

### ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТАБІЛІЗОВАНИМИ СХЕМАМИ МСЕ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ ТІЛА ҐРУНТОВОЇ ГРЕБЛІ З УРАХУВАННЯМ ТЕПЛОМАСОПЕРЕНОСУ

*Сформульовано математичну модель двовимірної задачі фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі з урахуванням масопереносу солей в неізотермічному режимі та отримано її числовий розв'язок з використанням стабілізаційних схем методу скінченних елементів. На основі проведених числових експериментів показано вплив масопереносу солей та неізотермічних умов на процес фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі.*

**Вступ.** При будівництві цивільних і промислових об'єктів ґрунтові основи часто піддають значним навантаженням. Прикладені навантаження впливають на напружено-деформований стан ґрунтового пористого середовища. Якщо ґрунт насичений деякою рідиною (у найпростішому випадку – водою), то відповідні напруження спричиняють появу надлишкових тисків у поровій рідині ґрунту. Надлишкові тиски негативно впливають як на самі ґрунтові основи, так і на споруди, що зведені на них. Зокрема, збільшується імовірність зсувів, нерівномірних просідань ґрунту, втрат стійкості ґрунтових основ і зведених будівель, аж до повного їх руйнування. Сам процес розсіювання надлишкових напорів у ґрунті призводить до зближення частинок ґрунту і внаслідок цього – до ущільнення ґрунтової основи під впливом прикладеного навантаження. Такий процес відомий у науковій літературі як консолідація насиченого ґрунту [8, 9, 14]. Завчасне прогнозування процесів консолідації ґрунтів дозволяє передбачати критичні ситуації і вчасно їм запобігати.

Для ґрунтів з досить великим коефіцієнтом фільтрації, наприклад, для пісків, питання про прогнозування процесу консолідації не ставиться, оскільки надлишкові напори розсіюються швидко. Але наявність у ґрунті навіть кількох відсотків глинистої фракції значно зменшує коефіцієнт фільтрації. Тому особливе значення задача консолідації має для глинистих ґрунтів, процес консолідації яких може затягнутись на десятки років.

На сьогодні техногенний вплив на навколишнє середовище значно зростає. Зокрема, спостерігається забруднення ґрунтів і підземних вод відходами виробництва. Та і в самих природних умовах зустрічаються поклади солей, які знаходяться нижче від водоносних горизонтів. Відомо, що глинисті ґрунти, для яких особливо гостро стоїть проблема консолідації, мають властивості напівнепроникних мембран [16]. Тому в нерівномірно засолених глинистих ґрунтах можуть спостерігатись аномальні тиски, спричинені осмотичними явищами. У роботі [21] наведено результати спостереження таких явищ у природних геологічних формаціях. Ще більше досліджень хімічного осмосу проведено в лабораторних умовах [6, 11, 19, 20].

У роботах [2, 4, 5] досліджено вплив масопереносу солей на консолідацію глинистих ґрунтів. Зокрема, побудовано математичну модель консолідації ґрунту з урахуванням явищ хімічного осмосу, повзучості ґрунту та залежності коефіцієнтів фільтрації і дифузії від концентрації солей. Однак дослідження процесу консолідації проводили за ізотермічних умов. У роботі [3] вивчали вплив неізотермічного режиму на консолідацію масиву глинистого ґрунту. Запропоновано враховувати вплив на швидкість фільтрації явищ термоосмосу [15, 17], а на процес масопереносу – явищ термодифузії [18]. Показано, що при сезонному коливанні температури відбувається коливання і надлишкових напорів у масиві ґрунту, який консолідується.

Надлишкові напори можуть виникати і від власної ваги ґрунту. Особливо це стосується будівництва ґрунтових гребель. Надлишкові напори в тілі греблі є однією з основних причин виникнення критичних ситуацій при

експлуатації гідротехнічної споруди. Руйнування греблі може призвести до аварій з відповідними матеріальними збитками та наслідками для екологічної ситуації у регіоні. Так, у серпні 1983 р. на греблі хвостосховища Стебницького (Львів. область) Державного гірничо-хімічного підприємства «Полімінерал», яке призначене для зберігання відходів виробництва калійних добрив, а також шахтних вод, трапилась відома аварія, коли внаслідок зсуву низового укосу, який зумовив осідання гребеня греблі, виникло переливання і розмивання частини споруди [7]. Особливістю задачі консолідації тіла ґрунтової греблі є наявність вільної поверхні. У роботі [4] розглянуто задачу консолідації тіла ґрунтової греблі з урахуванням впливу переносу солей. Однак впливу температури на розподіл напорів і концентрації порового соляного розчину в тілі греблі там не було враховано. Актуальність та особливість проблеми фільтраційної консолідації ґрунтових гребель з урахуванням впливу переносу солей в неізотермічному режимі вимагають подальшого їх дослідження.

Математичні моделі розглядуваних процесів фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням тепломасопереносу описуються крайовими задачами для систем нелінійних параболічних рівнянь [2–5]. З огляду на нелінійність відшукування розв'язків таких задач вимагає застосування числових методів. Зокрема, в роботах [3–5] використано як метод скінченних різниць, так і метод скінченних елементів. Наявність конвективних членів у рівняннях тепломасопереносу, які є складовими частинами математичних моделей, вимагає при застосуванні методу скінченних елементів (МСЕ) використовувати стабілізаційні схеми [1, 12, 22]. У роботі [3] стабілізаційні схеми МСЕ використано безпосередньо до знаходження числового розв'язку задачі фільтраційної консолідації з урахуванням впливу переносу солей в неізотермічному режимі в області з фіксованими межами. Тому становить інтерес застосування стабілізаційних схем МСЕ до розв'язування аналогічних крайових задач в областях із вільними рухомими межами.

**Математичну модель двовимірної задачі фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі** (див. рис. 1) з урахуванням впливу переносу солей за неізотермічних умов запишемо (на підставі робіт [2–4]) у вигляді такої крайової задачі:

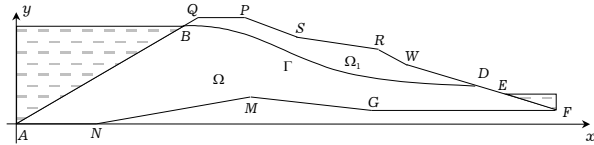


Рис. 1

$$-\frac{(1+\bar{e})(1+\xi)}{2\gamma a} [\nabla \cdot (-\mathbf{K}(c, T) \nabla h + \mathbf{v}(c, T) \nabla c + \mathbf{K}_T(c, T) \nabla T)] + \frac{\partial h^*}{\partial t} + \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T) \nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T(c, T) \nabla T) - (\mathbf{u}, \nabla c) - \gamma_1 (c - C_m) = n \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho c_p (\mathbf{u}, \nabla T) = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = e\mathbf{v} - \mathbf{K}(c, T) \nabla h + \mathbf{v}(c, T) \nabla c + \mathbf{K}_T(c, T) \nabla T, \quad (4)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n}) \Big|_{ANMGF} = 0, \quad h \Big|_{AB} = H_1(x, y, t), \quad (x, y) \in AB,$$

$$h \Big|_{EF} = H_2(x, y, t), \quad (x, y) \in EF, \quad h \Big|_{DE} = y, \quad (x, y) \in DE, \quad (5)$$

$$(\mathbf{D}(c, T) \nabla c, \mathbf{n}) \Big|_{ANMGF} = 0, \quad (\mathbf{D}(c, T) \nabla c, \mathbf{n}) \Big|_{DE} = 0, \quad c \Big|_{AB} = C_m,$$

$$c \Big|_{EF} = C_1(x, y, t), \quad (x, y) \in EF, \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\lambda} \nabla T, \mathbf{n}) \Big|_{ANMGF} &= 0, \quad T \Big|_{AB} = T_1(x, y, t), \quad (x, y) \in AB, \\
T \Big|_{EF} &= T_2(x, y, t), \quad (x, y) \in EF, \\
T \Big|_{\Gamma} &= T \Big|_{DE} = T_3(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma \cup DE, \quad (7) \\
h(x, y, 0) &= h_0(x, y), \quad c(x, y, 0) = c_0(x, y), \quad T(x, y, 0) = T_0(x, y), \quad (8)
\end{aligned}$$

де  $t > 0$ ,  $(x, y) \in \Omega$ ;  $C_1(x, y, t)$ ,  $T_1(x, y, t)$ ,  $T_2(x, y, t)$ ,  $T_3(x, y, t)$ ,  $H_1(x, y, t)$ ,  $H_2(x, y, t)$ ,  $h_0(x, y)$ ,  $c_0(x, y)$ ,  $T_0(x, y)$  – задані функції. Тут використано такі позначення:  $h(x, y, t) = \frac{p}{\gamma} + y$  – п'езометричний напір;  $p$  – тиск у поровому розчині;  $\mathbf{K}(c, T) = \{k_{ij}(c, T)\}$ ,  $\mathbf{v}(c, T) = \{v_{ij}(c, T)\}$ ,  $\mathbf{D}(c, T) = \{D_{ij}(c, T)\}$ ,  $\mathbf{D}_T(c, T) = \{(D_T)_{ij}\}$ ,  $\mathbf{K}_T(c, T) = \{(k_T)_{ij}\}$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_{ij}\}$  – тензори відповідно коефіцієнтів фільтрації, хімічного осмосу, конвективної дифузії, термодифузії, термоосмосу та ефективної теплопровідності вологого ґрунту,  $i, j = 1, 2$ ;  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  – вектор швидкості фільтрації сольового розчину;  $\mathbf{n}$  – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі області фільтраційної консолідації;  $\rho$ ,  $c_p$  – густина та питома теплоємність порового розчину;  $c_T$  – об'ємна теплоємність ґрунту;  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  – вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту;  $t$  – час;  $\bar{e}$  – середнє значення коефіцієнта пористості;  $\gamma$  – питома вага сольового розчину;  $n$  – пористість ґрунту;  $\xi$ ,  $a$  – коефіцієнти бічного тиску та стисливості ґрунту;  $\gamma_1$  – константа швидкості масообміну;  $C_m$  – концентрація граничного насичення;  $\Theta^*$ ,  $h^*$  – сума головних напружень у скелеті ґрунту та надлишковий напір у стані повної стабілізації.

Нижня межа  $ANMGF$  тіла греблі вважається непроникною і теплоізолюваною.

На вільній поверхні  $\Gamma$  (кривій депресії) функція  $h(x, y, t)$  задовольняє граничні умови [13]

$$h(x, y, t) \Big|_{\Gamma} = y, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{n}) \Big|_{\Gamma} = n \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (9)$$

Співвідношення  $\varphi(x, y, t) = (y - h(x, y, t)) \Big|_{\Gamma} = 0$  описує вільну поверхню  $\Gamma$ .

Для концентрації  $c(x, y, t)$  сольового розчину на депресійній кривій в ізотермічному режимі виконується така гранична умова [4]:

$$(\mathbf{D}(c) \nabla c, \mathbf{n}) \Big|_{\Gamma} = 0,$$

а в неізотермічному режимі масмо

$$(\mathbf{D}(c, T) \nabla c + \mathbf{D}_T(c, T) \nabla T, \mathbf{n}) \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (10)$$

**Числове розв'язування крайової задачі (1)–(10) методом скінченних елементів.** Нехай  $H_0$  – простір вектор-функцій  $\mathbf{s}(x, y) = (s_1(x, y), s_2(x, y), s_3(x, y))$ , кожна з компонент  $s_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , яких в області  $\Omega$  належить до простору Соболева  $W_2^1(\Omega)$ , причому  $s_1(x, y)$ ,  $s_2(x, y)$  та  $s_3(x, y)$  набувають нульових значень відповідно на тих частинах межі області  $\Omega$ , де для функцій  $h(x, y, t)$ ,  $c(x, y, t)$ ,  $T(x, y, t)$  задано граничні умови першого роду.

Нехай  $H$  – простір вектор-функцій  $\mathbf{f}(x, y, t) = (f_1(x, y, t), f_2(x, y, t), f_3(x, y, t))$ , кожна з компонент  $f_i(x, y, t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , яких інтегровна з квадратом разом зі своїми першими частинними похідними  $\frac{\partial f_i}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial f_i}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f_i}{\partial y}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , в області  $\Omega \quad \forall t \in (0, t_0]$ , причому  $f_1(x, y, t)$ ,  $f_2(x, y, t)$  та  $f_3(x, y, t)$  задовольняють відповідно ті граничні умови першого роду, що й функції  $h(x, y, t)$ ,  $c(x, y, t)$ ,  $T(x, y, t)$ .

Оскільки значення сіткових чисел Пекле рівнянь (2), (3)

$$\text{Pe}_c = \frac{1}{2} h_e \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{D}\|}, \quad \text{Pe}_T = \frac{1}{2} h_e \frac{\|\rho c_p \mathbf{u}\|}{\|\boldsymbol{\lambda}\|}$$

можуть бути більшими від одиниці, то числовий розв’язок задачі (1)–(8), побудований за схемою Гальоркіна, може сильно осцилювати в усій області визначення. Тут  $h_e$  – максимальна довжина сторони в усіх скінченних елементах. Для усунення цих недоліків у задачах конвекції-дифузії застосовують стабілізаційні та адаптивні схеми методу скінченних елементів [1, 12, 22]. Тому для стабілізації числових розв’язків рівнянь (2), (3) використаємо протипотокову схему Петрова – Гальоркіна [22], яка підміняє варіаційну задачу збуреною.

Використовуючи стандартну процедуру: помноживши рівності (1), (2), (3) і кожену з початкових умов (8) відповідно на довільні функції  $s_1(x, y)$ ,  $s_2(x, y)$ ,  $s_3(x, y)$  такі, що  $(s_1(x, y), s_2(x, y), s_3(x, y)) \in H_0$ , зінтегрувавши їх по області  $\Omega$ , застосовуючи першу формулу Гріна та використовуючи для рівнянь (2), (3) протипотокову схему Петрова – Гальоркіна, отримаємо

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial t} s_1(x, y) dx dy + \frac{n(1 + \bar{e})(1 + \xi)}{2a\gamma} \int_{\Gamma} \frac{\partial h}{\partial t} s_1 d\Gamma - \\ & - \frac{(1 + \bar{e})(1 + \xi)}{2a\gamma} \iint_{\Omega} \{(-\mathbf{K}(c, T)\nabla h, \nabla s_1) + \\ & + (\mathbf{v}(c, T)\nabla c, \nabla s_1) - (\mathbf{K}_T(c, T)\nabla T, \nabla s_1)\} dx dy = \\ & = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial h^*}{\partial t} + \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial \theta^*}{\partial t} \right) s_1(x, y) dx dy \quad \forall t \in (0, t_0], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left( n \frac{\partial c}{\partial t} s_2(x, y) + (\mathbf{D}\nabla c, \nabla s_2) + (\mathbf{D}_T\nabla T, \nabla s_2) \right) dx dy + \\ & + \iint_{\Omega} ((\mathbf{u}, \nabla c) + \gamma_1(c - C_m)) s_2 dx dy + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \iint_{\Omega_e} \left( n \frac{\partial c}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla c) - \right. \\ & \left. - \nabla \cdot (\mathbf{D}_T\nabla T) + (\mathbf{u}, \nabla c) + \gamma_1(c - C_m) \right) (\mathbf{u}, \nabla s_2) dx dy = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left( c_T \frac{\partial T}{\partial t} s_3(x, y) + (\boldsymbol{\lambda}\nabla T, \nabla s_3) + \rho c_p (\mathbf{u}, \nabla T) s_3(x, y) \right) dx dy + \\ & + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \iint_{\Omega_e} \left( c_T \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\lambda}\nabla T) + \right. \\ & \left. + \rho c_p (\mathbf{u}, \nabla T) \right) \rho c_p (\mathbf{u}, \nabla s_3) dx dy = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} h(x, y, 0) s_1 dx dy &= \iint_{\Omega} h_0(x, y) s_1 dx dy, \\
\iint_{\Omega} c(x, y, 0) s_2 dx dy &= \iint_{\Omega} c_0(x, y) s_2 dx dy, \\
\iint_{\Omega} T(x, y, 0) s_3 dx dy &= \iint_{\Omega} T_0(x, y) s_3 dx dy \\
\forall (s_1(x, y), s_2(x, y), s_3(x, y)) &\in H_0, \\
\forall (h(x, y, t), c(x, y, t), T(x, y, t)) &\in H.
\end{aligned} \tag{14}$$

Наближений розв'язок задачі (1)–(10) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned}
(\widehat{h}(x, y, t), \widehat{c}(x, y, t), \widehat{T}(x, y, t)) &= \left( \sum_{i=1}^{n_1} a_i(t) N_i^{(1)}(x, y) + W_1(x, y, t), \right. \\
&\left. \sum_{j=1}^{n_2} b_j(t) N_j^{(2)}(x, y) + W_2(x, y, t), \sum_{s=1}^{n_3} r_s(t) N_s^{(3)}(x, y) + W_3(x, y, t) \right), \tag{15}
\end{aligned}$$

де  $\mathbf{N}_i = (N_i^{(1)}, 0, 0)$ ,  $i = \overline{1, n_1}$ ,  $\mathbf{N}_j = (0, N_{j-n_1}^{(2)}, 0)$ ,  $j = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}$ ,  $\mathbf{N}_s = (0, 0, N_{s-n_1-n_2}^{(3)})$ ,  $s = \overline{n_1 + n_2 + 1, n_1 + n_2 + n_3}$ , – базисні вектор-функції скінченновимірного підпростору  $M_0 \subset H_0$ ;  $W_1(x, y, t)$ ,  $W_2(x, y, t)$ ,  $W_3(x, y, t)$  – відомі функції, такі, що  $W_1|_{AB} = H_1(x, y, t)$ ,  $(x, y) \in AB$ ;  $W_1|_{EF} = H_2(x, y, t)$ ,  $(x, y) \in EF$ ;  $W_1|_{DE} = y$ ,  $(x, y) \in DE$ ;  $W_2|_{AB} = C_m$ ,  $W_2|_{EF} = C_1(x, y, t)$ ,  $(x, y) \in EF$ ;  $W_3|_{AB} = T_1(x, y, t)$ ,  $(x, y) \in AB$ ;  $W_3|_{EF} = T_2(x, y, t)$ ,  $(x, y) \in EF$ ;  $W_3|_{\Gamma} = W_3|_{DE} = T_3(x, y, t)$ ,  $(x, y) \in \Gamma \cup DE$ ;  $\Omega = \cup \Omega_e$ ,  $\Omega_e$  – скінченні елементи;  $\tau_e^{(c)}$ ,  $\tau_e^{(T)}$  – параметри регуляризації.

З рівностей (11)–(14) при  $(s_1(x, y), s_2(x, y), s_3(x, y)) \in M_0$ , враховуючи (15), отримуємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно вектора  $\mathbf{U}(t) = (\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{R}(t))$ :

$$\mathbf{M}^{(3)} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{F}^{(3)}, \tag{16}$$

$$\mathbf{M}^{(2)} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{B}(t) = \mathbf{G}^{(2)} \cdot \mathbf{R}(t) + \mathbf{F}^{(2)}, \tag{17}$$

$$\mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{B}, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{A}(t) = \mathbf{G}^{(1)} \cdot \mathbf{B}(t) + \mathbf{G}'^{(1)} \cdot \mathbf{R}(t) + \mathbf{F}^{(1)}, \tag{18}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(1)} \cdot \mathbf{A}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(2)} \cdot \mathbf{B}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(2)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(3)} \cdot \mathbf{R}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(3)}, \tag{19}$$

де

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= (a_i(t))_{i=1}^{n_1}, \quad \mathbf{A}^{(0)} = (a_i(0))_{i=1}^{n_1}, \quad \mathbf{B} = (b_i(t))_{i=1}^{n_2}, \quad \mathbf{B}^{(0)} = (b_i(0))_{i=1}^{n_2}, \quad \mathbf{R} = (r_i(t))_{i=1}^{n_3}, \\
\mathbf{R}^{(0)} &= (r_i(0))_{i=1}^{n_3}, \quad \mathbf{M}^{(3)} = (m_{ij}^{(3)})_{i,j=1}^{n_3}, \quad \mathbf{L}^{(3)} = (\ell_{ij}^{(3)})_{i,j=1}^{n_3}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(3)} = (\tilde{m}_{ij}^{(3)})_{i,j=1}^{n_3}, \\
\tilde{\mathbf{M}}^{(1)} &= (\tilde{m}_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^{n_1}, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(3)} = (\tilde{f}_i^{(3)})_{i=1}^{n_3}, \quad \mathbf{F}^{(3)} = (f_i^{(3)})_{i=1}^{n_3}, \quad \mathbf{M}^{(2)} = (m_{ij}^{(2)})_{i,j=1}^{n_2}, \\
\tilde{\mathbf{M}}^{(2)} &= (\tilde{m}_{ij}^{(2)})_{i,j=1}^{n_2}, \quad \mathbf{L}^{(2)} = (\ell_{ij}^{(2)})_{i,j=1}^{n_2}, \quad \mathbf{G}^{(2)} = (g_{ij}^{(2)})_{i=1,j=1}^{n_2,n_3}, \quad \mathbf{F}^{(2)} = (f_i^{(2)})_{i=1}^{n_2}, \\
\tilde{\mathbf{F}}^{(2)} &= (\tilde{f}_i^{(2)})_{i=1}^{n_2}, \quad \mathbf{M}^{(1)} = (m_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^{n_1}, \quad \mathbf{L}^{(1)} = (\ell_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^{n_1}, \quad \mathbf{G}^{(1)} = (g_{ij}^{(1)})_{i=1,j=1}^{n_1,n_2}, \\
\mathbf{G}'^{(1)} &= (g'_{ij}^{(1)})_{i=1,j=1}^{n_1,n_3}, \quad \mathbf{F}^{(1)} = (f_i^{(1)})_{i=1}^{n_1}, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(1)} = (f_i^{(1)})_{i=1}^{n_1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_{ij}^{(3)} &= \iint_{\Omega} N_i^{(3)} N_j^{(3)} dx dy, & \tilde{m}_{ij}^{(2)} &= \iint_{\Omega} N_i^{(2)} N_j^{(2)} dx dy, & \tilde{m}_{ij}^{(1)} &= \iint_{\Omega} N_i^{(1)} N_j^{(1)} dx dy, \\
m_{ij}^{(3)} &= c_T \left( \iint_{\Omega} N_i^{(3)} N_j^{(3)} dx dy + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \int_{\Omega_e} \rho c_{\rho} N_j^{(3)}(\mathbf{u}, \nabla N_i^{(3)}) dx dy \right), \\
\tilde{f}_i^{(2)} &= \iint_{\Omega} c_0 N_i^{(2)} dx dy - \iint_{\Omega} W_2(x, y, 0) N_i^{(2)} dx dy, \\
\tilde{f}_i^{(3)} &= \iint_{\Omega} T_0 N_i^{(3)} dx dy - \iint_{\Omega} W_3(x, y, 0) N_i^{(3)} dx dy, \\
\ell_{ij}^{(3)} &= \iint_{\Omega} ((\boldsymbol{\lambda} \nabla N_j^{(3)}, \nabla N_i^{(3)}) + \rho c_{\rho} N_i^{(3)}(\mathbf{u}, \nabla N_j^{(3)})) dx dy + \\
&\quad + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \iint_{\Omega_e} \rho c_{\rho} (-\nabla \cdot (\boldsymbol{\lambda} \nabla N_j^{(3)}) + \rho c_{\rho}(\mathbf{u}, \nabla N_j^{(3)}))(\mathbf{u}, \nabla N_i^{(3)}) dx dy, \\
f_i^{(3)} &= - \iint_{\Omega} \left( c_T \frac{\partial W_3}{\partial t} N_i^{(3)} + (\boldsymbol{\lambda} \nabla W_3, \nabla N_i^{(3)}) + \rho c_{\rho} N_i^{(3)}(\mathbf{u}, \nabla W_3) \right) dx dy - \\
&\quad - \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \iint_{\Omega_e} \rho c_{\rho} \left( c_T \frac{\partial W_3}{\partial t} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\lambda} \nabla W_3) + \rho c_{\rho}(\mathbf{u}, \nabla W_3) \right) (\mathbf{u}, \nabla N_i^{(3)}) dx dy, \\
m_{ij}^{(2)} &= n \left( \iint_{\Omega} N_i^{(2)} N_j^{(2)} dx dy + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \iint_{\Omega_e} N_j^{(2)}(\mathbf{u}, \nabla N_i^{(2)}) dx dy \right), \\
m_{ij}^{(1)} &= \iint_{\Omega} N_i^{(1)} N_j^{(1)} dx dy + \frac{n(1 + \bar{e})(1 + \xi)}{2\gamma a} \int_{\Gamma} N_i^{(1)} N_j^{(1)} d\Gamma, \\
g_{ij}^{(2)} &= - \iint_{\Omega} (\mathbf{D}_T \nabla N_j^{(3)}, \nabla N_i^{(2)}) dx dy - \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \iint_{\Omega_e} \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla N_j^{(3)})(\mathbf{u}, \nabla N_i^{(2)}) dx dy, \\
\ell_{ij}^{(2)} &= \iint_{\Omega} ((\mathbf{D} \nabla N_j^{(2)}, \nabla N_i^{(2)}) + N_i^{(2)}(\mathbf{u}, \nabla N_j^{(2)}) + \gamma_1 N_i^{(2)} N_j^{(2)}) dx dy + \\
&\quad + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \iint_{\Omega_e} (-\nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla N_j^{(2)}) + (\mathbf{u}, \nabla N_j^{(2)}) + \gamma_1 N_j^{(2)})(\mathbf{u}, \nabla N_i^{(2)}) dx dy, \\
f_i^{(1)} &= \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial h^*}{\partial t} + \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial \theta^*}{\partial t} \right) N_i^{(1)} dx dy - \frac{n(1 + \bar{e})(1 + \xi)}{2\gamma a} \int_{\Gamma} N_i^{(1)} \frac{\partial W_1}{\partial t} d\Gamma + \\
&\quad + \frac{(1 + \bar{e})(1 + \xi)}{2\gamma a} \iint_{\Omega} \left( -N_i^{(1)} \frac{\partial W_1}{\partial t} - (\mathbf{K} \nabla W_1, \nabla N_i^{(1)}) + (\mathbf{v} \nabla W_2, \nabla N_i^{(1)}) + \right. \\
&\quad \left. + (\mathbf{K}_T \nabla W_3, \nabla N_i^{(1)}) \right) dx dy, \\
f_i^{(2)} &= - \iint_{\Omega} \left( n \frac{\partial W_2}{\partial t} N_i^{(2)} + (\mathbf{D} \nabla W_2, \nabla N_i^{(2)}) + (\mathbf{D}_T \nabla W_3, \nabla N_i^{(2)}) - \right. \\
&\quad \left. - \gamma_1 N_i^{(2)} (C_m - W_2) \right) dx dy - \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \iint_{\Omega_e} \left( n \frac{\partial W_2}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla W_2) - \right. \\
&\quad \left. - \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla W_3) + (\mathbf{u}, \nabla W_2) + \gamma_1 (W_2 - C_m) \right) (\mathbf{u}, \nabla N_i^{(2)}) dx dy,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_i^{(1)} &= \iint_{\Omega} h_0 N_i^{(1)} dx dy - \iint_{\Omega} W_1(x, y, 0) N_i^{(1)} dx dy, \\
\ell_{ij}^{(1)} &= \frac{(1 + \bar{e})(1 + \xi)}{2\gamma a} \iint_{\Omega} (\mathbf{K} \nabla N_j^{(1)}, \nabla N_i^{(1)}) dx dy, \\
g_{ij}^{(1)} &= \frac{(1 + \bar{e})(1 + \xi)}{2\gamma a} \iint_{\Omega} (\mathbf{v} \nabla N_j^{(2)}, \nabla N_i^{(1)}) dx dy, \\
g'_{ij}{}^{(1)} &= -\frac{(1 + \bar{e})(1 + \xi)}{2\gamma a} \iint_{\Omega} (\mathbf{K}_T \nabla N_j^{(3)}, \nabla N_i^{(1)}) dx dy.
\end{aligned}$$

Параметри регуляризації  $\tau_e^{(T)}$ ,  $\tau_e^{(c)}$  у (12), (13) згідно з [1, 12] вибираємо таким чином:

$$\tau_e^{(T)} = \frac{h_e}{a \|\rho c_p \mathbf{u}\|_{\infty, e}} \gamma(\text{Pe}_T), \quad \tau_e^{(c)} = \frac{h_e}{a \|\mathbf{u}\|_{\infty, e}} \gamma(\text{Pe}_c),$$

$$\text{де } a = 3, \quad \gamma(z) = \begin{cases} z, & 0 \leq z \leq 1, \\ 1, & 1 < z < \infty. \end{cases}$$

Для знаходження числового розв'язку задачі Коші (16)–(19) поділимо часовий відрізок  $[0, t_0]$  на  $M$  однакових частин з кроком  $\tau = \frac{t_0}{M}$ . Позначимо через  $\mathbf{U}^{(j)} = (\mathbf{A}^{(j)}, \mathbf{B}^{(j)}, \mathbf{R}^{(j)})$  наближені розв'язки задачі Коші (16)–(19) при  $t = j\tau$ . Також введемо такі позначення:  $\mathbf{R}^{(j+1/2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{R}^{(j+1)} + \mathbf{R}^{(j)})$ ,  $\mathbf{A}^{(j+1/2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^{(j+1)} + \mathbf{A}^{(j)})$ ,  $\mathbf{B}^{(j+1/2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}^{(j+1)} + \mathbf{B}^{(j)})$ .

Наближений розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь (16)–(18) можна знайти за допомогою схеми Кренка – Ніколсона [13]. Однак ця схема вимагає на кожному часовому шарі розв'язання систем нелінійних рівнянь. Щоб уникнути цього, для знаходження наближених розв'язків задачі Коші можна використати схему предиктор-коректор [3, 13].

Особливість цієї задачі полягає в тому, що область фільтраційної консолідації змінюється з часом за рахунок зміни положення вільної поверхні (крива  $\Gamma$  на рис. 1). Тому постає необхідність в алгоритмі ітерування вільної поверхні. Для цього використаємо метод, запропонований у [13] і адаптований до задач фільтраційної консолідації з урахуванням впливу переносу солей у [4].

Нехай задачу розв'язуємо методом скінченних елементів. Тоді область  $\bar{D}$  ( $D = \Omega \cup \Omega_1$ ) покриваємо відповідною скінченноелементною сіткою. Припустимо, що на  $j$ -му часовому шарі задача (1)–(10) розв'язана, тобто знайдено положення кривої депресії  $\Gamma^{(j)}$ . Тоді:

1°. Визначаємо значення напору  $h(x, y, t_{j+1})$  на  $(j+1)$ -му часовому шарі, використовуючи положення кривої депресії  $\Gamma^{(j)}$ . У вузлах, які лежать вище від кривої депресії, коефіцієнти фільтрації та осмосу покладаємо рівними нулеві. Для того щоб матриця МСЕ була невиродженою, її діагональні елементи, які відповідають вузлам над вільною поверхнею, покладаємо рівними деякому додатному числу.

2°. Знаходимо положення кривої депресії на  $(j+1)$ -му часовому шарі. Для цього визначаємо в кожній вузловій точці значення тиску  $p^{(i)}(x_i, y_i, t_{j+1}) = h(x_i, y_i, t_{j+1}) - y_i$ . Тут покладаємо  $\gamma = 1$ . Далі, по кожному скінченному елементу  $E$  підраховуємо середнє значення тиску

$p^{(E)} = \frac{1}{s_1} \cdot \sum_i p^{(i)}$ , де  $s_1$  – кількість вузлів, які належать елементу  $E$ . Нове положення депресійної кривої визначаємо з умови, що для всіх скінченних елементів, які лежать під депресійною кривою, має виконуватись співвідношення  $p^{(E)} > \varepsilon \geq 0$  для заданого достатньо малого значення  $\varepsilon$ .

3°. Визначаємо значення концентрації  $c(x, y, t_{j+1})$  і температури  $T(x, y, t_{j+1})$  на  $(j+1)$ -му часовому шарі, використовуючи знайдене положення кривої депресії  $\Gamma^{(j+1)}$ . У вузлах, які лежать вище від кривої депресії, елементи тензорів  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{D}_T$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$ , коефіцієнт  $\gamma_1$  і швидкість фільтрації покладаємо рівними нулеві. Для того щоб матриці МСЕ були невинродженими, їхні діагональні елементи, які відповідають вузлам над вільною поверхнею, покладаємо рівними деякому додатному числу.

4°. Переходимо на наступний,  $(j+2)$ -й, часовий шар і розпочинаємо алгоритм із першого кроку.

**Результати числових експериментів.** Встановлення оцінки впливу тепломасопереносу на процес фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі проведено на тестовому прикладі. Розглянуто задачу фільтраційної консолідації тіла глинистої греблі з такими вихідними даними:

$$\begin{aligned} v_{11} = v_{22} = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5/(\text{кг} \cdot \text{доба}), \quad v_{12} = v_{21} = 0 \text{ м}^5/(\text{кг} \cdot \text{доба}), \quad \bar{e} = 0.7, \quad \xi = 0.75, \\ D_{11} = D_{22} = 0.02 \text{ м}^2/\text{доба}, \quad D_{12} = D_{21} = 0 \text{ м}^2/\text{доба}, \quad k_{11}(c) = k_{22}(c) = k(c), \quad k_{12}(c) = \\ = k_{21}(c) = 0 \text{ м}/\text{доба}, \quad (k_T)_{11} = (k_T)_{22} = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/(\text{град} \cdot \text{доба}), \quad \gamma_1 = 0 \text{ доба}^{-1}, \\ (k_T)_{12} = (k_T)_{21} = 0 \text{ м}^2/(\text{град} \cdot \text{доба}), \quad a = 5.12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{Н}, \quad \rho = 1100 \text{ кг}/\text{м}^3, \quad \lambda_{11} = \\ = \lambda_{22} = 108 \text{ кДж}/(\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}), \quad \lambda_{12} = \lambda_{21} = 0 \text{ Дж}/(\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}), \quad T_0 = 30^\circ\text{C}, \\ c_p = 4.2 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{град}), \quad c_T = 2137 \text{ кДж}/(\text{м}^3 \cdot \text{град}), \quad H_1 = 20 \text{ м}, \quad H_2 = 0 \text{ м}, \\ C_m = 350 \text{ г}/\text{л}, \quad C_1 = 8 \text{ г}/\text{л}, \quad c_0(x, y) = 8 \text{ г}/\text{л}, \quad T_1 = T_2 = T_3 = 17 + 13 \cos \frac{\pi t}{180}. \end{aligned}$$

Координати вершин профілю греблі (див. рис. 1) вибрано наступними:  $A(0, 0)$ ,  $N(10, 0)$ ,  $M(60, 6)$ ,  $G(80, 2)$ ,  $F(100, 2)$ ,  $E(100, 2)$ ,  $W(88, 9)$ ,  $R(80, 13)$ ,  $S(52, 18)$ ,  $P(44, 20)$ ,  $Q(40, 20)$ ,  $B(38, 19)$ .

У рівнянні (1)  $\frac{\partial h^*}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = 0$ , оскільки навантаження вважаємо миттєво прикладеним і незмінним у часі. Також у законі (4) знехтувано швидкістю руху твердих частинок ґрунту. Функції  $T_1$ ,  $T_2$  і  $T_3$  визначаємо з умови сезонних коливань температури, причому  $T_{\max} = 30^\circ\text{C}$ ,  $T_{\min} = 4^\circ\text{C}$ .

Вважали, що початковий розподіл напорів у тілі греблі зумовлюється власною вагою ґрунту. Тобто  $h_0(x, y) = y_\Gamma \cdot \frac{\gamma_\Gamma}{\gamma} + y$ , де  $y_\Gamma$  – вертикальна відстань від точки з координатами  $(x, y)$  до верхньої межі греблі (висота стовпа ґрунту, прикладеного до даної точки);  $\gamma_\Gamma = 1.95 \cdot 10^4 \text{ Па}/\text{м}^3$  – питома вага ґрунту;  $\gamma = 1.1 \cdot 10^4 \text{ Па}/\text{м}^3$  – питома вага порового сольового розчину.

Залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації сольового розчину  $k = k(c)$  вибрали такою [5]:

$$k(c) = a_5 \cdot c^5 + a_4 \cdot c^4 + a_3 \cdot c^3 + a_2 \cdot c^2 + a_1 \cdot c + a_0,$$

де  $a_5 = 5.9404 \cdot 10^{-2}$ ,  $a_4 = -1.6703 \cdot 10^{-1}$ ,  $a_3 = 1.7051 \cdot 10^{-1}$ ,  $a_2 = -7.4311 \cdot 10^{-2}$ ,  $a_1 = 1.0563 \cdot 10^{-2}$ ,  $a_0 = 1.0054 \cdot 10^{-3}$ ,  $c \in [0, 1]$  – безрозмірна величина.



Обчислення проведено на сітці з 1148 трикутних скінченних елементів при кусково-квадратичних базисних функціях. Попередньо математична модель (1)–(10) була зведена до безрозмірного вигляду. Для дискретизації в часі використано схему предиктор-коректор з рівномірним кроком за часом. Величина кроку за часом в безрозмірній моделі  $\bar{\tau} = 0.00125$ , що відповідає кроку в реальному часі  $\tau = 30$  діб. Інтеграли для відшукування елементів відповідних матриць у задачі Коші (16)–(19) обчислено з використанням квадратурних формул Гаусса п'ятого порядку [10]. Після проведення числових експериментів здійснено перехід до розмірних величин.

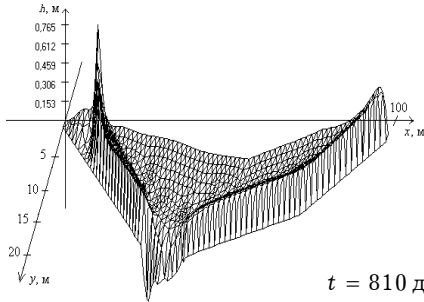


Рис. 2

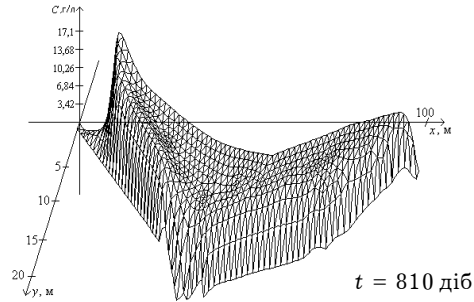


Рис. 3

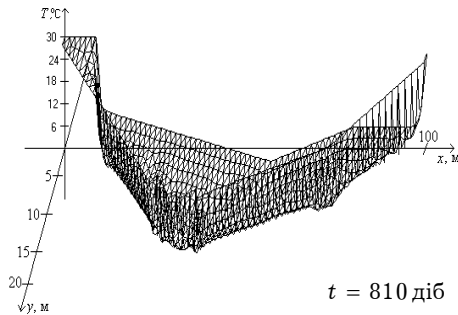


Рис. 4

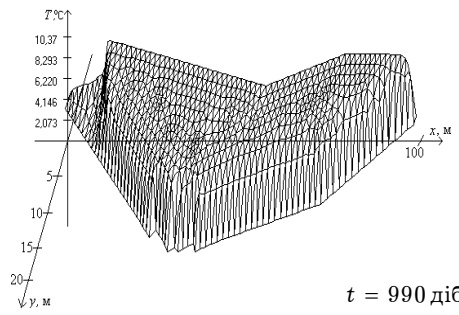


Рис. 5

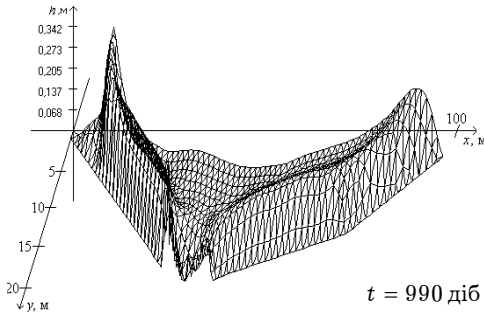


Рис. 6

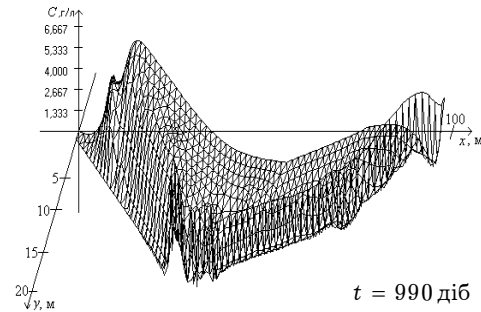


Рис. 7

На рис. 2, 6 наведено графіки розподілу різниці напорів  $\Delta h(x, y, t) = h_2(x, y, t) - h_1(x, y, t)$  відповідно при  $t = 810$  діб і  $t = 990$  діб, де  $h_1(x, y, t)$  – напір при нехтуванні термодифузії та термоосмосом, а  $h_2(x, y, t)$  – напір при  $\mathbf{D}_T = \mathbf{D}$  і врахуванні термоосмосу (в обох випадках враховується вплив нормального хімічного осмосу). На рис. 3, 7 наведено аналогічні графіки розподілу різниці концентрації солей. За ізотермічних умов результати числових експериментів цієї роботи співпадають з результатами роботи [4].

На рис. 4, 5 наведено графіки розподілу температури відповідно при  $t = 810$  діб і  $t = 990$  діб.

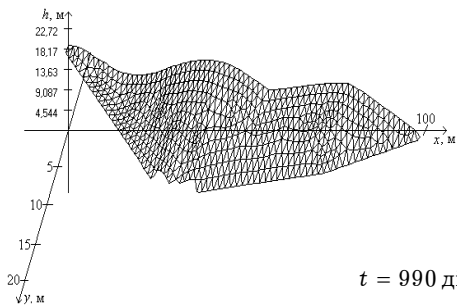


Рис. 8

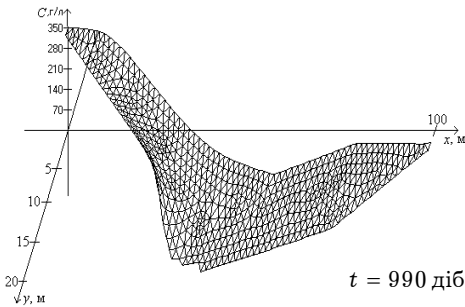


Рис. 9

На рис. 8, 9 наведено графіки відповідно розподілу напорів і концентрації солей в неізотермічному режимі при  $t = 990$  діб.

**Висновки.** Аналіз результатів проведених числових експериментів розрахунку полів напорів, концентрації солей і температури для розглянутої задачі показав, що у випадку врахування термодифузії, термоосмосу та впливу переносу солей на процес фільтраційної консолідації в околах вільної поверхні та межі, що прилягає до лівого укосу греблі, відбуваються коливання надлишкових напорів та концентрації солей, які залежать від сезонних коливань температури. Щоб пояснити ці явища, потрібно звернути увагу на розподіл температури та концентрації солей по області консолідації, а також на характер залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації сольового розчину. При  $t = 810$  діб в області лівого укосу  $c_1(x, y, t) < c_2(x, y, t)$ , де  $c_1(x, y, t)$  – розподіл концентрації солей при нехтуванні термодифузисю та термоосмосом, а  $c_2(x, y, t)$  – розподіл концентрації солей в неізотермічних умовах. Тобто в цьому випадку градієнт концентрації солей в неізотермічних умовах менший, аніж в ізотермічних. Хімічний осмос при зменшенні градієнта концентрації солей зменшує свій вплив, а тому напори в ізотермічних умовах в області лівого укосу розсіюються повільніше, ніж в неізотермічних умовах. Якщо звернути увагу на розподіл температури (див. рис. 4, 5), то аналогічний вплив на напірну функцію має і термічний осмос. Але вплив термічного осмосу менший від впливу хімічного осмосу. Тому при сезонному коливанні температури відбувається сезонне коливання різниці напорів, однак завжди  $h_2(x, y, t) - h_1(x, y, t) > 0$ . Відмінність спостерігається лише на вільній поверхні (див., наприклад, рис. 2), де вищевказана різниця може ставати меншою від нуля. Пояснити це явище можна тим, що на межах лівого та правого укосів тіла греблі для напірної функції задаються граничні умови першого роду, а на вільній поверхні – умова (9). Розподіл різниці концентрації солей (див. рис. 3, 7), у свою чергу, пояснюється розподілом температури (див. рис. 4, 5) та явищем термодифузії.

Наявність градієнта концентрації солей у поровій воді та градієнта температури в ґрунті порушує очікуване співвідношення напорів у ньому, що може призвести до негативних наслідків, пов'язаних зі стійкістю укосів ґрунтової греблі. Зокрема, як показав тестовий приклад, сезонні коливання температури можуть спричинити коливання напорів у районах лівого та правого укосів, а також в околі вільної поверхні.

Отже, на підставі [2–4] сформульовано математичну модель двовимірної задачі фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі з урахуванням впливу перенесення солей в неізотермічних умовах. Числовий розв'язок відповідної крайової задачі знайдено методом скінченних елементів з використанням стабілізаційної протипотокової схеми Петрова-Гальоркіна. Як приклад наведено результати числових експериментів з дослідження фільтраційної консолідації глинистої греблі.

Відмітимо, що в розглянутій статті не досліджується питання теоретичного встановлення точності скінченноелементних розв'язків відповідної крайової задачі. Обґрунтування одержаних числових результатів є наступним етапом наших досліджень.

1. *Вагін П., Ямелинець А.* Розв'язування початково-крайових задач міграції домішок // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2002. – Вип. 5. – С. 61–67.
2. *Власюк А. П., Жеребятъев О. В.* Фільтраційна консолідація глинистих ґрунтів при наявності масопереносу солей // Вісн. Укр. держ. акад. водного госп-ва. – 1998. – Вип. 1, ч. 1. – С. 40–43.
3. *Власюк А. П., Мартинюк П. М.* Чисельне розв'язання двовимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунтового масиву при наявності переносу солей в неізотермічному режимі // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – (Подано до друку.)
4. *Власюк А. П., Мартинюк П. М.* Чисельне розв'язання задачі фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі з урахуванням масопереносу солей // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2000. – Вип. 2. – С. 197–204.
5. *Власюк А. П., Мартинюк П. М.* Чисельне розв'язування однієї задачі фільтраційної консолідації з урахуванням масоперенесення // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 1999. – Вип. 1. – С. 56–64.
6. *Галкин А. Н., Королев В. А.* Закономерности диффузионно-осмотических процессов в глинистых породах при миграции многокомпонентных растворов электролитов // Геоэкология. – 2002. – № 1. – С. 61–64.
7. *Жеребятъев О. В., Джоші О. І.* Моніторинг стану греблі хвостосховища // Вісн. Укр. держ. ун-т водного госп-ва та природокористування. – 2002. – Вип. 5 (18), ч. 3. – С. 28–34.
8. *Зарецкий Ю. К.* Теория консолидации ґрунтов. – Москва: Наука, 1967. – 270 с.
9. *Иванов П. Л.* Ґрунты и основания гидротехнических сооружений. Механика ґрунтов. – Москва: Высш. шк., 1991. – 447 с.
10. *Крылов В. И., Шулгина Л. Т.* Справочная книга по численному интегрированию. – Москва: Наука, 1966. – 372 с.
11. *Рельтов Б. Ф., Новицкая Н. А.* Осмотические явления в связных ґрунтах при неравномерном их засолении // Изв. ВНИИГ. – 1954. – 51. – С. 94–122.
12. *Савула Я. Г., Шинкаренко О. Г.* Стабілізація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: протипотокова схема // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 46. – С. 3–9.
13. *Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.
14. *Флорин В. А.* Теория уплотнения земляных масс. – Москва: Госстройиздат, 1948. – 284 с.
15. *Чураев П. В., Дерягин Б. В., Золотарев П. П.* Термоосмос растворов электролитов в пористых телах // Докл. АН СССР. – 1968. – 183, № 5. – С. 1139–1142.
16. *Fritz S. J.* Ideality of clay membranes in osmotic processes: a review // Clays Clay Miner. – 1986. – 34. – P. 214–223.
17. *Ghassemi A., Diek A., Helio dos Santos.* Effects of ion diffusion and thermal osmosis on shale deterioration and borehole instability // AADE-2001. National Drilling Conf. «Drilling Technology: The next 100 years», Houston, March 27–29, 2001.
18. *Hafskjold B., Ikeshoji T., Ratkje S. K.* On the molecular mechanism of thermal-diffusion in liquids // Mol. Phys. – 1993. – 80. – P. 1389–1392.
19. *Keijzer Th. J. S., Kleingeld P. J., Loch J. P. G.* Chemical osmosis in compacted clayey material and the prediction of water transport // Eng. Geology. – 1999. – 53. – P. 151–159.
20. *Keijzer Th. J. S., Loch J. P. G.* Chemical osmosis in compacted dredging sludge // Soil. Sci. Soc. Am. J. – 2001. – 65. – P. 1045–1055.
21. *Neuzil C. E.* Osmotic generation of 'anomalous' fluid pressures in geological environments // Nature. – 2000. – 403. – P. 182–184.
22. *Sandra M. C., Abimael F. D., Eduardo L. M.* Numerical analysis of a stabilized finite element method for tracer injection simulations // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 2000. – 187. – P. 119–136.

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАБИЛИЗАЦИОННЫМИ  
СХЕМАМИ МКЭ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ ТЕЛА  
ГРУНТОВОЙ ПЛОТИНЫ С УЧЁТОМ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА**

*Сформулирована математическая модель двумерной задачи фильтрационной консолидации тела грунтовой плотины с учётом массопереноса солей в неизо-термическом режиме и получено её численное решение с использованием стабили-зационных схем метода конечных элементов. На основании проведённых числен-ных экспериментов показано влияние массопереноса солей и неизотермических условий на процесс фильтрационной консолидации тела глинистой плотины.*

**NUMERICAL MODELING OF FILTRATION CONSOLIDATION  
PROBLEM OF THE BODY OF SOIL DAM TAKING INTO ACCOUNT HEAT  
AND MASS TRANSFER BY STABILIZED FINITE ELEMENT METHOD**

*A mathematical model of filtration consolidation problem of the body of soil dam taking into account the salt transfer and non-isothermal conditions has been formulated. The numerical solution of the corresponding two-dimensional boundary-value problem has been found by the stabilized finite element method. The influence of the salt transfer and non-isothermal conditions on the filtration consolidation process has been investigated by means of the numerical experiment.*

Укр. держ. ун-т водного госп-ва  
та природокористування, Рівне

Одержано  
11.05.04