

А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк

ЗАДАЧІ ТИПУ «ФІЛЬТРАЦІЯ-КОНВЕКЦІЯ» У ТРИЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ ІЗ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ ОСЕРЕДНЕННЯ

Одержано розв'язки класу задач типу «фільтрація-конвекція» у тризв'язній області, обмеженій еквіпотенціальними лініями, у випадку, коли на невідомій ділянці виходу течії з одного із внутрішніх контурів – складових її границі, задається умова осереднення. В основі їх побудови – ідея «конформного переходу» від даної області з розрізом вздовж однієї із ліній розділу течії до відповідної області комплексного потенціалу. Наведено результати числових розрахунків за отриманими формулами.

Вступ. Як відомо [1, 2, 5, 6], розв'язки найбільш типових двовимірних задач конвективного масопереносу при фільтрації у чотирикутних криволінійних областях, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями, а також розв'язки задач у двозв'язних областях, обмежених еквіпотенціальними лініями, можна знайти, використовуючи методику переходу від фізичної області до відповідної області комплексного потенціалу (див., наприклад, [7]) разом із числово-аналітичними методами. У роботах [3, 7] розроблено метод розв'язування відповідних обернених крайових задач на конформні та квазіконформні відображення, у тому числі для побудови динамічної сітки, ліній розділу течії і поля швидкості з паралельним розрахунком інших характеристик (витрат, величин перетоків тощо) потенціальних і квазіпотенціальних полів. Особливість розв'язування такого роду задач для тризв'язної області полягає у тому, що залежно від співвідношення значень граничних потенціалів відповідна область комплексного потенціалу будується неоднозначно, і разом з побудовою алгоритму числового розв'язування нелінійної оберненої задачі на конформне відображення у кожному з конкретних випадків виникає «проблема вибору» [3]. Зокрема, у роботі [4] розроблено методику розв'язування задач фільтрації і конвективного масопереносу для тризв'язної області у випадку, коли один із її обмежуючих внутрішніх контурів поповнює вихідний потік. З урахуванням цього отримано формули для наближеного розв'язку задач конвективного масопереносу на заданому фільтраційному полі.

У цій роботі такий підхід поширюється на випадки, коли на частині одного з внутрішніх контурів задається умова осереднення.

Один із варіантів «осереднення» шуканої функції (концентрації розчинної речовини) вздовж окремих ділянок внутрішніх межових контурів із невідомими кінцями (які визначаються у процесі розв'язування задачі) вводимо тут, у першу чергу, з метою моделювання конвективно-дифузійних процесів у середовищах із сильно проникними включеннями, закони швидкого поширення через які як частинок рідини, так і забруднюючих її частинок є невідомими.

Постановка задачі. У деякій тризв'язній криволінійній області G_z (рис. 1а), обмеженій замкненими гладкими контурами $L_* = \{z = x + iy : f_*(x, y) = 0\}$, $L_0 = \{z : f_0(x, y) = 0\}$, $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$, розглянемо модельну задачу типу «конвекція-фільтрація» [1, 2, 5, 6]:

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \varphi|_{L_0} = \varphi_0, \\ v_x \cdot c_x + v_y \cdot c_y - c_t = 0, \quad (x, y, t) \in G = G_z \times (0, \infty), \quad (1)$$

$$c|_{L_* \times (0, \infty)} = c_*(x, y, t), \quad c|_{L_0^* \times (0, \infty)} = \frac{\lambda}{\ell} \oint_{L_0^*} c(x, y, t) ds, \quad c|_{t=0, (x, y) \in G_z} = c_0^0(x, y), \quad (2)$$

де $c_*(x, y, t)$, $c_0^0(x, y)$ – задані досить гладкі та узгоджені на $(\partial G_z, 0)$ функції; $\varphi = \varphi(x, y)$ – потенціал швидкості фільтрації $\mathbf{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y))$; $-\infty < \varphi_* < \varphi_0 < \varphi^* < +\infty$; $L_0 = L_0^0 \cup L_0^*$, $L_0^* = \left\{ z = x + iy \in L_0 : \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial n} > 0 \right\}$, $L_0^0 = \left\{ z = x + iy \in L_0 : \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial n} \leq 0 \right\}$; n – вектор внутрішньої нормалі до ∂G_z ; ℓ – довжина ділянки L_0^* . Значення потенціалу φ_0 на «контурі-поповнювачі» L_0 є таким, що $\oint_{L_0} -v_y dx + v_x dy > 0$. Друга з умов (2) (умова осереднення) означає, що басейн, обмежений контуром L_0 , миттєво розчиняє і перерозподіляє речовину, яка поступає до нього через ділянку L_0^0 , а, отже, має місце її рівномірний розподіл уздовж L_0^* . Коефіцієнт λ характеризує ступінь поглинання басейном забруднень (поповнення при $\lambda > 1$). Відповідна область комплексного потенціалу G_ω зображена на рис. 1б, де $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ – комплексний потенціал течії, $\psi = \psi(x, y)$ – функція течії. Щодо шуканих параметрів Q_0^* , Q_*^0 , Q_*^* (відповідно величин перетоків: від L_0 до L^* , від L_* до L_0 , від L_* до L^* , де $Q_0^* - Q_*^0 = \oint_{L_0} -v_y dx + v_x dy$, $Q_*^* + Q_0^* = \oint_{L_0^*} -v_y dx + v_x dy$, $-Q_*^* - Q_*^0 = \oint_{L_*} -v_y dx + v_x dy$), відомо лише, що $Q_0^* > Q_*^0$. Аналогічно, як у [8], розріз $\Gamma = AB \cup BC$, де $A \in L_*$, $B \in L_0$, $C \in L^*$, трив'язної області G_z умовно вибираємо уздовж однієї з ліній розділу течії та знаходимо в процесі розв'язування задачі.

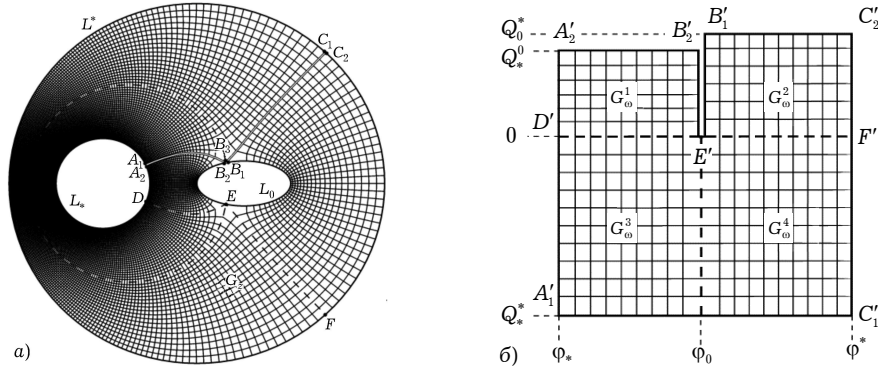


Рис. 1

Алгоритм числового розв'язування сформульованої задачі. У роботі [4] шляхом побудови наближеного конформного відображення області G_ω на вихідну область $G_z^0 = G_z \setminus \Gamma$ при відповідності кутових точок знайдено характеристичну функцію течії $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$, невідомі параметри Q_0^* , Q_*^0 , Q_*^* , координати вузлів динамічної сітки $(x_{i,j}, y_{i,j})$, відповідні вузлам (φ_i, ψ_j) кусково-рівномірної сітки в області комплексного потенціалу G_ω (рівномірної у кожній з підобластей $G_\omega^1 = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi_0,$

$0 < \psi < Q_*^0$, $G_\omega^2 = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_0 < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_0^*\}$, $G_\omega^3 = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi_0, -Q_*^* < \psi < 0\}$, $G_\omega^4 = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_0 < \varphi < \varphi^*, -Q_*^* < \psi < 0\}$, цієї області).

Тепер з огляду на формулу для обчислення вектора швидкості заданого поля $\bar{v} = \frac{d\omega}{dz} = \left(\frac{dz}{d\omega}\right)^{-1}$ у внутрішніх вузлах динамічної сітки одержимо $v_{x_{i,j}} = v_x(x_{i,j}, y_{i,j}) = J_{i,j}^{-1}(x_{i+1,j} - x_{i,j})\Delta\psi$, $v_{y_{i,j}} = v_y(x_{i,j}, y_{i,j}) = J_{i,j}^{-1}(y_{i+1,j} - y_{i,j})\Delta\psi$, де $J_{i,j} = (x_{i+1,j} - x_{i,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j})(y_{i+1,j} - y_{i,j})$, $v_{i,j} = \sqrt{v_{x_{i,j}}^2 + v_{y_{i,j}}^2}$. Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ у рівнянні (1) і в умовах (2), отримаємо відповідну періодичну задачу конвективного масопереносу для області G_ω :

$$v^2(\varphi, \psi) \cdot \frac{\partial c}{\partial \varphi} + \frac{\partial c}{\partial t} = 0, \quad (\varphi, \psi, t) \in \Omega = G_\omega \times (0, \infty),$$

$$c(\varphi, \psi, 0) = c_0^0(\varphi, \psi), \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega,$$

$$c(\varphi_*, \psi, t) = c_*(\psi, t), \quad t \geq 0, \quad -Q_*^* \leq \psi \leq Q_*^0,$$

$$c(\varphi_0^+, \psi, t) = \frac{\lambda \int_{Q_*^0}^{Q_*^*} c(\varphi_0^-, \psi, t) d\psi}{Q_0^*}, \quad 0 < \psi \leq Q_0^*, \quad \varphi_0^+ = \varphi_0 + 0, \quad \varphi_0^- = \varphi_0 - 0.$$

Згідно з методом характеристик [1, 6] її розв'язок запишемо у вигляді:

$$c(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \left. \begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & c_0^0(f_1^{-1}(f_1(\varphi, \psi) - t), \psi), & t \leq f_1(\varphi, \psi), \\ & c_*(\psi, t - f_1(\varphi, \psi)), & t > f_1(\varphi, \psi), \end{aligned} \right\} & (\varphi, \psi) \in G_\omega^1 \cup G_\omega^3 \cup G_\omega^4, \\ & \left. \begin{aligned} & c_0^0(f_2^{-1}(f_2(\varphi, \psi) - t), \psi), & t \leq f_2(\varphi, \psi), \\ & \frac{\lambda \int_{Q_*^0}^{Q_*^*} c(\varphi_0^-, \psi, t - f_2(\varphi, \psi)) d\psi}{Q_0^*}, & t > f_2(\varphi, \psi), \end{aligned} \right\} & (\varphi, \psi) \in G_\omega^2, \end{aligned} \right\}$$

де

$$f_1(\varphi, \psi) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)}, \quad f_2(\varphi, \psi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)},$$

а f_1^{-1} , f_2^{-1} – функції, обернені відповідно до функцій f_1 , f_2 щодо змінної φ (такі функції існують, оскільки f_1 , f_2 є монотонно зростаючими та неперервно диференційовними функціями щодо цієї змінної). Зауважимо, що змінну ψ тут вважаємо параметром.

Лінію фронту конвективного переносу (розділу «зон впливу» початкової і граничної умов) у фіксований момент часу t знаходимо як розв'язок рівняння $t = f(\varphi, \psi)$, де

$$f(\varphi, \psi) = \begin{cases} f_1(\varphi, \psi), & (\varphi, \psi) \in G_\omega^1 \cup G_\omega^3 \cup G_\omega^4, \\ f_2(\varphi, \psi), & (\varphi, \psi) \in G_\omega^2. \end{cases}$$

Для наближеного обчислення виразів $f_1^{-1}(f_1(\varphi, \psi) - t)$, $f_2^{-1}(f_2(\varphi, \psi) - t)$ (у тому числі для обернення відповідних визначених інтегралів зі змінною верхньою границею) використовуємо підхід, описаний у роботі [6]. А саме, провівши дискретизацію часу t , наприклад, за формулою $t_k = \Delta t \cdot k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $0 < \Delta t < \infty$, використовуючи метод трапецій обчислення визначених інтегралів і метод хорд розв'язування нелінійних алгебраїчних рівнянь, одержимо (з метою спрощення запису розв'язків розглянемо випадок $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi$):

$$c(\varphi_i, \psi_j, t_k) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} c_0^0 \left(\varphi_r + (\varphi_{r+1} - \varphi_r) \frac{t_r^0 - t_r}{t_{r+1} - t_r}, \psi_j \right), \\ c_*(\psi_j, t_k - t_i), \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} t_k \leq f(\varphi_i, \psi_j), \\ t_k > f(\varphi_i, \psi_j), \end{array} \right\} \quad (\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^1 \cup G_\omega^3 \cup G_\omega^4,$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} c_0^0 \left(\varphi_r + (\varphi_{r+1} - \varphi_r) \frac{t_r^* - t_r}{t_{r+1} - t_r}, \psi_j \right), \\ \frac{\lambda \sum_{q=m_1+1}^{m_1+m_2} c(\varphi_0^-, \psi_q, t_k - f(\varphi_i, \psi_j)) \cdot (\psi_q - \psi_{q-1})}{Q_0^*}, \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} t_k \leq f(\varphi_i, \psi_j), \\ t_k > f(\varphi_i, \psi_j), \end{array} \right\} \quad (\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^2,$$

$$\text{де } \psi_q = \begin{cases} -Q_*^* + \frac{Q_*^* \cdot q}{m_1}, & 0 \leq q \leq m_1, \\ \frac{Q_*^0 \cdot q}{m_2}, & m_1 < q \leq m_2, \end{cases} \quad m_1, m_2 \in \mathbb{N},$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_r = f_1^{-1}(t_r), \\ \varphi_{r+1} = f_1^{-1}(t_{r+1}), \end{array} \right\} \quad t_r < t_r^0 = f_1(\varphi_i, \psi_j) - t_k < t_{r+1}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega^1 \cup G_\omega^3 \cup G_\omega^4,$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_r = f_2^{-1}(t_r), \\ \varphi_{r+1} = f_2^{-1}(t_{r+1}), \end{array} \right\} \quad t_r < t_r^* = f_2(\varphi_i, \psi_j) - t_k < t_{r+1}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega^2.$$

Програмна реалізація алгоритму та чисельні приклади. Вищеописаний алгоритм чисельного розв'язування поставленої задачі реалізовано у вигляді комп'ютерної програми для ПК IBM PC/AT, що використовує набір мультимедійних інструкцій SSE процесорів Pentium III і Athlon XP. На рис. 1 зображено динамічну сітку фільтраційної течії, коли

$$L_* = \{ x + iy : x = x_*(t) = -2 + \cos t, \quad y = y_*(t) = \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi \},$$

$$L^* = \{ x + iy : x = x^*(t) = 4 \cos t, \quad y = y^*(t) = 4 \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi \},$$

$$L_0 = \{ x + iy : x = x_0(t) = 1 + \cos t, \quad y = y_0(t) = \sin t/2, \quad 0 \leq t < 2\pi \},$$

$$\varphi_* = 0, \quad \varphi_0 = 0.6, \quad \varphi^* = 1, \quad n = 50 \quad (n_1 = 30, \quad n_2 = 20),$$

$$m_1 = 273, \quad m_2 = 26, \quad m_3 = 38.$$

У результаті числового розв'язування відповідної задачі на конформне відображення отримано значення витрат $Q_*^0 = 0.527$, $Q_0^* = 0.750$, $Q_*^* = 5.464$, а також розподіли швидкостей уздовж екіпотенціальних ліній $\varphi_1^* = 0$, $\varphi_2^* = 0.2$, $\varphi_3^* = 0.4$, $\varphi_4^* = 0.6$, $\varphi_5^* = 0.8$, $\varphi_6^* = 0.9$, $\varphi_7^* = 1$ (див. рис. 2а).

Лінії фронту конвективного переносу в моменти часу $t_1^* = 0.801$, $t_2^* = 1.605$, $t_3^* = 3.175$, $t_4^* = 7.756$, $t_5^* = 16.174$, $t_6^* = 26.430$ зображено на рис. 2б.

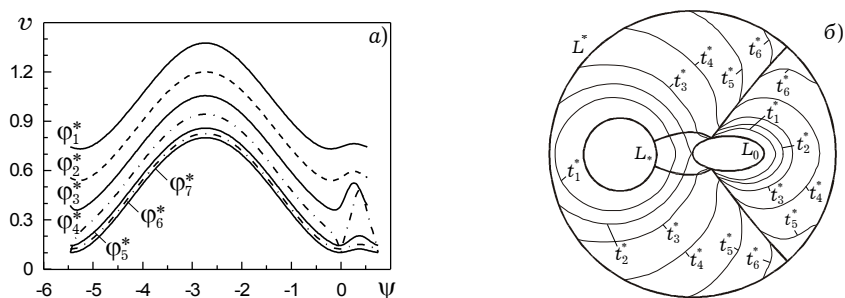


Рис. 2

Розподіли концентрації розчинної речовини при $c_0^0(\varphi, \psi) = e^{-\varphi}$, $c_*(\psi, t) = 1.5$, $\lambda = 1$ уздовж зазначених вище еквіпотенціальних ліній φ_i^* , $i = 1, \dots, 7$, у моменти часу $t = 0.491, 1.467, 5.334, 15.52$ наведено на рис. 3, звідки можемо зробити висновок, що внаслідок швидкого перемішування (осереднення) розчинної речовини та поповнення течії (на $Q_0^* - Q_*^0$) басейном, обмеженим контуром L_0 , забруднення поза цим басейном суттєво зменшується.

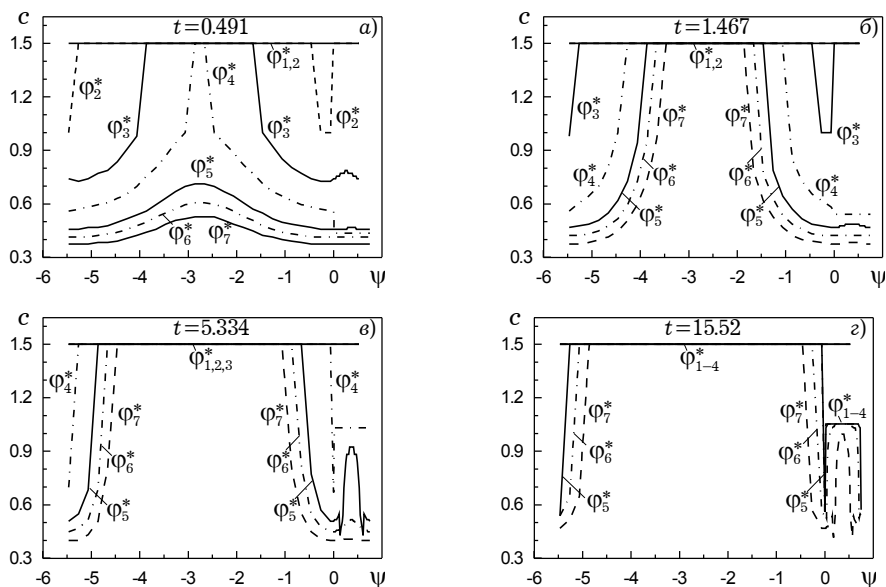


Рис. 3

Висновки і зауваження. Оскільки, як і при розв'язуванні задач типу «конвекція-фільтрація» для обмежених еквіпотенціальними лініями двозв'язних областей, проблема побудови сітки вирішується автоматично, спрощується рівняння конвективного переносу, задача зводиться до канонічної області, а розв'язок можна подати в числово-аналітичному вигляді, то перехід від прямих крайових задач на конформні відображення до обернених має перевагу при розв'язуванні таких задач для тризв'язних областей. Розроблений алгоритм дає також можливість визначати лінії (точки) розділу течії, величини відповідних їм перетоків, що істотно спрощує процес розв'язування задач конвективного переносу.

Зазначимо, що в розглянутому випадку граничні умови задаються лише на контурі L_* і невідомій ділянці $L_0^* \in L_0$, межові точки якої визнача-

ються у процесі розв'язання задачі фільтрації за умови $\oint_{L_0} -v_y dx + v_x dy > 0$.

Причому умова на L_0^* не задається явно, а залежить від надходжень розчинної речовини у відповідний басейн у заданий момент часу, тобто вона характеризується як формою області G_z , так і явно заданими початковою на G_ω^1 та граничною на $D'A'_2 = \{\omega : \varphi = \varphi_*, 0 \leq \psi \leq Q_*^0\}$ умовами.

Розроблений підхід допускає можливість урахування впливу сформованої на виході з «контура-поповнювача» L_0 речовини із запізненням [9]. У перспективі також його застосування до розв'язування задач конвективного дифузійного масопереносу у середовищах із пастками [8].

1. Бомба А. Я. Об асимптотическом методе приближенного решения одной задачи массопереноса при фильтрации в пористой среде // Укр. мат. журн. – 1982. – 34, № 4. – С. 493–496.
2. Бомба А. Я. Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків сингулярно-збурених нелінійних крайових задач типу «фільтрація-дифузія» за умов взаємовпливу градієнтів потенціалу та коефіцієнта фільтрації // Волин. мат. вісн. – 2002. – Вип. 9. – С. 12–21.
3. Бомба А. Я., Каиштан С. С. Про нелінійні обернення крайових задач на конформні відображення у многозв'язних областях // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2000. – Вип. 2. – С. 3–15.
4. Бомба А. Я., Пригорницький Д. А., Присяжнюк И. М. Решение задач типа «конвекция-фильтрация» в многосвязных областях // Компьютерная математика. – 2004. – № 1. – С. 22–30.
5. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – Москва: Высш. шк., 1990. – 208 с.
6. Лаврик В. И., Бомба А. Я., Власюк А. П. Об асимптотическом приближении решений некоторых задач массопереноса при фильтрации в неоднородной анизотропной среде. – Киев, 1985. – 17 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 85.72).
7. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967). – Москва: Наука, 1969. – 545 с.
8. Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю. Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 128 с.
9. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – Москва: Наука, 1971. – 296 с.

ЗАДАЧИ ТИПА «ФИЛЬТРАЦИЯ-КОНВЕКЦИЯ» В ТРЕХСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ УСРЕДНЕНИЯ

Получены решения класса задач типа «фильтрация-конвекция» в трехсвязной области, ограниченной эквипотенциальными линиями, в случае, когда на участке выхода течения из одного из внутренних контуров – составных ее границы, задается условие усреднения. В основе их построения – идея «конформного перехода» от данной области с разрезом вдоль одной из линий раздела течения к соответствующей области комплексного потенциала. Приведены результаты числовых расчетов по полученным формулам.

PROBLEMS OF «CONVECTION-FILTRATION» TYPE IN THREE-COHERENT DOMAINS WITH BOUNDARY CONDITIONS OF AVERAGING

The solutions to one class of problems of «filtration-convection» type in three-coherent domain, bounded by equipotential lines are obtained in the case, when the averaging condition is given on the unknown part of the flow output from one of internal contours – its compound border. The idea of conform transition from the given domain with a cross-section along one of the lines of flow to the appropriate domain of complex potential is in the basis of their construction. The results of numerical calculations are given.

Рівн. держ. гуманіт. ун-т, Рівне

Одержано
30.04.04