

## ЗАСТОСУВАННЯ ДИСКРЕТНИХ РЯДІВ ФУР'Є ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ СТАТИКИ ПРУЖНИХ ТІЛ НЕКАНОНІЧНОЇ ФОРМИ

Для розв'язання двовимірних крайових задач про напружений стан пластин, оболонок і просторових тіл запропоновано нетрадиційний підхід, що базується на зведенні двовимірних задач до одновимірних із застосуванням дискретних рядів Фур'є. Двовимірна крайова задача містить як множники при розв'язувальних функціях геометричні та механічні параметри, що не дозволяють відокремити змінні. Введення доповняльних функцій, які включають в себе розв'язувальні функції і їхні похідні разом з вказаними множниками, дозволяє за рахунок розвинення усіх функцій в ряди Фур'є в одному координатному напрямку звести задачу до одновимірної. При інтегруванні одновимірної крайової задачі амплітудні значення доповняльних функцій визначаються за допомогою рядів Фур'є функцій, що задані на дискретній множині точок. Одновимірну крайову задачу розв'язуємо стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. Наведено результати розв'язання задач у вигляді графіків і таблиць.

При розв'язуванні двовимірних крайових задач про напружений стан пластин, оболонок і просторових тіл у багатьох випадках використовують підходи, які базуються на поданні розв'язку у вигляді рядів Фур'є за однією координатою, що дозволяє знизити розмірність і звести задачу до одновимірної, розв'язання якої можна здійснити наближеними аналітичними або чисельними методами. Однак це можна зробити лише за умови, коли диференціальні рівняння задачі та граничні умови є такими, що допускають відокремлення змінних. Але залежно від форми області, зміни товщини, механічних та інших факторів у деяких класах задач неможливо відокремити змінні й звести задачу до розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь.

Пропоновану статтю присвячено одному з підходів до розв'язання вказаних класів задач із застосуванням дискретних рядів Фур'є.

**1. Підхід до розв'язання двовимірних крайових задач.** Розглянемо один підхід до розв'язання двовимірних крайових задач зі змінними параметрами в двох координатних напрямках, що описують напружено-деформований стан пружних тіл під дією різних навантажень за певних граничних умов. Цей підхід базується на застосуванні дискретних рядів Фур'є при зведенні двовимірної крайової задачі до одновимірної.

Нехай напружено-деформований стан пружного тіла описується системою диференціальних рівнянь у частинних похідних у вигляді

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \alpha} = \Phi_i \left( \alpha, \beta, \frac{\partial^k Z_j}{\partial \beta^k} \right) + f_i(\alpha, \beta), \quad i, j, k = \overline{1, \ell}, \quad (1)$$

де  $Z_i = Z_i(\alpha, \beta)$  – шукані розв'язувальні функції,  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ ,  $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$ ;  $\Phi_i$  – лінійні функції відносно своїх аргументів;  $f_i(\alpha, \beta)$  – праві частини,  $\alpha\beta$  – ортогональна криволінійна система координат. Для відкритих пружних тіл до цієї системи рівнянь додаються граничні умови на контурах  $\alpha = \text{const}$ ,  $\beta = \text{const}$ . Для замкнених в одному координатному напрямку тіл граничні умови в цьому напрямку замінюються умовами періодичності.

Крайова задача для системи рівнянь (1) для замкнених, наприклад, у напрямку  $\beta$  пружних тіл за рахунок періодичності дозволяє для всіх шуканих функцій подати розв'язки у вигляді рядів Фур'є за координатою  $\beta$ . Але при цьому потрібно, щоб усі члени рівнянь з відповідними коефіцієнтами не перешкождали відокремленню змінних у цьому напрямку. У більшості

простих задачах таким чином можна відокремити змінні за допомогою подання всіх функцій у вигляді рядів Фур'є

$$Z_i = \sum_{n=0}^{\infty} [Z_{in}(\alpha) \cos n\beta + Z'_{in}(\alpha) \sin n\beta], \quad i = \overline{1, \ell}. \quad (2)$$

Але в багатьох випадках система диференціальних рівнянь (1) містить члени з коефіцієнтами, які характеризують геометричні параметри та ін., що не дозволяють відокремити змінні та подати шукані функції у вигляді рядів Фур'є. Для подолання цих перешкод вводять доповняльні функції, які виражаються через розв'язувальні функції і їхні похідні. Тоді отримуємо розв'язувальну систему рівнянь у вигляді

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \alpha} = F_i \left( \alpha, \beta, \frac{\partial^k Z_j}{\partial \beta^k}, \varphi_r^p \right) + f_i(\alpha, \beta), \quad i, j, k = \overline{1, \ell}, \quad r = \overline{1, R}, \quad p = \overline{1, P}, \quad (3)$$

де

$$\varphi_r^p = \varphi_r^p \left( \alpha, \beta, \frac{\partial^s Z_i}{\partial \alpha^s}, \frac{\partial^t Z_i}{\partial \beta^t} \right), \quad s, t \leq \ell. \quad (4)$$

При цьому маємо, що система диференціальних рівнянь (3) містить крім розв'язувальних функцій  $Z_i$ , доповняльні функції  $\varphi_r^p$ , так що загальна кількість невідомих функцій перевищує порядок системи рівнянь. Це треба враховувати при розв'язуванні крайової задачі.

Для побудови розв'язку вихідної крайової задачі подамо всі функції, що входять у систему рівнянь (3), у вигляді розвинень у ряди Фур'є за координатою  $\beta$ , тобто маємо

$$\tilde{X}(\alpha, \beta) = \sum_{m=0}^M \tilde{X}_m(\alpha) \cos \lambda_m \beta, \quad \tilde{Y}(\alpha, \beta) = \sum_{m=0}^M \tilde{Y}_m(\alpha) \sin \lambda_m \beta, \quad (5)$$

де  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  – розв'язувальні та доповняльні функції системи (3);  $\lambda_m = 2\pi m/T$ ,  $T$  – період.

Підставляючи ряди (5) у систему рівнянь (3), після відокремлення змінних і деяких перетворень для амплітудних значень рядів (5) отримуємо зв'язану систему звичайних диференціальних рівнянь у вигляді

$$\frac{dZ_{im}}{d\alpha} = F_{im}(\alpha, Z_{im}, \varphi_{rm}^p) + f_{im}(\alpha), \quad i = \overline{1, \ell}, \quad m = \overline{0, M}, \quad r = \overline{1, R}, \quad p = \overline{1, P}. \quad (6)$$

Аналогічно поступаємо з граничними умовами та одержуємо граничні умови для амплітудних значень функцій  $Z_{im}$  на кінцях інтервалу  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ . У систему рівнянь (6), крім амплітудних значень розв'язувальних функцій, входять ще амплітудні значення доповняльних функцій, які треба визначати окремо. Для їх визначення при інтегруванні системи (6) чисельним методом дискретної ортогоналізації одночасно для всіх гармонік на кожному кроці при фіксованому значенні  $\alpha$  обчислюємо амплітудні значення доповняльних функцій у деяких точках інтервалу  $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$ , використовуючи амплітудні значення розв'язувальних функцій [4]. Будуємо ряди Фур'є для функцій, заданих на дискретній множині точок [11, 12]. Зі збільшенням кількості точок, у яких обчислюються значення доповняльних функцій, дискретний ряд Фур'є все менше відрізняється від точного ряду Фур'є і таким чином можна отримати результат із високою точністю. За допомогою схеми Рунге [7, 11] знаходимо коефіцієнти цих рядів, підставляємо їх у систему рівнянь (6) і продовжуємо її інтегрування. На кінцях інтервалу  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$  задовольняємо граничні умови.

**2. Метод дискретної ортогоналізації.** Далі викладемо основні положення методу дискретної ортогоналізації. При розв'язуванні деяких класів крайових задач для лінійних звичайних диференціальних рівнянь виникають труднощі при реалізації обчислювального процесу, які обумовлені жорсткістю диференціальних рівнянь, тобто одночасно мають місце розв'язки рівняння, які ростуть повільно і дуже швидко. У деяких випадках навіть на комп'ютерах із великою кількістю значущих цифр не можна отримати надійного результату. Для таких крайових задач метод зведення крайових задач до задачі Коші уже не можна застосувати. У цих випадках пропонуються інші підходи, що дозволяють уникнути зазначених труднощів.

Наведемо один метод, що дозволяє у зазначених випадках побудувати стійкий обчислювальний процес розв'язання крайової задачі для системи диференціальних рівнянь [1–3]

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t), \quad a \leq t \leq b, \quad (7)$$

з граничними умовами

$$\mathbf{B}_1\mathbf{y}(a) = \mathbf{b}_1, \quad (8)$$

$$\mathbf{B}_2\mathbf{y}(b) = \mathbf{b}_2, \quad (9)$$

де  $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}^\top$  – вектор-стовпець;  $\mathbf{f}$  – вектор-стовпець правої частини;  $\mathbf{A}(t)$  – задана квадратна матриця порядку  $n$ ;  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$  – задані прямокутні матриці відповідно порядків  $k \times n$  і  $(n - k) \times n$ , де  $k < n$ ;  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  – задані вектори.

Розглянемо суть методу. Розв'язок крайової задачі (7)–(9) шукатимемо у вигляді

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{j=1}^m C_j \mathbf{y}_j(t) + \mathbf{y}_{m+1}(t), \quad (10)$$

де  $m = \min(k, n - k)$  (для визначеності покладемо  $m = n - k$ );  $\mathbf{y}_j$  – розв'язки задач Коші для системи рівнянь (7) при  $\mathbf{f} = 0$  з початковими умовами, що задовольняють граничні умови (8) на лівому кінці інтервалу при  $\mathbf{b}_1 = 0$ ;  $\mathbf{y}_{m+1}$  – розв'язок задачі Коші для системи (7) з початковими умовами, що задовольняють граничні умови (8);  $m$  – кількість граничних умов на правому кінці інтервалу інтегрування.

Метод дискретної ортогоналізації дає можливість одержати стійкий обчислювальний процес за рахунок ортогоналізації векторів-розв'язків задач Коші в скінченній кількості точок інтервалу зміни аргументу.

Розіб'ємо весь інтервал  $[a, b]$  на малі відрізки точками інтегрування  $t_s, s = 0, 1, \dots, N$ , так, що  $t_0 = a, t_N = b$ . Серед цих точок вибираємо точки ортогоналізації  $T_i, i = 0, 1, \dots, M$ . Це залежить від ступеня необхідної точності розв'язку задачі й не залежить від інших вимог.

Нехай у точці  $T_i$  будь-яким чисельним методом, наприклад Рунге – Кутта, знайдено розв'язки задач Коші, які позначимо через  $\mathbf{u}_r(T_i)$ , де  $r = 1, 2, \dots, m + 1$ .

Таким чином, у точці  $T_i$  до ортогоналізації маємо вектори

$$\mathbf{u}_1(T_i), \mathbf{u}_2(T_i), \dots, \mathbf{u}_m(T_i), \mathbf{u}_{m+1}(T_i).$$

Проортонормуємо вектори  $\mathbf{u}_j(T_i), j = 1, 2, \dots, m$ , у точці  $T_i$  і позначимо їх через

$$\mathbf{z}_1(T_i), \mathbf{z}_2(T_i), \dots, \mathbf{z}_m(T_i).$$

Вектори  $\mathbf{z}_r$  виражаються через вектори  $\mathbf{u}_i$  таким чином:

$$\mathbf{z}_r = \frac{1}{\omega_{rr}} \left( \mathbf{u}_r - \sum_{j=1}^{r-1} \omega_{rj} \mathbf{z}_j \right), \quad r = 1, 2, \dots, m,$$

$$\text{де } \omega_{rj} = (\mathbf{u}_r, \mathbf{z}_j), \quad j < r, \quad \omega_{rr} = \sqrt{(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_r) - \sum_{j=1}^{r-1} \omega_{rj}^2}.$$

Вектор  $\mathbf{z}_{m+1}$  не нормуємо й обчислюємо за формулою

$$\mathbf{z}_{m+1} = \mathbf{u}_{m+1} - \sum_{j=1}^m \omega_{m+1,j} \mathbf{z}_j, \quad \omega_{m+1,j} = (\mathbf{u}_{m+1}, \mathbf{z}_j).$$

Після перетворень отримаємо матричну рівність

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1(T_i) \\ \mathbf{u}_2(T_i) \\ \dots \\ \mathbf{u}_m(T_i) \\ \mathbf{u}_{m+1}(T_i) \end{pmatrix} = \mathbf{\Omega}_j \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1(T_i) \\ \mathbf{z}_2(T_i) \\ \dots \\ \mathbf{z}_m(T_i) \\ \mathbf{z}_{m+1}(T_i) \end{pmatrix},$$

де

$$\mathbf{\Omega}_i = \begin{pmatrix} \omega_{11}(T_i) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \omega_{21}(T_i) & \omega_{22}(T_i) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{m1}(T_i) & \omega_{m2}(T_i) & \omega_{m3}(T_i) & \dots & 0 \\ \omega_{m+1,1}(T_i) & \omega_{m+1,2}(T_i) & \omega_{m+1,3}(T_i) & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Вектори  $\mathbf{z}_r(T_i)$  є початковими значеннями задач Коші для однорідної ( $r = 1, 2, \dots, m$ ) і неоднорідної ( $r = m + 1$ ) систем диференціальних рівнянь (7) в інтервалі  $T_i \leq t \leq T_{i+1}$ .

Після виконання інтегрування на останньому відрізку  $T_{m-1} \leq t \leq T_m$  та ортогоналізації у точці  $T_M$  маємо

$$\mathbf{y}(T_M) = \sum_{j=1}^m C_j^M \mathbf{z}_j(T_M) + \mathbf{z}_{m+1}(T_M). \quad (12)$$

Задовольняючи граничні умови на правому кінці інтервалу інтегрування, тобто підставляючи (12) у (9), дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих  $C_j^M$ . Після знаходження  $C_j^M$  розв'язок крайової задачі (7)–(9) у точці  $t = T_M$  дається формулою (12). На цьому закінчується прямий хід розв'язування задачі.

При зворотному ході за значеннями сталих  $C_j^i$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , визначаємо сталі  $C_j^{i-1}$ , починаючи з  $i = M$ . Тоді маємо

$$\mathbf{C}^{i-1} = [\mathbf{\Omega}_i^\top]^{-1} \mathbf{C}^i, \quad (13)$$

де  $\mathbf{\Omega}_i^\top$  – транспонована матриця (11);  $\mathbf{C}^i$  – вектор-стовпець з компонентами  $C_1^i, C_2^i, \dots, C_m^i, 1$ . Таким чином можна знайти значення сталих  $C_j^i$  в усіх точках, починаючи з  $i = M$ .

При реалізації цього алгоритму необхідно зберігати інформацію про матриці  $\mathbf{\Omega}_i$  і вектори  $\mathbf{z}_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, m + 1$ .

Одержана інформація в усіх точках ортогоналізації практично не використовується, а при розв'язуванні задач обмежуються тільки значеннями шуканих функцій у ряді точок – у так званих точках видачі результатів, яких часто є значно менше, ніж точок ортогоналізації. Враховуючи цю обставину, можна суттєво скоротити обсяг результатів.

З рівності (13) можна отримати

$$\mathbf{C}^{i-p} = \left( \prod_{j=0}^{p-1} \mathbf{\Omega}_{i-j}^{\top} \right)^{-1} \mathbf{C}^i.$$

Таким чином, для знаходження вектора  $\mathbf{C}^{i-p}$  необхідно зберігати інформацію про добуток матриць  $\prod_{j=0}^{p-1} \mathbf{\Omega}_{i-j}^{\top}$ , що дає значну економію.

Необхідна точність розв'язку крайової задачі досягається за рахунок збільшення кількості точок ортогоналізації і при цьому оцінюється його збіжність. Також можна контролювати точність розв'язку при порівнянні результатів розв'язання крайових задач зліва направо та справа наліво за рахунок різних обчислювальних схем, де збіг результатів свідчить про точність розв'язку.

**3. Обґрунтування методу на прикладах розв'язування задач для пластин та оболонок.** Детальніше розглянемо особливості методу, що базується на застосуванні дискретних рядів Фур'є, на конкретних прикладах.

Розглянемо згин квадратної пластини змінної товщини [13]. Пластина перебуває під дією поперечного навантаження  $q = q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/a)$ , шарнірно оперта по всіх краях. Серединну площину пластини віднесемо до прямокутної ортогональної системи координат  $xOy$ , вона займає область  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq a$ . Товщина пластини змінюється в одному координатному напрямку за законом

$$h(x) = h_0[1 + \alpha(1 - 6x + 6x^2)], \quad -1 < \alpha < 1, \quad h_0 = \text{const}. \quad (14)$$

Напружено-деформований стан таких пластин описується системою диференціальних рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{Q}_y}{\partial y} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ D_M(1 - \nu^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu M_y \right] - q, \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} &= \hat{Q}_y - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ D_M(1 - \nu) \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= -\vartheta_y, \quad \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} = \frac{1}{D_M} M_y + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (15)$$

де  $D_M = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$  – згинна жорсткість;  $\hat{Q}_y = Q_y + \frac{\partial H}{\partial x}$  – зведене поперечне зусилля;  $H$  – крутильний момент;  $M_y$ ,  $w$ ,  $\vartheta_y$  – відповідно згинний момент, прогин і кут повороту при  $y = \text{const}$ ;  $E$  – модуль пружності;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Граничні умови на контурах мають вигляд

$$w = 0, \quad M_x \equiv \nu M_y - \frac{Eh^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a, \quad (16)$$

$$w = 0, \quad M_y \equiv \nu M_x - \frac{Eh^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = a. \quad (17)$$

Цю задачу можна розв'язати двома способами. Оскільки товщина пластини змінюється лише в одному координатному напрямку (за координатою  $x$ ), то, подавши розв'язувальні функції у вигляді рядів Фур'є (2) за координатою  $y$ , після відокремлення змінних отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь, яку розв'язуємо чисельним методом дискретної ортогоналізації (уздовж координати  $x$ ). При цьому отриманий розв'язок можна прийняти за точний з достатнім ступенем точності.

У другому способі застосуємо метод дискретних рядів Фур'є. Для цього замінимо доповняльними функціями члени розв'язувальної системи диференціальних рівнянь (15), що перешкоджають відокремленню змінних у напрямку координати  $x$ . Тоді отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{Q}_y}{\partial y} &= \frac{E}{12} \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} - q, & \frac{\partial M_y}{\partial y} &= \hat{Q}_y - \frac{E}{6(1+\nu)} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= -\vartheta_y, & \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} &= \frac{12(1-\nu^2)}{E} \varphi_3 + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (18)$$

де

$$\varphi_1(x, y) = h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varphi_2(x, y) = h^3 \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x}, \quad \varphi_3(x, y) = \frac{M_y}{h^3}. \quad (19)$$

Коефіцієнти системи диференціальних рівнянь (18) формально не залежать від координати  $x$ , хоча самі доповняльні функції залежать. Розв'язок крайової задачі для системи (18), що задовольняє граничні умови на краях  $x = 0$ ,  $x = a$ , а також функції  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , які входять у праві частини рівнянь, подамо у вигляді розвинень (5):

$$\tilde{Y}(x, y) = \sum_{m=1}^M \tilde{Y}_m(y) \sin \lambda_m x, \quad \varphi_2(x, y) = \sum_{m=1}^M \varphi_{2,m}(y) \cos \lambda_m x, \quad (20)$$

де  $\tilde{Y} = \{\hat{Q}_y, M_y, w, \vartheta_y, \varphi_1, \varphi_3, q\}$ ,  $\lambda_m = \pi m/a$ .

Підставляючи розвинення (20) у (18) і граничні умови (17), одержимо систему звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних значень цих розвинень

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{Q}_{y,m}}{dy} &= -\lambda_m^2 \left( \frac{E}{12} \varphi_{1,m} - \nu M_{y,m} \right) - q_m, & \frac{dM_{y,m}}{dy} &= \hat{Q}_{y,m} + \frac{E}{6(1+\nu)} \lambda_m \varphi_{2,m}, \\ \frac{dw_m}{dy} &= -\vartheta_{y,m}, & \frac{d\vartheta_{y,m}}{dy} &= \frac{12(1-\nu^2)}{E} \varphi_{3,m} - \nu \lambda_m^2 w_m, \quad m = \overline{1, M}, \end{aligned} \quad (21)$$

тут  $q_1 \neq 0$ ,  $q_2 = \dots = q_M = 0$ .

Граничні умови набудуть вигляду

$$w_m = 0, \quad M_{y,m} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = a. \quad (22)$$

Одержані рівняння системи (21) інтегруються одноразово для усіх гармонік. У процесі інтегрування, на кожному кроці застосування чисельного методу дискретної ортогоналізації, будемо обчислювати амплітудні значення доповняльних функцій (19). Для цього за поточними значеннями амплітуд розв'язувальних функцій для фіксованого значення  $y_k$  обчислюємо в ряді точок  $x_i$ ,  $i = \overline{1, R}$ , відрізка  $[0, a]$  величини

$$\begin{aligned} h(x_i) &= h_0 [1 + \alpha(1 - 6x_i + 6x_i^2)], \\ \varphi_1^i &= \varphi_1(x_i, y_k) = -h^3(x_i) \sum_{m=1}^M \lambda_m^2 w_m(y_k) \sin \lambda_m x_i, \end{aligned}$$

$$\varphi_2^i = \varphi_2(x_i, y_k) = h^3(x_i) \sum_{m=1}^M \lambda_m \vartheta_{y,m}(y_k) \cos \lambda_m x_i,$$

$$\varphi_3^i = \varphi_3(x_i, y_k) = \frac{1}{h^3(x_i)} \sum_{m=1}^M M_{y,m}(y_k) \sin \lambda_m x_i.$$

Продовжуємо для фіксованого значення  $y_k$  функції  $\varphi_1, \varphi_3$  непарним способом, а функцію  $\varphi_2$  – парним способом на відрізок  $[a, 2a]$  та обчислюємо потім поточні значення  $\varphi_{j,m}(y_k)$ , використовуючи стандартну процедуру визначення коефіцієнтів Фур'є функції від змінної  $x$ , яку задано таблицею. Знайдені значення  $\varphi_{j,m}(y_k)$  підставляємо в систему рівнянь (21) і виконуємо наступний крок інтегрування, переходячи від точки  $y_k$  до точки  $y_{k+1}$ . На початку інтегрування, враховуючи граничні умови, задаємо початкові значення розв'язувальних функцій.

Як було зазначено вище, при збільшенні кількості точок, у яких обчислюються табличні значення доповняльних функцій, дискретний ряд Фур'є усе менше відрізняється від звичайного, про що свідчать дані табл. 1.

Практично при розв'язуванні прикладних задач у більшості випадків використовують лише небагато перших членів дискретного ряду Фур'є, тому що коефіцієнти Фур'є швидко спадають, а з ними швидко зменшується вплив далеких гармонік. Відомо, що в питанні про точність наближень при обчисленні рядів Фур'є важливу роль відіграє швидкість спадання коефіцієнтів Фур'є, що, в свою чергу, пов'язано з диференціальними властивостями функції, продовженої на весь інтервал  $(-\infty, \infty)$ . Поряд з цим існують наближені підходи, які дозволяють порівняти значення коефіцієнта дискретного ряду Фур'є, побудованого на скінченній множині точок, з точним значенням цього ж та інших коефіцієнтів ряду Фур'є для тієї ж функції, яка задана аналітично [11].

Наведемо результати застосування цього підходу.

Нехай функція  $y(x)$  задана на множині точок, тобто  $y(x_i) = y_i$  при  $x_i = i \frac{2\pi}{k}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$ . Побудуємо ряд Фур'є для функції  $f(x)$ , що задана на дискретній множині точок  $x_i$ ,  $i = \overline{0, k-1}$ . Цей ряд запишемо у вигляді

$$y(x) = a_0 + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx), \quad n \leq k/2, \quad (23)$$

де коефіцієнти  $a_0, a_m, b_m$  визначаються за формулами

$$a_0 = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} y_i, \quad (24)$$

$$a_m = \frac{2}{k} \sum_{i=0}^{k-1} y_i \cos m \frac{2\pi i}{k}, \quad (25)$$

$$b_m = \frac{2}{k} \sum_{i=1}^{k-1} y_i \sin m \frac{2\pi i}{k}, \quad m \leq k/2. \quad (26)$$

Виведемо співвідношення, які зв'язують наближені значення коефіцієнтів ряду Фур'є з точними значеннями коефіцієнтів цього ряду.

Розглянемо двічі диференційовну функцію  $y = f(x)$ , задану аналітично на інтервалі  $[0, 2\pi]$ . Точний ряд Фур'є для цієї функції має вигляд

$$y(x) = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos jx + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin jx.$$

Тут  $A_j, B_j$  – точні значення коефіцієнтів ряду Фур'є. Покладаючи  $x_i = i \frac{2\pi}{k}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$ , обчислюємо ті значення функції  $y_i = y(x_i)$ , які містяться у формулах (24)–(26). Підставляючи ці значення  $y_i$  у формули (24)–(26), після деяких перетворень одержуємо

$$a_m = A_m + A_{k-m} + A_{k+m} + A_{2k-m} + \dots,$$

$$b_m = B_m - B_{k-m} + B_{k+m} - B_{2k-m} + \dots, \quad m \leq k/2.$$

Зокрема, маємо

при  $k = 12$ :

$$a_0 = A_0 + A_{12} + \dots, \quad a_1 = A_1 + A_{11} + \dots,$$

$$a_2 = A_2 + A_{10} + \dots, \quad a_3 = A_3 + A_9 + \dots;$$

при  $k = 24$ :

$$a_0 = A_0 + A_{24} + \dots, \quad a_1 = A_1 + A_{23} + \dots, \quad a_2 = A_2 + A_{22} + \dots,$$

$$a_3 = A_3 + A_{21} + \dots, \quad a_4 = A_4 + A_{20} + \dots, \quad a_5 = A_5 + A_{19} + \dots,$$

$$a_6 = A_6 + A_{18} + \dots, \quad a_7 = A_7 + A_{17} + \dots, \quad a_8 = A_8 + A_{16} + \dots, \text{ і т.д.}$$

З цих рівностей бачимо, що при  $k = 12$  можна враховувати тільки 2-3 гармоніки, а при  $k = 24$  можна очікувати достатню точність уже для перших 7-8 гармонік.

Проведемо дослідження впливу кількості точок  $R$ , у яких обчислюються значення доповняльних функцій, і точок  $M$ , які враховуються при розв'язуванні задач, на збіжність розв'язку задачі про згин квадратної пластини, який одержано за допомогою методу, що базується на апроксимації дискретними рядами Фур'є, до точного.

Задачу розв'язано за таких умов:  $a = 1$ ;  $\nu = 0.3$ ;  $h_0 = 0.1$ ;  $\alpha = 0.3$ ;  $R = 38, 40, 60, 80, 100$ ;  $M = 6, 8, 10, 15$ . У табл. 1 наведено результати розв'язання задачі для прогину  $w$ , згинного моменту  $M_x$  і кута повороту  $\vartheta_x$  у перерізі  $y = 0.5$  для деяких значень координати  $x$ . Останній рядок містить точний розв'язок задачі, який отримано першим способом.

Таблиця 1

R	M	$wE/q_0$			$-\vartheta_x E/q_0$			$M_x \cdot 10^2/q_0$		
		$x$								
		0.1	0.3	0.5	0	0.2	0.4	0.1	0.3	0.5
38 40	6	8.327	24.026	31.381	83.167	80.277	38.552	0.365	1.992	2.813
		8.333	24.039	31.396	83.232	80.308	38.564	0.368	1.992	2.813
38 40	8	8.324	24.023	31.386	83.081	80.286	38.657	0.355	1.994	2.815
		8.330	24.036	31.401	83.148	80.318	38.666	0.359	1.996	2.816
38 40	10	8.324	24.022	31.384	83.048	80.249	38.637	0.355	1.994	2.812
		8.330	24.035	31.399	83.116	80.282	38.646	0.359	1.994	2.814
40 60 80 100	15	8.331	24.035	31.399	83.086	80.283	38.642	0.369	1.994	2.815
		8.345	24.665	31.434	83.251	80.159	38.666	0.378	1.998	2.816
		8.350	24.076	31.446	83.308	80.387	38.674	0.377	1.999	2.816
		8.352	24.081	31.452	83.334	80.399	38.677	0.378	1.999	2.817
-----		8.357	24.091	31.463	83.377	80.424	38.687	0.379	2.000	2.817



З аналізу даних у табл. 1 бачимо, як зі збільшенням кількості членів  $R$  дискретного ряду при врахуванні  $M$  членів розв'язки задачі для прогину  $w$ , кута повороту  $\vartheta_x$  (аналог першої похідної від  $w$ ) і згинного моменту  $M_x$  (аналог другої похідної від  $w$ ) збігаються до точного розв'язку. Зокрема, для  $w$  при  $x = 0.5$  розв'язок, отриманий із застосуванням дискретних рядів Фур'є, відрізняється від точного на  $1 \cdot 10^{-4}$ . Таку ж величину похибки маємо для  $\vartheta_x$  і  $M_x$ . Це можна пояснити тим, що задача розв'язується одночасно для системи рівнянь, у яку входять усі ці функції.

Наведемо ще один приклад, у якому можна отримати розв'язок задачі двома способами, як і в попередньому прикладі. Розглянемо задачу про напружений стан кругової циліндричної оболонки змінної товщини в напрямку прямої.

Середину поверхню віднесемо до ортогональної системи координат  $s, \theta$ , де  $s$  – довжина дуги вздовж твірної,  $0 \leq s \leq L$ ;  $\theta$  – центральний кут у поперечному перерізі,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Розв'язувальна система диференціальних рівнянь у частинних похідних має вигляд [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{Q}_s}{\partial s} &= \frac{\nu}{r} N_s - \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 M_s}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu^2}{r^2} D_N \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1-\nu^2}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( D_M \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \\ &+ \frac{1-\nu^2}{r^2} D_N w + \frac{1-\nu^2}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( D_M \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - q_r, \\ \frac{\partial N_s}{\partial s} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \theta} + \frac{4}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{D_M}{p_0 D_N} \hat{S} \right) + \frac{2(1-\nu)}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{D_M}{p_0} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial \theta} \right) - \frac{2(1-\nu)}{r^4} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{D_M}{p_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right), \\ \frac{\partial \hat{S}}{\partial s} &= -\frac{\nu}{r} \frac{\partial N_s}{\partial \theta} - \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial M_s}{\partial \theta} - \frac{1-\nu^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( D_N \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \frac{1-\nu^2}{r^4} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( D_M \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \\ &- \frac{1-\nu^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (D_N w) + \frac{1-\nu^2}{r^4} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( D_M \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \\ \frac{\partial M_s}{\partial s} &= \hat{Q}_s - \frac{4}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{D_M}{p_0 D_N} \hat{S} \right) - \frac{2(1-\nu)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{D_M}{p_0} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial \theta} \right) + \frac{2(1-\nu)}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{D_M}{p_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= -\vartheta_s, \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{D_N} N_s - \frac{\nu}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\nu}{r} w, \\ \frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{2}{1-\nu} \frac{1}{p_0 D_N} \hat{S} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{4}{r^3} \frac{D_M}{p_0 D_N} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{4}{r^2} \frac{D_M}{p_0 D_N} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial \vartheta_s}{\partial s} &= \frac{1}{D_M} M_s + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad 0 \leq s \leq L, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{aligned} \quad (27)$$

де  $r$  – радіус кривини серединної поверхні;  $\hat{Q}_s, N_s, \hat{S}, M_s$  – зусилля і згинний момент;  $w, u, v, \vartheta_s$  – переміщення і кут повороту;  $p_0 = 1 + \frac{4}{r^2} \frac{D_M}{D_N} = 1 + \frac{4h^2}{12r^2}$ ,  $D_N = \frac{E \cdot h(\theta)}{1-\nu^2}$ ,  $D_M = \frac{E \cdot h^3(\theta)}{12(1-\nu^2)}$  – тангенціальна та згинна жорсткість.

Товщина оболонки змінюється за законом

$$h = h_0(1 + \beta \cos \theta), \quad h_0 = \text{const}, \quad 0 < \beta \leq 1. \quad (28)$$

Оболонка знаходиться під дією навантаження

$$q_\gamma = q_0 \sin \pi s/L, \quad q_0 = \text{const}, \quad (29)$$

при шарнірному закріпленні торців:

$$N_s = M_s = w = v = 0 \quad \text{при} \quad s = 0 \quad \text{і} \quad s = L. \quad (30)$$

Один із способів розв'язання задачі полягає у тому, що враховуючи (28)–(30) і подаючи розв'язувальні функції у вигляді рядів (2), у системі рівнянь (27) можна відокремити змінні й отримати систему звичайних диференціальних рівнянь для кожної гармоніки рядів (2) з відповідними граничними умовами або умовами періодичності за координатою  $\theta$ . Отриману крайову задачу розв'язуємо методом дискретної ортогоналізації. При цьому розв'язок можна прийняти за точний.

Другий спосіб розв'язання задачі базується на застосуванні дискретних рядів Фур'є. За цим способом вводимо доповняльні функції, які дозволять відокремити змінні за координатою  $\theta$ , у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi_1^j &= D_M \left\{ \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right\}, & \varphi_2^j &= D_N \left\{ w, \frac{\partial v}{\partial \theta} \right\}, & j &= 1, 2, \\ \varphi_3^j &= \frac{D_M}{p_0 D_N} \left\{ \hat{S}, \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial \vartheta_s}{\partial \theta} \right\}, & j &= 1, 2, 3, & \varphi_4^j &= \frac{D_M}{p_0} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial \vartheta_s}{\partial \theta} \right\}, & j &= 1, 2, \\ \varphi_5 &= \frac{1}{D_N} N_s, & \varphi_6 &= \frac{1}{p_0 D_N} \hat{S}, & \varphi_7 &= \frac{1}{D_M} M_s. \end{aligned} \quad (31)$$

Подамо розв'язувальні та доповняльні функції у вигляді рядів Фур'є

$$\begin{aligned} X(s, \theta) &= \sum_{m=0}^M X_m(s) \cos \lambda_m \theta, & Y(s, \theta) &= \sum_{m=1}^M Y_m(s) \sin \lambda_m \theta, \\ \lambda_m &= \pi m/2\pi = m/2, \end{aligned} \quad (32)$$

де  $X = \{\hat{Q}_s, N_s, M_s, w, u, \vartheta_s, \varphi_1^j, \varphi_2^j, \varphi_5, \varphi_7, q_\gamma\}$ ,  $Y = \{\hat{S}, v, \varphi_3^j, \varphi_4^j, \varphi_6\}$ .

Після підстановки функцій (31) і розвинень (32) у рівняння (27) і граничні умови (30) отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь для амплітудних значень рядів (32) у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{Q}_{s,m}}{ds} &= \frac{v}{r} N_{s,m} + \frac{v\lambda_m^2}{r^2} M_{s,m} + \frac{1-v^2}{r^2} \varphi_{2,m}^2 - \frac{(1-v^2)\lambda_m^2}{r^4} \varphi_{1,m}^1 + \\ &\quad + \frac{(1-v^2)\lambda_m}{r^2} \varphi_{2,m}^1 - \frac{(1-v^2)\lambda_m}{r^4} \varphi_{1,m}^2, \\ \frac{dN_{s,m}}{ds} &= -\frac{\lambda_m}{r} \hat{S}_m + \frac{4\lambda_m}{r^3} \varphi_{3,m}^1 + \frac{2(1-v)\lambda_m}{r^3} \varphi_{4,m}^2 - \frac{2(1-v)\lambda_m}{r^4} \varphi_{4,m}^1, \\ \frac{d\hat{S}_m}{ds} &= \frac{v\lambda_m}{r} N_{s,m} + \frac{v\lambda_m}{r^2} M_{s,m} + \frac{(1-v^2)\lambda_m}{r^2} \varphi_{2,m}^2 + \frac{(1-v^2)\lambda_m}{r^4} \varphi_{1,m}^1 + \\ &\quad + \frac{(1-v^2)\lambda_m}{r^2} \varphi_{2,m}^1 - \frac{(1-v^2)\lambda_m}{r^4} \varphi_{1,m}^2, \\ \frac{dM_{s,m}}{ds} &= \hat{Q}_{s,m} - \frac{4\lambda_m}{r^2} \varphi_{3,m}^1 - \frac{2(1-v)\lambda_m}{r^2} \varphi_{4,m}^2 + \frac{2(1-v)\lambda_m}{r^3} \varphi_{4,m}^1, \\ \frac{dw_m}{ds} &= -\vartheta_{s,m}, & \frac{du_m}{ds} &= \varphi_{5,m} - \frac{v\lambda_m}{r} v_m - \frac{v}{r} w_m, \\ \frac{dv_m}{ds} &= \frac{2}{1-v} \varphi_{6,m} + \frac{\lambda_m}{r} u_m + \frac{4}{r^3} \varphi_{3,m}^2 - \frac{4}{r^2} \varphi_{3,m}^3, \\ \frac{d\vartheta_{s,m}}{ds} &= \varphi_{7,m} - \frac{v\lambda_m^2}{r^2} w_m - \frac{v\lambda_m}{r^2} v_m, & m &= \overline{0, M}, \end{aligned} \quad (33)$$

з граничними умовами

$$N_{s,m} = M_{s,m} = w_m = v_m = 0 \quad \text{при} \quad s = 0 \quad \text{і} \quad s = L. \quad (34)$$

Отриману крайову задачу (33), (34) розв'язуємо методом дискретної ортогоналізації. Задачу розв'язано за такими даними:  $r_0 = 30$ ;  $L = 30$ ;  $h_0 = 0.25, 0.50$ ;  $\beta = 0.5$ ;  $\nu = 0.3$ ;  $R = 12, 16, 24, 36$ ;  $M = 3, 5, 8, 12$ .

Результати розв'язання задачі наведено в табл. 2 для прогину  $w$  і зусилля  $N_\theta$ . В останньому рядку наведено точний розв'язок задачі, отриманий першим способом.

Таблиця 2

R	M	$wE/10^3 q_0$				$N_\theta/10 q_0$			
		$\theta/\pi = 0.0$		$\theta/\pi = 1.0$		$\theta/\pi = 0.0$		$\theta/\pi = 1.0$	
		$\frac{s}{L} = 0.1$	$\frac{s}{L} = 0.5$	$\frac{s}{L} = 0.1$	$\frac{s}{L} = 0.5$	$\frac{s}{L} = 0.1$	$\frac{s}{L} = 0.5$	$\frac{s}{L} = 0.1$	$\frac{s}{L} = 0.5$
$h_0 = 0.25$									
12	3	0.654	2.117	1.887	6.108	0.794	2.596	0.794	2.571
16	5	0.770	2.492	2.098	6,788	0.963	3.115	0.891	2.884
24	8	0.745	2.411	2.146	6.945	0.917	2.968	0.917	2.969
36	12	0.749	2.424	2.157	6.982	0.926	2.997	0.926	2.998
----		0.748	2.421	2.157	6.981	0.926	2.996	0.927	3.000
$h_0 = 0.5$									
12	3	0.326	1.055	0.943	3.053	0.791	2.561	0.794	2.570
16	5	0.385	1.245	1.049	3.393	0.962	3.112	0.891	2.884
24	8	0.374	1.211	1.073	3.472	0.917	2.966	0.917	2.969
36	12	0.372	1.206	1.079	3.491	0.925	2.995	0.926	2.997
----		0.372	1.205	1.078	3.490	0.922	2.984	0.926	2.998

З аналізу даних у табл. 2 бачимо, як зі збільшенням кількості  $R$  та  $M$  розв'язок задачі для  $w$  і  $N_\theta$ , отриманий із застосуванням дискретних рядів Фур'є, збігається до точного розв'язку. Наприклад, для  $R = 36$ ,  $M = 12$  спостерігається збіг результатів у третій - четвертій значущій цифрі.

**4. Розв'язання задачі про напружений стан порожнистих ізотропних циліндрів із еліптичним поперечним перерізом.** Наведемо результати розв'язування на основі цього підходу задач про напружений стан некругових циліндрів при певних граничних умовах на торцях у просторовій постановці [6, 19].

Розглянемо задачу про напружений стан порожнистих некругових ізотропних циліндрів, що знаходяться під дією навантажень, прикладених на бічних поверхнях. Віднесемо циліндр до ортогональної криволінійної системи координат  $s, t, \gamma$ , де  $s, t$  - довжини дуг вздовж твірної і напрямної поверхні відліку  $\gamma = \gamma_0$ ,  $\gamma$  - координата вздовж нормалі до цієї поверхні. Перша квадратична форма у вибраній системі координат буде мати вигляд

$$dS^2 = ds^2 + H_2^2(t, \gamma) dt^2 + d\gamma^2,$$

де  $H_2 = 1 + \gamma/R_t$  - параметр Ляме;  $R_t = R_t(t)$  - радіус кривини поверхні відліку в поперечному перерізі;  $0 \leq s \leq \ell$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $\gamma_p \leq \gamma \leq \gamma_q$ .

За вихідні приймаємо основні рівняння просторової теорії пружності [5, 10]: рівняння рівноваги, вирази деформацій через переміщення і співвідношення закону Гука для ізотропного тіла.

На бічних поверхнях будуть мати місце граничні умови

$$\begin{aligned}\sigma_\gamma &= q_\gamma^-, & \tau_{s\gamma} &= q_{s\gamma}^-, & \tau_{t\gamma} &= q_{t\gamma}^- & \text{при} & \gamma = \gamma_p, \\ \sigma_\gamma &= q_\gamma^+, & \tau_{s\gamma} &= q_{s\gamma}^+, & \tau_{t\gamma} &= q_{t\gamma}^+ & \text{при} & \gamma = \gamma_q.\end{aligned}\quad (35)$$

На торцях циліндра будемо розглядати умови простого опирання

$$\sigma_s = u_t = u_\gamma = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, \quad s = \ell. \quad (36)$$

За розв'язувальні функції приймаємо три компоненти напружень  $\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, \tau_{t\gamma}$  і три компоненти переміщень  $u_s, u_t, u_\gamma$ . Після деяких перетворень з основних рівнянь теорії пружності можна отримати розв'язувальну систему диференціальних рівнянь у частинних похідних шостого порядку зі змінними коефіцієнтами [14].

Граничні умови (36) дозволяють відокремити змінні вздовж твірної циліндра, тому подамо розв'язувальні функції і компоненти навантаження у вигляді рядів Фур'є

$$X(s, t, \gamma) = \sum_{n=1}^N X_n(t, \gamma) \sin \lambda_n s, \quad Y(s, t, \gamma) = \sum_{n=0}^N Y_n(t, \gamma) \cos \lambda_n s, \quad (37)$$

де  $X = \{\sigma_\gamma, \tau_{t\gamma}, u_\gamma, u_t, q_\gamma, q_t\}$ ,  $Y = \{\tau_{s\gamma}, u_s, q_s\}$ ,  $\lambda_n = \pi n / \ell$ ,  $0 \leq s \leq \ell$ .

Після підстановки (37) у розв'язувальну систему рівнянь і граничні умови (35) і відокремлення змінних одержуємо двовимірну крайову задачу, яка для кожного номера  $n$ ,  $n = \overline{0, N}$ , описується системою диференціальних рівнянь у частинних похідних у вигляді

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{\gamma,n}}{\partial \gamma} &= -\frac{1}{(1 + \gamma/R_t)R_t} \sigma_{\gamma,n} + \lambda_n \tau_{s\gamma,n} - \frac{1}{1 + \gamma/R_t} \frac{\partial \tau_{t\gamma,n}}{\partial t} + \\ &+ \frac{1}{(1 + \gamma/R_t)R_t} \left[ -\frac{E\nu}{1 - \nu^2} \lambda_n u_{s,n} + \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{\gamma,n} + \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{1}{1 + \gamma/R_t} \left( \frac{\partial u_{t,n}}{\partial t} + \frac{1}{R_t} u_{\gamma,n} \right) \right], \\ \frac{\partial \tau_{s\gamma,n}}{\partial \gamma} &= -\frac{1}{(1 + \gamma/R_t)R_t} \tau_{s\gamma,n} + \frac{E}{1 - \nu^2} \lambda_n^2 u_{s,n} - \frac{E\gamma}{1 - \nu^2} \frac{1}{1 + \gamma/R_t} \lambda_n \times \\ &\times \left( \frac{\partial u_{t,n}}{\partial t} + \frac{1}{R_t} u_{\gamma,n} \right) - \frac{\nu}{1 - \nu} \lambda_n \sigma_{\gamma,n} - \frac{1}{1 + \gamma/R_t} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{E}{2(1 + \nu)} \left( \frac{1}{1 + \gamma/R_t} \frac{\partial u_{s,n}}{\partial t} + \lambda_n u_{t,n} \right) \right], \\ \frac{\partial \tau_{t\gamma,n}}{\partial \gamma} &= -\frac{2}{(1 + \gamma/R_t)R_t} \tau_{t\gamma,n} - \frac{1}{1 + \gamma/R_t} \frac{\partial}{\partial t} \left[ -\frac{E\nu}{1 - \nu^2} \lambda_n u_{s,n} + \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{1}{1 + \gamma/R_t} \times \right. \\ &\times \left. \left( \frac{\partial u_{t,n}}{\partial t} + \frac{1}{R_t} u_{\gamma,n} \right) + \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{\gamma,n} \right] + \frac{E}{2(1 + \nu)} \frac{\lambda_n}{1 + \gamma/R_t} \frac{\partial u_{s,n}}{\partial t} + \frac{E}{2(1 + \nu)} \lambda_n^2 u_{t,n}, \\ \frac{\partial u_{\gamma,n}}{\partial \gamma} &= \frac{\nu}{1 - \nu} \lambda_n u_{s,n} - \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{1}{1 + \gamma/R_t} \left( \frac{\partial u_{t,n}}{\partial t} + \frac{1}{R_t} u_{\gamma,n} \right) + \frac{1 - \nu - 2\nu^2}{E(1 - \nu)} \sigma_{\gamma,n}, \\ \frac{\partial u_{s,n}}{\partial \gamma} &= \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{s\gamma,n} - \lambda_n u_{\gamma,n}, \\ \frac{\partial u_{t,n}}{\partial \gamma} &= \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{t\gamma,n} - \frac{1}{1 + \gamma/R_t} \frac{\partial u_{\gamma,n}}{\partial t} + \frac{1}{(1 + \gamma/R_t)R_t} u_{t,n}\end{aligned}\quad (38)$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned}\sigma_{\gamma,n} &= q_{\gamma,n}^-, & \tau_{s\gamma,n} &= q_{s,n}^-, & \tau_{t\gamma,n} &= q_{t,n}^- & \text{при} & \gamma = \gamma_p, \\ \sigma_{\gamma,n} &= q_{\gamma,n}^+, & \tau_{s\gamma,n} &= q_{s,n}^+, & \tau_{t\gamma,n} &= q_{t,n}^+ & \text{при} & \gamma = \gamma_q.\end{aligned}\quad (39)$$

Для розв'язання отриманої задачі застосуємо метод, що базується на апроксимації розв'язку дискретними рядами Фур'є. Оскільки в коефіцієнти системи диференціальних рівнянь (38) входить радіус кривини  $R_t$ , який у випадку циліндрів з некруговим поперечним перерізом залежить від координати  $t$ , то для відокремлення змінних у напрямку напрямної замінимо в розв'язувальній системі рівнянь (38) доповняльними функціями члени, які містять добутки цих коефіцієнтів на розв'язувальні функції чи їхні похідні. Таким чином, одержимо систему рівнянь (індекс  $n$  у позначеннях розв'язувальних і доповняльних функцій опустимо):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} &= \lambda_n \tau_{s\gamma} + \left( \frac{\nu}{1-\nu} - 1 \right) \Phi_1^1 - \Phi_4^1 - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \lambda_n \Phi_1^4 + \frac{E}{1-\nu^2} (\Phi_4^3 + \Phi_1^5), \\
\frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \lambda_n \sigma_\gamma + \frac{E}{1-\nu^2} \lambda_n^2 u_s - \Phi_1^2 - \frac{E}{1-\nu} \lambda_n \Phi_4^2 - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \lambda_n \Phi_1^3 - \frac{E}{2(1+\nu)} \Phi_6, \\
\frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial \gamma} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \lambda_n^2 u_t - 2\Phi_2^1 + \frac{E}{2(1-\nu)} \lambda_n \Phi_3^3 - \frac{E}{1-\nu^2} (\Phi_7 + \Phi_5) - \frac{\nu}{1-\nu} \Phi_3^1, \\
\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} &= \frac{1-\nu-2\nu^2}{(1-\nu)E} \sigma_\gamma + \frac{\nu}{1-\nu} (\lambda_n u_s - \Phi_4^2 - \Phi_1^3), \\
\frac{\partial u_s}{\partial \gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{s\gamma} - \lambda_n u_\gamma, \quad \frac{\partial u_t}{\partial \gamma} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{t\gamma} - \Phi_3^2 + \Phi_2^2
\end{aligned} \tag{40}$$

з граничними умовами (39). Тут введено такі доповняльні функції:

$$\begin{aligned}
\Phi_1^j &= \frac{1}{(1+\gamma/R_t) R_t} \{ \sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, u_\gamma, u_s \}, \quad j = \overline{1, 4}, \\
\Phi_1^5 &= \left( \frac{1}{1+\gamma/R_t} \frac{1}{R_t} \right)^2 u_\gamma, \quad \Phi_2^j = \frac{1}{1+\gamma/R_t} \frac{1}{R_t} \{ \tau_{t\gamma}, u_t \}, \quad j = \overline{1, 2}, \\
\Phi_3^j &= \frac{1}{1+\gamma/R_t} \left\{ \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial t}, \frac{\partial u_\gamma}{\partial t}, \frac{\partial u_s}{\partial t} \right\}, \quad j = \overline{1, 3}, \\
\Phi_4^j &= \frac{1}{1+\gamma/R_t} \left\{ \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial t}, \frac{\partial u_t}{\partial t}, \frac{1}{R_t} \frac{\partial u_t}{\partial t} \right\}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad \Phi_5 = \frac{1}{1+\gamma/R_t} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_1^3, \\
\Phi_6 &= \frac{1}{1+\gamma/R_t} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_3^3, \quad \Phi_7 = \frac{1}{1+\gamma/R_t} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_4^2.
\end{aligned} \tag{41}$$

Тепер коефіцієнти системи рівнянь (40) не залежать від координати  $t$ , хоча самі доповняльні функції залежать. Подамо всі функції, що входять до системи рівнянь (40), і компоненти навантаження у вигляді розвинень у ряди Фур'є вздовж напрямної циліндра

$$\tilde{X}(t, \gamma) = \sum_{m=0}^M \tilde{X}_m(\gamma) \cos \lambda_m t, \quad \tilde{Y}(t, \gamma) = \sum_{m=1}^M \tilde{Y}_m(\gamma) \sin \lambda_m t, \tag{42}$$

де  $\tilde{X} = \{ \sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, u_\gamma, u_s, \Phi_1^j, \Phi_4^j, \Phi_6, q_\gamma, q_s \}$ ,

$$\tilde{Y} = \{ \tau_{t\gamma}, u_t, \Phi_2^j, \Phi_3^j, \Phi_5, \Phi_7, q_t \}, \quad \lambda_m = 2m\pi/T.$$

Після підстановки (42) у систему рівнянь (40), граничні умови (39) і відокремлення змінних отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних значень рядів (42):

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{\gamma,m}}{d\gamma} &= \lambda_n \tau_{s\gamma,m} + \left( \frac{\nu}{1-\nu} - 1 \right) \Phi_{1,m}^1 - \Phi_{4,m}^1 - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \lambda_n \Phi_{1,m}^4 + \\
&\quad + \frac{E}{1-\nu^2} (\Phi_{4,m}^3 + \Phi_{1,m}^5), \\
\frac{d\tau_{s\gamma,m}}{d\gamma} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \lambda_n \sigma_{\gamma,m} + \frac{E}{1-\nu^2} \lambda_n^2 u_{s,m} - \Phi_{1,m}^2 - \frac{E}{1-\nu} \lambda_n \Phi_{4,m}^2 - \\
&\quad - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \lambda_n \Phi_{1,m}^3 - \frac{E}{2(1+\nu)} \Phi_{6,m}, \\
\frac{d\tau_{t\gamma,m}}{d\gamma} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \lambda_n^2 u_{t,m} - 2\Phi_{2,m}^1 + \frac{E}{2(1-\nu)} \lambda_n \Phi_{3,m}^3 - \\
&\quad - \frac{E}{1-\nu^2} (\Phi_{7,m} + \Phi_{5,m}) - \frac{\nu}{1-\nu} \Phi_{3,m}^1, \\
\frac{du_{\gamma,m}}{d\gamma} &= \frac{1-\nu-2\nu^2}{(1-\nu)E} \sigma_{\gamma,m} + \frac{\nu}{1-\nu} (\lambda_n u_{s,m} - \Phi_{4,m}^2 - \Phi_{1,m}^3), \\
\frac{du_{s,m}}{d\gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{s\gamma,m} - \lambda_n u_{\gamma,m}, \\
\frac{du_{t,m}}{d\gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{t\gamma,m} - \Phi_{3,m}^2 + \Phi_{2,m}^2, \quad m = \overline{0, M}, \tag{43}
\end{aligned}$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned}
\sigma_{\gamma,m} &= q_{\gamma,m}^-, \quad \tau_{s\gamma,m} = q_{s,m}^-, \quad \tau_{t\gamma,m} = q_{t,m}^- \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_p, \\
\sigma_{\gamma,m} &= q_{\gamma,m}^+, \quad \tau_{s\gamma,m} = q_{s,m}^+, \quad \tau_{t\gamma,m} = q_{t,m}^+ \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_q. \tag{44}
\end{aligned}$$

Отриману крайову задачу (43), (44) розв'язуємо стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації одноразово для всіх гармонік. У процесі інтегрування на кожному кроці застосування чисельного методу будемо обчислювати амплітудні значення доповняльних функцій. При цьому для кожного фіксованого значення  $\gamma_k$  відрізка  $[\gamma_p, \gamma_q]$  обчислюємо в ряді точок напрямної  $t_i$ ,  $i = \overline{1, R}$ , величини

$$\begin{aligned}
h_1^i &= \frac{1}{(1 + \gamma/R_t(t_i))R_t(t_i)}, \quad h_2^i = \frac{1}{1 + \gamma/R_t(t_i)}, \\
\Phi_{1,i}^j &= h_1^i \sum_{m=0}^M \{ \sigma_{\gamma,m}, \tau_{s\gamma,m}, u_{\gamma,m}, u_{s,m} \} \cos \lambda_m t_i, \quad j = \overline{1, 4}, \\
\Phi_{1,i}^5 &= (h_1^i)^2 \sum_{m=0}^M u_{\gamma,m} \cos \lambda_m t_i, \\
\Phi_{2,i}^j &= h_1^i \sum_{m=0}^M \{ \tau_{t\gamma,m}, u_{t,m} \} \sin \lambda_m t_i, \quad j = 1, 2, \\
\Phi_{3,i}^j &= -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \{ \sigma_{\gamma,m}, u_{\gamma,m}, u_{s,m} \} \sin \lambda_m t_i, \quad j = \overline{1, 3}, \\
\Phi_{4,i}^j &= h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \{ \tau_{t\gamma,m}, u_{t,m} \} \cos \lambda_m t_i, \quad j = 1, 2, \\
\Phi_{4,i}^3 &= h_1^i h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m u_{t,m} \cos \lambda_m t_i. \tag{45}
\end{aligned}$$

Використовуючи стандартну процедуру обчислення коефіцієнтів Фур'є для функції, яку задано таблицею, знаходимо ці коефіцієнти для функцій (45). Значення  $\varphi_{1,m}^3, \varphi_{3,m}^3, \varphi_{4,m}^2, m = 0, M$ , використовуємо для обчислення табличних значень функцій

$$\begin{aligned}\varphi_{5,i} &= -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \varphi_{1,m}^3 \sin \lambda_m t_i, \\ \varphi_{6,i} &= h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \varphi_{3,m}^3 \cos \lambda_m t_i, \\ \varphi_{7,i} &= -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \varphi_{4,m}^2 \sin \lambda_m t_i.\end{aligned}\quad (46)$$

Обчислюємо коефіцієнти Фур'є для функцій (46). Знайдені коефіцієнти для функцій (45), (46) підставляємо в розв'язувальну систему диференціальних рівнянь (43) і виконуємо наступний крок інтегрування, переходячи від точки  $\gamma_k$  до точки  $\gamma_{k+1}$ . На кінцях інтервалу  $[\gamma_p, \gamma_q]$  задовольняємо граничні умови (44).

На основі викладеного методу проведемо дослідження впливу на розв'язок задачі кількості точок  $R$ , у яких обчислюються табличні значення доповняльних функцій (45), (46), і кількості членів  $M$  у рядах Фур'є (42). Для цього розглянемо порожнисті циліндри з еліптичним поперечним перерізом під дією внутрішнього тиску  $q = q_0 \sin(\pi s/\ell)$ ,  $q_0 = \text{const}$ . Напряму серединної поверхні задамо параметрично у вигляді

$$x = b \cos \theta, \quad z = a \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

де  $a, b$  – півосі еліпса,  $b > a$ . Будемо розглядати циліндри, у яких периметр поперечного перерізу серединної поверхні дорівнює довжині кола з радіусом  $r$ , тобто буде мати місце рівність

$$\pi(a+b)f = 2\pi r, \quad f = 1 + \frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Delta^4}{64} + \frac{\Delta^6}{256}, \quad \frac{a}{b} = \frac{1-\Delta}{1+\Delta}.$$

Враховуючи, що  $\Delta = \frac{b-a}{b+a}$ , маємо

$$a = \frac{r}{f}(1-\Delta), \quad b = \frac{r}{f}(1+\Delta).$$

Оскільки інформація про форму серединної поверхні задана за допомогою параметра  $\theta$ , який відрізняється від  $t$ , то при обчисленні значень доповняльних функцій (41) необхідно враховувати, що

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \theta} &= \frac{\partial V}{\partial t} \frac{dt}{d\theta}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{1}{\omega(\theta)}, \\ \frac{dt}{d\theta} &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = \omega(\theta).\end{aligned}\quad (47)$$

Задачу розв'язано за таких умов:  $\Delta = 0.2$ ;  $H = 10, 5$ ;  $r = 40$ ;  $\ell = 60$ ;  $R = 16, 32, 40$ ;  $M = 6, 9, 13$ . Результати розв'язання задачі подано в табл. 3 для переміщень  $u_\gamma$  і напружень  $\sigma_0$  у середньому перерізі по довжині циліндра  $s = 0.5\ell$ .

З наведених у табл. 3 даних бачимо, як впливає кількість членів дискретних рядів  $R$  і кількість членів  $M$ , що враховуються при розв'язанні задачі, на збіжність розв'язків вихідної задачі.

Таблиця 3

R	M	H = 10				H = 5			
		$\theta = 0$		$\theta = \pi/2$		$\theta = 0$		$\theta = \pi/2$	
		$\gamma/H$							
		-1/2	1/2	-1/2	1/2	-1/2	1/2	-1/2	1/2
$u_\gamma E/q_0$									
16	6	-6.47	-14.06	363.88	346.56	-198.80	-201.76	1208.5	1186.1
32		-6.56	-14.15	363.84	346.52	-200.26	-203.19	1207.3	1184.9
40		-6.56	-14.15	363.84	346.52	-200.26	-203.20	1207.3	1184.9
16	9	-6.64	-13.56	362.84	345.56	-204.46	-207.14	1199.8	1177.4
32		-6.53	-14.01	362.97	345.57	-206.57	-209.33	1197.8	1175.4
40		-6.53	-14.01	362.97	345.56	-206.57	-209.33	1197.8	1175.4
16	13	-6.63	-13.95	362.84	345.56	-204.09	-206.75	1199.8	1177.4
32		-6.63	-14.01	362.97	345.55	-206.60	-209.35	1197.8	1175.4
40		-6.53	-14.01	362.97	345.55	-206.60	-209.35	1197.8	1175.4
$\sigma_\theta/q_0$									
16	6	7.483	-0.433	0.396	6.659	12.134	-1.789	4.779	17.251
32		7.487	-0.439	0.397	6.656	12.169	-1.857	4.814	17.223
40		7.487	-0.439	0.399	6.656	12.169	-1.857	4.814	17.223
16	9	7.634	-0.299	0.339	6.518	13.063	-1.543	4.697	16.677
32		7.658	-0.284	0.353	6.540	13.067	-1.539	4.720	16.711
40		7.658	-0.284	0.353	6.540	13.067	-1.539	4.720	16.711
16	13	7.634	-0.299	0.339	6.518	13.067	-1.546	4.697	16.677
32		7.663	-0.279	0.351	6.536	13.095	-1.521	4.711	16.697
40		7.663	-0.279	0.351	6.536	13.095	-1.521	4.711	16.697

Для еліптичних ізотропних порожнистих циліндрів, що знаходяться під дією навантаження, прикладеного на зовнішній поверхні за умов простого опирання торців, проведемо дослідження впливу ступеня еліптичності  $\Delta$  і товщини  $H$  циліндра на розподіл полів переміщень  $u_\gamma$  і напружень  $\sigma_\theta$ .

Задачу розв'язано за таких умов:  $\Delta = 0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$ ;  $r = 40$ ;  $\ell = 60$ ;  $H = 5, 10, 15$ . Результати розв'язання задачі наведено на рис. 1–3 в середньому перерізі по довжині циліндра. На рис. 1 наведено графіки зміни переміщень  $u_\gamma$  для середньої поверхні циліндра, на рис. 2 – графіки зміни напружень  $\sigma_\theta$  для внутрішньої поверхні, а на рис. 3 – графіки зміни напружень  $\sigma_\theta$  для зовнішньої поверхні.

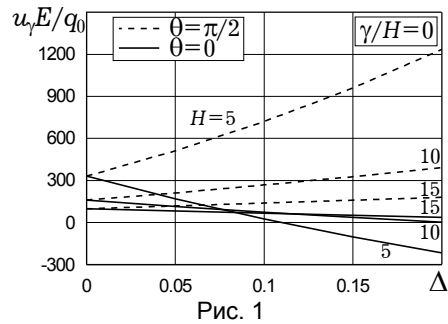


Рис. 1

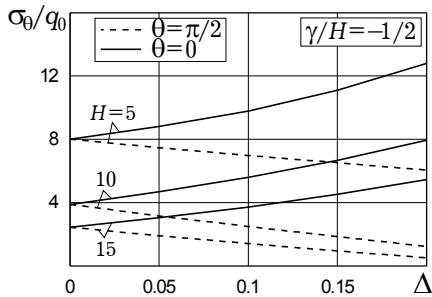


Рис. 2

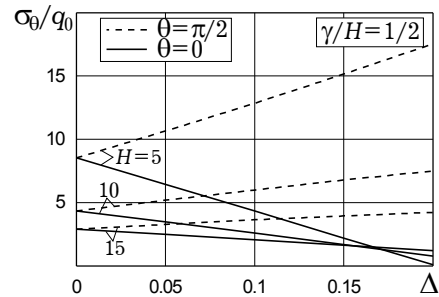


Рис. 3



З аналізу наведених на рис. 1 графіків випливає, що, на відміну від кругових циліндрів, для циліндрів з еліптичним поперечним перерізом у зоні більшої жорсткості ( $\theta = 0$ ) циліндр прогинається в напрямку, протилежному дії прикладеного навантаження, і прогин зі збільшенням ступеня еліптичності та товщини зростає. У зоні меншої жорсткості ( $\theta = \pi/2$ ) прогин циліндра в декілька разів більший і циліндр прогинається у напрямку дії навантаження. Напруження  $\sigma_\theta$  на внутрішній поверхні циліндра (рис. 2) збільшується за величиною з ростом ступеня еліптичності та товщини, при цьому в зоні меншої жорсткості ( $\theta = \pi/2$ ) маємо стиск, а в зоні більшої жорсткості ( $\theta = 0$ ) – розтяг. На зовнішній поверхні циліндра (рис. 3) навпаки, при  $\theta = \pi/2$  – розтяг, а при  $\theta = 0$  – стиск.

**5. Розв’язання задач про напружений стан гофрованих кругових та еліптичних циліндрів.** Далі розглянемо задачу про напружений стан кругових та еліптичних циліндрів з гофрами в поперечному перерізі під дією внутрішнього тиску [15–17]. На торцях циліндрів мають місце граничні умови (36).

Напряму поверхні відліку задаємо в полярній системі координат у вигляді

$$\rho(\psi) = \frac{a}{(1 - e^2 \cos^2 \psi)^{1/2}} + \alpha \cos m\psi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi,$$

$$e = \sqrt{1 - (a/b)^2} = 2\sqrt{\Delta}/(1 + \Delta), \quad \Delta = (b - a)/(b + a),$$

де  $\alpha$  – амплітуда,  $m$  – частота гофрування,  $e$  – ексцентриситет еліпса,  $b > a$ ,  $\psi$  – полярний кут у поперечному перерізі. Якщо  $a = b$ , маємо круговий гофрований циліндр. На рис. 4а показано поперечний переріз кругового гофрованого циліндра ( $m = 3$ ,  $\Delta = 0$ ), а на рис. 4б – еліптичного гофрованого циліндра ( $m = 3$ ,  $\Delta = 0.2$ ).

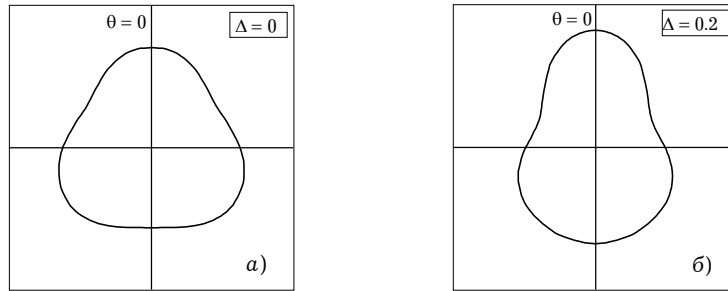


Рис. 4

Радіус кривини поверхні відліку в полярній системі координат  $\rho, \psi$  запишемо у вигляді

$$R_\psi = R(\psi) = \frac{[\rho^2 + (\rho')^2]^{3/2}}{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''},$$

де  $\rho$  – полярний радіус,

$$\rho' = - \left[ \frac{ae^2 \sin 2\psi}{2(1 - e^2 \cos^2 \psi)^{3/2}} + \alpha m \sin m\psi \right],$$

$$\rho'' = - \left\{ \frac{ae^2}{2} \left[ \frac{\cos 2\psi}{(1 - e^2 \cos^2 \psi)^{3/2}} - \frac{3e^2 \sin^2 2\psi}{2(1 - e^2 \cos^2 \psi)^{5/2}} \right] + \alpha m^2 \cos m\psi \right\}.$$

При переході від координати  $t$  до координати  $\psi$  треба враховувати множник переходу (47), який у розглядуваному випадку має вигляд  $\omega(\psi) = [\rho^2 + (\rho')^2]^{1/2}$ .

Задачу розв'язано за таких умов:  $r = 40$ ;  $l = 60$ ;  $h = 4$ ;  $\alpha = 5$ ;  $m = 3$ ;  $\Delta = 0, 0.1, 0.2$ ;  $R = 120$ ;  $M = 17$ . На рис. 5, 6 показано результати розв'язування для переміщень і напружень на внутрішній поверхні в середньому перерізі циліндра при  $s = 0.5l$ .

На графіках, наведених на рис. 5, бачимо, що для кругового гофрованого циліндра ( $\Delta = 0$ ) маємо симетричне розподілення прогину вздовж напрямної з періодом  $2\pi/3$ . При цьому в зоні більшої жорсткості ( $\psi = 0$ ) циліндр прогинається в напрямку, протилежному прикладеному навантаженню, а в зоні меншої жорсткості ( $\psi = \pi/3$ ) – навпаки. Для еліптичних гофрованих циліндрів у зоні більшої жорсткості ( $\psi = 0$ ) прогин майже не відрізняється від прогину кругового гофрованого циліндра, а в зоні меншої жорсткості ( $\psi = \pi/3$ ) – збільшується з ростом  $\Delta$ , зокрема, при  $\Delta = 0,2$  – майже на 50%. При  $\psi = \pi$  прогин значно спадає зі збільшенням  $\Delta$ .

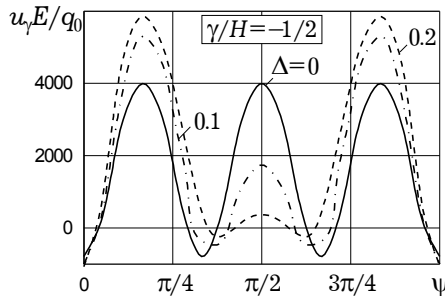


Рис.5

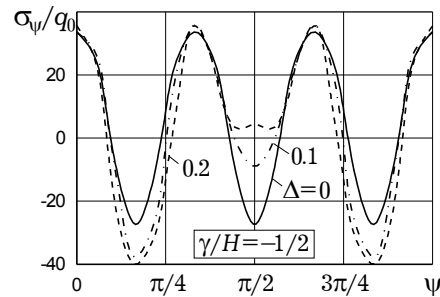


Рис.6

На рис. 6 наведено графіки для  $\sigma_\psi$ , де спостерігається така картина. У зоні більшої жорсткості ( $\psi = 0$ ) маємо максимальні значення напружень, а в зоні меншої жорсткості ( $\psi = \pi/3$ ) – мінімальні. При  $\psi = \pi$  і  $\Delta \neq 0$  величина напруження наближається до нуля.

**6. Розв'язання задач про напружений стан еліптичних шаруватих циліндрів.** Далі розглянемо задачу про напружений стан еліптичних шаруватих циліндрів під дією внутрішнього тиску. Циліндри складено з шарів, які жорстко зв'язані між собою, тому мають місце умови спряження шарів

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma^i &= \sigma_\gamma^{i+1}, & \tau_{s\gamma}^i &= \tau_{s\gamma}^{i+1}, & \tau_{t\gamma}^i &= \tau_{t\gamma}^{i+1}, \\ u_\gamma^i &= u_\gamma^{i+1}, & u_s^i &= u_s^{i+1}, & u_t^i &= u_t^{i+1}. \end{aligned}$$

Шари можуть бути як ізотропними неоднорідними [9], так і ортотропними [8, 18]. Закон Гука для ортотропних шарів запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} e_s &= a_{11}\sigma_s + a_{12}\sigma_t + a_{13}\sigma_\gamma, & e_{t\gamma} &= a_{44}\tau_{t\gamma}, \\ e_t &= a_{12}\sigma_s + a_{22}\sigma_t + a_{23}\sigma_\gamma, & e_{s\gamma} &= a_{55}\tau_{s\gamma}, \\ e_\gamma &= a_{13}\sigma_s + a_{23}\sigma_t + a_{33}\sigma_\gamma, & e_{st} &= a_{66}\tau_{st}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E_s}, & a_{12} &= -\frac{\nu_{st}}{E_t} = -\frac{\nu_{ts}}{E_s}, & a_{13} &= -\frac{\nu_{s\gamma}}{E_\gamma} = -\frac{\nu_{\gamma s}}{E_s}, & a_{22} &= \frac{1}{E_t}, \\ a_{23} &= -\frac{\nu_{\gamma t}}{E_t} = -\frac{\nu_{t\gamma}}{E_\gamma}, & a_{33} &= \frac{1}{E_\gamma}, & a_{44} &= \frac{1}{G_{t\gamma}}, & a_{55} &= \frac{1}{G_{s\gamma}}, & a_{66} &= \frac{1}{G_{ts}}, \end{aligned}$$

$E_s, E_t, E_\gamma$  – модулі пружності в напрямку координатних осей;  $G_{t\gamma}, G_{s\gamma}, G_{st}$  – модулі зсуву;  $\nu_{t\gamma}, \nu_{s\gamma}, \nu_{st}, \nu_{\gamma t}, \nu_{\gamma s}, \nu_{ts}$  – відповідні коефіцієнти Пуассона.

Для ізотропних шарів модулі пружності, модулі зсуву та коефіцієнти Пуассона рівні між собою. Для неоднорідних за товщиною циліндрів модулі пружності відповідних шарів пов'язані між собою рівністю  $E_i = dE_0$ .

Методика розв'язування такого класу задач аналогічна методиці, яку було розглянуто вище. Після відокремлення змінних у напрямку твірної циліндра, введення доповняльних функцій і відокремлення змінних у напрямку прямої отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь у вигляді

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} &= (c_2 - 1)\varphi_{1,k}^1 + \lambda_n \tau_{st,k} - \varphi_{4,k}^1 + b_{22}\varphi_{1,k}^5 + b_{12}\lambda_n \varphi_{1,k}^4 + b_{22}\varphi_{4,k}^3, \\ \frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} &= -c_1\lambda_n \sigma_{\gamma,k} - \varphi_{1,k}^2 - b_{12}\lambda_n \varphi_{1,k}^3 + b_{11}\lambda_n^2 u_{s,k} - b_{66}\varphi_{6,k} - (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_{4,k}^2, \\ \frac{d\tau_{t\gamma,k}}{d\gamma} &= -c_2\varphi_{3,k}^1 - 2\varphi_{2,k}^1 - b_{22}\varphi_{5,k} - (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_{3,k}^3 - b_{22}\varphi_{7,k} + b_{66}\lambda_n^2 u_{t,k}, \\ \frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} &= c_4\sigma_{\gamma,k} - c_2\varphi_{4,k}^2 + c_1\lambda_n u_{s,k} - c_2\varphi_{1,k}^3, \\ \frac{du_{s,k}}{d\gamma} &= a_{55}\tau_{s\gamma,k} - \lambda_n u_{\gamma,k}, \quad \frac{du_{t,k}}{d\gamma} = a_{44}\tau_{t\gamma,k} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2, \quad k = \overline{0, K},\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}b_{11} &= a_{22}a_{66}/\Omega, & b_{12} &= -a_{12}a_{66}/\Omega, & b_{22} &= a_{11}a_{66}/\Omega, \\ b_{66} &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)/\Omega, & \Omega &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)a_{66}, \\ c_1 &= -(b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23}), & c_2 &= -(b_{12}a_{13} + b_{22}a_{23}), & c_4 &= a_{33} + c_1a_{13} + c_2a_{23}.\end{aligned}$$

Розглянемо тришаруваті циліндри з еліптичним поперечним перерізом симетричної будови відносно серединної поверхні. Внутрішній і зовнішній шари – ізотропні, кожний має товщину  $h$ , модуль пружності  $E = E_0$  та коефіцієнт Пуассона  $\nu$ . Середній шар, товщина якого  $H$ , може бути ізотропним з модулем пружності  $E = dE_0$  або ортотропним з такими параметрами [8]:  $E_s = 3.68 E_0$ ,  $E_t = 2.68 E_0$ ,  $E_\gamma = 1.1 E_0$ ;  $\nu_{st} = 0.105$ ,  $\nu_{s\gamma} = 0.405$ ,  $\nu_{t\gamma} = 0.431$ ;  $G_{st} = 0.5 E_0$ ,  $G_{s\gamma} = 0.45 E_0$ ,  $G_{t\gamma} = 0.41 E_0$ .

Задачу розв'язано за таких умов:  $h = 2$ ;  $H = 4$ ;  $r = 40$ ;  $\ell = 60$ ;  $d = 1$ ,  $0.1$ ;  $\Delta = 0, 0.1, 0.2$ ;  $R = 40$ ;  $M = 13$ . Результати розв'язування наведено в табл. 4 і на рис. 7–9 у середньому перерізі циліндра для  $s = 0.5\ell$ .

У табл. 4 наведено значення переміщень  $u_\gamma$  у зонах більшої і меншої жорсткості циліндра для деяких значень вздовж товщини. Варіант I відповідає випадку неоднорідного середнього шару, варіант II – коли середній шар ортотропний.

На рис. 7 наведено графіки розподілу напружень  $\sigma_\theta$  уздовж товщини циліндра в зоні більшої жорсткості циліндра, а на рис. 8 – у зоні меншої жорсткості циліндра для випадку неоднорідного середнього шару. На рис. 9 наведено графіки розподілу напружень  $\sigma_\theta$  для випадку ортотропного середнього шару.

З наведених у табл. 4 даних видно вплив неоднорідності та ортотропії на значення переміщень  $u_\gamma$ . Так, для кругових циліндрів ( $\Delta = 0$ ) навіть уже при  $d = 0.1$ , тобто за рахунок слабкого середнього шару прогин ци-

ліндра значно збільшується, а у випадку ортотропного середнього шару – зменшується майже в 2 рази порівняно з однорідним циліндром.

Таблиця 4

		$u_\gamma E/q_0$						
V	d	$\gamma/H$	$\Delta = 0$		$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0.2$	
			$\theta = 0$	$\theta = \pi/2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi/2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi/2$
I	1	-1/2	180.60	180.60	45.89	349.02	-59.24	554.65
		-1/4	177.37	177.37	41.68	346.92	-64.39	553.96
		0	174.03	174.03	38.81	343.34	-66.48	550.39
		1/4	170.56	170.56	36.91	338.45	-66.53	544.24
		1/2	166.89	166.89	35.80	332.26	-65.01	535.51
	0.1	-1/2	328.03	328.03	89.28	615.23	-105.96	954.77
		-1/4	322.85	322.85	83.53	611.32	-111.90	952.02
		0	311.06	311.06	75.30	597.41	-114.17	936.98
		1/4	300.02	300.02	67.82	583.80	-116.55	921.50
		1/2	294.01	294.01	65.19	574.47	-115.74	908.94
II	-	-1/2	106.26	106.26	-0.37	238.83	-84.77	401.48
		-1/4	103.29	103.29	-4.13	236.82	-89.29	400.61
		0	98.53	98.53	-8.45	232.01	-92.81	396.23
		1/4	92.81	92.81	-10.96	223.25	-91.84	384.53
		1/2	90.44	90.44	-11.46	218.98	-90.39	378.32

Для еліптичних циліндрів ( $\Delta \neq 0$ ) при  $\theta = 0$  прогин значно зменшується і навіть змінює знак, а при  $\theta = \pi/2$  – збільшується у 2-3 рази. Тобто уже невелике відхилення форми циліндра від кругової значно впливає на деформування циліндра. Також значний вплив на прогин має неоднорідність циліндра за товщиною і ще більше – наявність ортотропного шару.

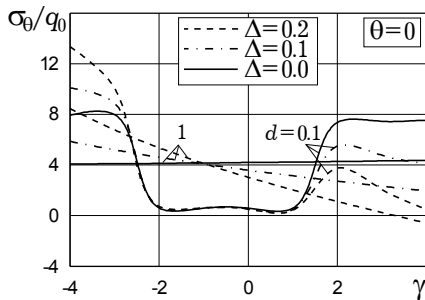


Рис.7

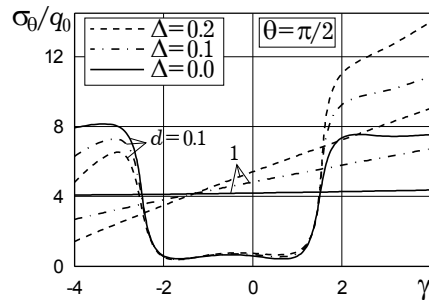


Рис.8

На рис. 7, 8 наведено графіки розподілу напружень  $\sigma_\theta$  по товщині в неоднорідних циліндрах відповідно для  $\theta = 0$  і  $\theta = \pi/2$ . На графіках бачимо, як впливає неоднорідність у зоні більшої ( $\theta = 0$ ) і меншої ( $\theta = \pi/2$ ) жорсткості на розподіл напружень  $\sigma_\theta$  з урахуванням ступеня еліптичності.

На рис. 9 наведено графіки розподілу напружень  $\sigma_\theta$  при  $\theta = 0$  і  $\theta = \pi/2$

для шаруватого циліндра з ортотропним середнім шаром для різних значень ступеня еліптичності.

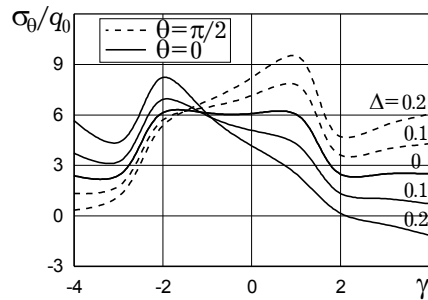


Рис. 9

Отже, на основі цього підходу можна розв'язувати задачі, які дозволяють варіювати геометричними та механічними параметрами при визначенні полів переміщень і напружень у некругових, неоднорідних, ортотропних циліндрах з метою отримання раціонального напруженого стану.

1. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – Москва: Мир, 1968. – 184 с.
2. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1961. – **16**, № 3. – С. 171–174.
3. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1973. – 228 с.
4. Григоренко Я. М., Тимонин А. М. Об одном подходе к численному решению двумерных задач теории пластин и оболочек с переменными параметрами // Прикл. механика. – 1987. – **23**, № 6. – С. 54–61.
5. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Равновесие упругих тел канонической формы. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с. – (Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 6 т. – Т. 3.)
6. Гузь А. Н., Немчиш Ю. Н. Статика упругих тел неканонической формы. – Киев: Наук. думка, 1984. – 300 с. – (Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 6 т. – Т. 2.)
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
8. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 415 с.
9. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 368 с.
10. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 501 с.
11. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Москва: Наука, 1949. – Т. 3. – 783 с.
12. Хемминг Р. В. Численные методы. – New York: MG Graw-Hill, 1962. – 400 с.
13. Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S. Discrete Fourier-series method in problems of bending of variable-thickness rectangular plates // J. Eng. Math. – 2003. – **46**, No. 3-4. – P. 269–280.
14. Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S. One approach to the solution of stress problems for noncircular hollow cylinders // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, No. 5. – P. 562–573.  
Те саме: Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Об одном подходе к решению задач о напряженном состоянии некруговых полых цилиндров // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 5. – С. 61–72.
15. Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S. Stress analysis of corrugated hollow cylinders // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, No. 12. – P. 1474–1482.  
Те саме: Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Расчет напряженного состояния полых цилиндров с гофрами в поперечном сечении // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 12. – С. 72–81.
16. Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S. Solving the stress problem for hollow cylinders with corrugated elliptical cross section // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No. 2. – P. 169–175.  
Те саме: Григоренко Я. М., Рожок Л. С. К решению задачи о напряженном состоянии полых цилиндров с гофрированным эллиптическим поперечным сечением // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 2. – С. 67–73.
17. Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S. On influence of frequency and amplitude of corrugating the hollow elliptical cylinders on their stress state // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No. 9. – P. 1123–1129.  
Те саме: Григоренко Я. М., Рожок Л. С. О влиянии частоты и амплитуды гофрировки полых эллиптических цилиндров на их напряженное состояние // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 9. – С. 87–93.
18. Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S. Stress analysis of orthotropic hollow noncircular cylinders // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No. 6. – P. 679–685.  
Те саме: Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Определение напряженного состояния ортотропных полых цилиндров с некруговым поперечным сечением // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 6. – С. 99–106.
19. Soldatos K. P. Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section. A survey // Appl. Mech. Rev. – 1999. – **52**, No. 8. – P. 237–274.

## ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ СТАТИКИ УПРУГИХ ТЕЛ НЕКАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Для решения двумерных краевых задач о напряженном состоянии пластин, оболочек и пространственных тел предложен нетрадиционный подход, основанный на сведении двумерных задач к одномерным с применением дискретных рядов Фурье. Двумерная краевая задача содержит в качестве множителей при разрешающих функциях геометрические и механические параметры, которые не позволяют разделить переменные. Введение дополнительных функций, которые включают в себя разрешающие функции и их производные вместе с указанными множителями, позволяет путем разложения всех функций в ряды Фурье в одном координатном направлении свести задачу к одномерной. При интегрировании одномерной краевой задачи амплитудные значения дополнительных функций определяются с помощью рядов Фурье для функций, которые заданы на дискретном множестве точек. Одномерную краевую задачу решаем устойчивым численным методом дискретной ортогонализации. Приведены результаты решения задач в виде графиков и таблиц.

## APPLICATION OF DISCRETE FOURIER SERIES TO SOLVING BOUNDARY-VALUE STATIC PROBLEMS FOR ELASTIC BODIES OF NON-CANONICAL FORM

The paper presents a nontraditional approach to solving two-dimensional boundary-value problems on the stress state of plates, shells, and spatial bodies. The approach is based on the reduction of two-dimensional problem to one-dimensional one using the discrete Fourier series. The two-dimensional problem contains the geometric and mechanical parameters as the multipliers on solving functions what makes it impossible to separate the variables. Introduction of additional functions, which include resolving functions, and their derivatives together with indicated multipliers, allows us to reduce the problem to one-dimensional one through expansion of all the functions into the Fourier series in one coordinate direction. At integrating the one-dimensional boundary-value problem, the amplitude values of additional functions are determined through the Fourier series of functions which are specified at the discrete set of points. The one-dimensional boundary-value problem is solved by the stable numerical method of discrete orthogonalization. The results obtained are presented in the form of plots and tables.

Ин-т механіки ім. С. П. Тимошенка  
НАН України, Київ

Одержано  
07.02.05