymbol{\xi}}.$$

Складовими переміщень і напружень у формі (5) є плоскі гармонічні хвилі.

У сферичній системі координат (R, θ, φ), введеній як

$$x_1 = R\sin\theta\cos\varphi, \qquad x_2 = R\sin\theta\sin\varphi, \qquad x_3 = R\cos\theta,$$

формула (5) для відповідних компонент переміщень

$$\begin{Bmatrix} u^{\mathrm{sc}}_R(R,\theta,\varphi) \\ u^{\mathrm{sc}}_\theta(R,\theta,\varphi) \\ u^{\mathrm{sc}}_\varphi(R,\theta,\varphi) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{\mathrm{sc}}_1(\mathbf{x}) \\ u^{\mathrm{sc}}_2(\mathbf{x}) \\ u^{\mathrm{sc}}_3(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}$$

набуває вигляду

$$u^{\mathrm{sc}}_R(R,\theta,\varphi) = \frac{\exp(i\omega_1 R)}{R} F_{\mathrm{P}}(\theta,\varphi), \qquad R\to\infty,$$

$$u^{\mathrm{sc}}_\theta(R,\theta,\varphi) = \frac{\exp(i\omega_2 R)}{R} F_{\mathrm{SV}}(\theta,\varphi), \qquad R\to\infty,$$

$$u^{\mathrm{sc}}_\varphi(R,\theta,\varphi) = \frac{\exp(i\omega_2 R)}{R} F_{\mathrm{SH}}(\theta,\varphi), \qquad R\to\infty. \tag{6}$$

Тут F_{P}, F_{SV}, F_{SH} – амплітуди розсіяння відбитих плоских поздовжньої, поперечної вертикально поляризованої і горизонтально поляризованої хвиль відповідно, що дорівнюють

$$F_{\mathrm{P}}(\theta,\varphi) = i\omega_1 \sum_{j=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} [2\gamma^2 \tilde{x}_j \tilde{x}_s + (1-2\gamma^2)\delta_{js}] \iint_S \exp(-i\omega_1(\tilde{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\xi}))\Delta u_j(\boldsymbol{\xi}) n_{s\boldsymbol{\xi}}\, dS_{\boldsymbol{\xi}},$$

$$F_{\mathrm{SV}}(\theta,\varphi) = i\omega_2 \sum_{j=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} [\tilde{v}_j \tilde{x}_s + \tilde{v}_s \tilde{x}_j] \iint_S \exp(-i\omega_2(\tilde{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\xi}))\Delta u_j(\boldsymbol{\xi}) n_{s\boldsymbol{\xi}}\, dS_{\boldsymbol{\xi}},$$

$$F_{\mathrm{SH}}(\theta,\varphi) = i\omega_2 \sum_{j=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} [\tilde{h}_j \tilde{x}_s + \tilde{h}_s \tilde{x}_j] \iint_S \exp(-i\omega_2(\tilde{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\xi})\Delta u_j(\boldsymbol{\xi}) n_{s\boldsymbol{\xi}}\, dS_{\boldsymbol{\xi}}, \tag{7}$$

$\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{v}}$, $\tilde{\mathbf{h}}$ – одиничні вектори з координатами

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{Bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{v}} = \begin{Bmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{Bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{h}} = \begin{Bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{8}$$

На основі оптичної теореми [6] для пружних коливань, враховуючи вирази (7), отримуємо співвідношення для поперечних перерізів Q_{P}, Q_{SV}, Q_{SH} розсіяння поздовжніх, поперечних вертикально та горизонтально поляризованих хвиль:

$$Q_{\mathrm{P}}(\theta_0, \varphi_0) = \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} [2\gamma^2 \tilde{x}_j^0 \tilde{x}_s^0 + (1 - 2\gamma^2)\delta_{js}] \iint_S \exp(-i\omega_1(\tilde{\mathbf{x}}^0 \cdot \boldsymbol{\xi}))\, \Delta u_j(\boldsymbol{\xi}) n_{s\boldsymbol{\xi}}\, dS_{\boldsymbol{\xi}} \right),$$

$$Q_{\mathrm{SV}}(\theta_0, \varphi_0) = \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} [\tilde{v}_j^0 \tilde{x}_s^0 + \tilde{v}_s^0 \tilde{x}_j^0] \iint_S \exp(-i\omega_2(\tilde{\mathbf{x}}^0 \cdot \boldsymbol{\xi}))\, \Delta u_j(\boldsymbol{\xi}) n_{s\boldsymbol{\xi}}\, dS_{\boldsymbol{\xi}} \right),$$

$$Q_{\mathrm{SH}}(\theta_0, \varphi_0) = \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} [\tilde{h}_j^0 \tilde{x}_s^0 + \tilde{h}_s^0 \tilde{x}_j^0] \iint_S \exp(-i\omega_2(\tilde{\mathbf{x}}^o \cdot \boldsymbol{\xi}))\Delta u_j(\boldsymbol{\xi}) n_{s\boldsymbol{\xi}}\, dS_{\boldsymbol{\xi}} \right), \qquad (9)$$

де θ_0, φ_0 – задані сталі, що вказують напрям падаючої поздовжньої хвилі переміщень з одиничною амплітудою; $\tilde{\mathbf{x}}^0$, $\tilde{\mathbf{v}}^0$, $\tilde{\mathbf{h}}^0$ – одиничні вектори (8) при $\varphi = \varphi_0$, $\theta = \theta_0$. Відмітимо, що поперечні перерізи розсіяння характеризують міру втрати пружної енергії падаючої хвилі внаслідок її взаємодії з дефектом.

У роботі виведено формули для знаходження параметрів розсіяного від просторової тріщини пружного поля в області Фраунгофера ($|\mathbf{x}| \to \infty$). З них випливає, що хвильову картину у віддаленій від дефекту зоні можна відобразити суперпозицією плоских гармонічних хвиль. Крім цього, отримані вирази пов'язують спостережуване поле з геометричними параметрами тріщини, тобто є тестовими під час розв'язання обернених дифракційних задач. Аналіз відповідних співвідношень у сферичній системі координат показує, що на великих відстанях від дефекту поздовжні хвилі викликають переважно радіальні переміщення, а поперечні вертикально та горизонтально поляризовані – кругові. Такий розподіл пояснює і розділення потоків енергії у хвильовому полі за двома типами хвиль. Щодо радіальних і дотичних напружень, то із закону Гука випливає їх пропорційність відповідним переміщенням при великих значеннях радіальної координати.

Результати роботи відкривають перспективи для отримання діаграм напрямленості, а також поперечних перерізів розсіяння у задачах дифракції хвиль на тріщинах складної просторової форми.

1. *Андрейкив А. Е., Лысак Н. В.* Метод акустической эмиссии в исследовании процессов разрушения. – Киев: Наук. думка, 1989. – 176 с.
2. *Вайсфельд Н. Д., Попов Г. Я.* Нестационарные динамические задачи концентрации упругих напряжений возле сферического дефекта // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2002. – № 3. – С. 90–102.
3. *Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* Дифракция упругих волн на пространственных трещинах произвольной в плане формы // Прикл. математика и механика. – 1996. – **60**, № 2. – С. 282–289.
4. *Кіт Г. С., Михаськів В. В., Хай М. В.* Метод потенціалів у тривимірних статичних і динамічних задачах теорії тріщин // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1996. – **32**, № 1. – С. 22–32.
5. *Фильштинский Л. А., Волкова Л. В.* Динамическая задача теории упругости для области с криволинейными разрезами (плоская деформация) // Докл. АН СССР. – 1983. – **271**, № 4. – С. 831–834.

6. *Achenbach J. D., Gautesen A. K., McMaken H.* Ray methods for waves in elastic solids. – Boston: Pitman, 1982.
7. *Bostrom A., Olsson P.* Scattering of elastic waves by nonplanar cracks // Wave Motion. – 1987. – **9,** No. 1. – P. 61–76.
8. *Mychas'kiv V. V., Butrak I. O.* Three-dimensional dynamic problems for an elastic body containing a shallow crack // Mater. Sci. – 2003. – **39**, No. 1. – P. 69–78.
9. *Roy A.* Diffraction of elastic waves by an elliptic crack. II // Int. J. Engng Sci. – 1987. – **25**, No. 2. – P. 155–169.
10. *Zhang Ch., Gross D.* On wave propagation in elastic solids with cracks. – Southampton: Comp. Mech. Publ., 1998. – 248 p.

АСИМПТОТИКА ДАЛЬНЕГО ПОЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ ОТ ДИНАМИЧЕСКОГО РАСКРЫТИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТРЕЩИНЫ

Рассмотрена трехмерная задача дифракции гармонических волн на пространственной трещине в бесконечном упругом теле. Путем аппроксимации ядер в интегральных представлениях компонент отраженных волн получены формулы для эффективного расчета перемещений, напряжений, а также поперечных сечений рассеяния в дальней зоне через скачки перемещений противоположных поверхностей трещины.

ASYMPTOTICS OF FAR-FIELD OF DISPLACEMENTS AND STRESSES FROM SPATIAL CRACK DYNAMIC OPENING

Within the three-dimensional statement, the harmonic wave diffraction problem for a spatial crack in an infinite elastic body is considered. The formulas for efficient determination of the far field displacements, stresses and scattering cross-section via displacement jumps across the crack faces are obtained by means of approximation of the kernels in the integral representations of the scattered wave components.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
19.02.04