

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ТРУБАМ С ПРИСТЕНОЧНЫМИ ВИНТОВЫМИ ВСТАВКАМИ МЕТОДОМ R-ФУНКЦИЙ

*Построены математические модели движения вязкой несжимаемой жидкости по цилиндрическим трубам с винтовыми вставками, расположенными по периметру канала. Для ламинарного течения трехмерная задача сведена к двумерной и исследовано влияние параметра закрутки на формирование профиля скорости.*

В работах [2, 7] отмечается, что скрученные трубы являются простым и удобным средством, позволяющим придать потоку жидкости вращательное движение, а в [5] построены соответствующие математические модели движения вязкой несжимаемой жидкости. Однако придать потоку жидкости вращательное движение можно также, например, различными винтовыми вставками в цилиндрический канал (рис. 1).



Рис. 1

Целью данной работы является построение математических моделей движения несжимаемой вязкой жидкости по цилиндрическим каналам с расположенными по периметру винтовыми вставками и исследование влияния параметра закрутки на распределение скорости и ее тангенциальной компоненты.

Рассмотрим бесконечный круглый цилиндр с образующими, параллельными оси  $Oz$ , нормализованное уравнение которого имеет вид  $\omega_1(x, y) \equiv \frac{1}{2R}(R^2 - x^2 - y^2) = 0$ ,  $\frac{\partial \omega_1}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega_1} = 1$ , и вставки, параллельные оси

$Oz$ , нормализованные уравнения  $\omega_2(x, y) \equiv \sqrt{f^2 \vee_0 \bar{\varphi}} = 0$ ,  $\frac{\partial \omega_2}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega_2} = 1$  кото-

рых могут быть построены с помощью  $R$ -функций [4, 6]. После подстановки

$\begin{cases} x \leftarrow x \cos \alpha z + y \sin \alpha z, \\ y \leftarrow -x \sin \alpha z + y \cos \alpha z \end{cases}$  в уравнение  $\omega(x, y) = \omega_1 \wedge_0 \omega_2 = 0$  получим

уравнение  $\omega(x \cos \alpha z + y \sin \alpha z, -x \sin \alpha z + y \cos \alpha z) = 0$  бесконечного кругового цилиндра со вставленными винтовыми поверхностями (рис. 1) с шагом

$H = \frac{2\pi}{\alpha}$ . Легко убедиться, что уравнение  $\omega_n(x, y, z) \equiv \frac{\omega(\hat{x}, \hat{y})}{\sqrt{1 + \alpha^2 \left( \hat{y} \frac{\partial \omega}{\partial \hat{x}} - \hat{x} \frac{\partial \omega}{\partial \hat{y}} \right)^2}} = 0$

является нормализованным в трехмерном пространстве, где

$$\hat{x} = x \cos \alpha z + y \sin \alpha z,$$

$$\hat{y} = -x \sin \alpha z + y \cos \alpha z.$$

Рассмотрим неортогональные криволинейные координаты, связанные с декартовыми соотношениями [5]

$$\begin{aligned}
x &= \hat{x} \cos \alpha z - \hat{y} \sin \alpha z, \\
y &= \hat{x} \sin \alpha z + \hat{y} \cos \alpha z, \\
\hat{z} &= z
\end{aligned} \tag{1}$$

и с координатными поверхностями  $\hat{x} = \text{const}$ ,  $\hat{y} = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$ , имеющими вид, приведенный на рис. 2.

В работе [5] с помощью аппарата тензорного анализа выписаны ковариантные и контравариантные составляющие метрического тензора

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha \hat{y} \\ 0 & 1 & \alpha \hat{x} \\ -\alpha \hat{y} & \alpha \hat{x} & \alpha^2 \hat{x}^2 + \alpha^2 \hat{y}^2 + 1 \end{bmatrix},$$

$$g^{ik} = \begin{bmatrix} 1 + \alpha^2 \hat{y}^2 & -\alpha^2 \hat{x} \hat{y} & \alpha \hat{y} \\ -\alpha^2 \hat{x} \hat{y} & 1 + \alpha^2 \hat{x}^2 & -\alpha \hat{x} \\ \alpha \hat{y} & -\alpha \hat{x} & 1 \end{bmatrix},$$

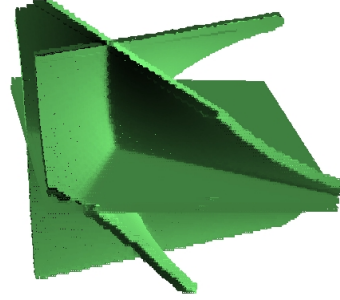


Рис. 2

а также отличные от нуля символы Кристоффеля первого и второго рода

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,23} &= \Gamma_{1,32} = -\alpha, & \Gamma_{1,33} &= -\alpha^2 \hat{x}, & \Gamma_{2,13} &= \Gamma_{2,31} = \alpha, \\
\Gamma_{2,33} &= -\alpha^2 \hat{y}, & \Gamma_{3,13} &= \Gamma_{3,31} = \alpha^2 \hat{x}, & \Gamma_{3,23} &= \Gamma_{3,32} = \alpha^2 \hat{y}, \\
\Gamma_{23}^1 &= \Gamma_{32}^1 = -\alpha, & \Gamma_{33}^1 &= -\alpha^2 \hat{x}, & \Gamma_{13}^2 &= \Gamma_{31}^2 = \alpha, & \Gamma_{33}^2 &= -\alpha^2 \hat{y}.
\end{aligned}$$

Это позволило в неортогональных криволинейных координатах (1) получить уравнения Навье – Стокса и неразрывности движения [5]:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{V}\nabla)V^1 - 2\alpha V^2 \frac{V^3}{\sqrt{f}} - \alpha^2 \hat{x} \frac{(V^3)^2}{f} &= \text{Eu} \left( -(1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial p}{\partial \hat{x}} + \alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial p}{\partial \hat{y}} - \alpha \hat{y} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \\
&+ \frac{1}{\text{Re}} \left[ \Delta V^1 - 2\alpha^2 \left( \hat{y} \frac{\partial V^2}{\partial \hat{x}} - \hat{x} \frac{\partial V^2}{\partial \hat{y}} \right) - 2\alpha \left( \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial V^2}{\partial z} \right) - \alpha^2 V^1 + 2 \frac{\alpha^3 \hat{y} V^3}{f^{3/2}} \right], \\
(\mathbf{V}\nabla)V^2 + 2\alpha V^1 \frac{V^3}{\sqrt{f}} - \alpha^2 \hat{y} \frac{(V^3)^2}{f} &= \text{Eu} \left( \alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial p}{\partial \hat{x}} - (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial p}{\partial \hat{y}} + \alpha \hat{x} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \\
&+ \frac{1}{\text{Re}} \left[ \Delta V^2 + 2\alpha^2 \left( \hat{y} \frac{\partial V^1}{\partial \hat{x}} - \hat{x} \frac{\partial V^1}{\partial \hat{y}} \right) + 2\alpha \left( \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial V^1}{\partial z} \right) - \alpha^2 V^2 - 2 \frac{\alpha^3 \hat{x} V^3}{f^{3/2}} \right], \\
(\mathbf{V}\nabla)V^3 - \frac{\alpha^2 V^3}{f} (\hat{x} V^1 + \hat{y} V^2) &= \text{Eu} \sqrt{f} \left( -\alpha \hat{y} \frac{\partial p}{\partial \hat{x}} + \alpha \hat{x} \frac{\partial p}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \\
&+ \frac{1}{\text{Re}} \left[ \Delta V^3 - 2\alpha^2 \frac{1}{f} \left( \hat{x} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{x}} + \hat{y} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{y}} \right) - \frac{1}{f^2} \alpha^2 (2 - \alpha^2 \hat{x}^2 - \alpha^2 \hat{y}^2) V^3 \right], \tag{2}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
f &= 1 + \alpha^2 \hat{x}^2 + \alpha^2 \hat{y}^2, & (\mathbf{V}\nabla)u &= V^1 \frac{\partial u}{\partial \hat{x}} + V^2 \frac{\partial u}{\partial \hat{y}} + \frac{V^3}{\sqrt{f}} \frac{\partial u}{\partial z}, \\
\Delta u &= (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \hat{x}^2} + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial^2 u}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \\
&+ 2\alpha \hat{y} \frac{\partial^2 u}{\partial \hat{x} \partial z} - 2\alpha \hat{x} \frac{\partial^2 u}{\partial \hat{y} \partial z} - \alpha^2 \left( \hat{x} \frac{\partial u}{\partial \hat{x}} + \hat{y} \frac{\partial u}{\partial \hat{y}} \right).
\end{aligned}$$

Граничные условия формулируются как условия прилипания частиц жидкости к твердой стенке. Это означает отсутствие как нормальной к твердой поверхности относительной скорости между частицами жидкости и близлежащими точками поверхности, так и касательных составляющих относительной скорости, т. е. отсутствие скорости скольжения жидкости по поверхности. Таким образом,

$$\mathbf{V}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3)$$

Уравнение неразрывности движения имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V^1}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial V^2}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial V^3}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

По известному распределению скоростей распределение давления в жидкости может быть найдено путем решения уравнения типа Пуассона [5]

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\rho} \Delta p = & \left( \frac{\partial V^2}{\partial \hat{x}} + \alpha \frac{V^3}{\sqrt{f}} \right) \left( \frac{\partial V^1}{\partial \hat{y}} - \alpha \frac{V^3}{\sqrt{f}} \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{x}} - \frac{\alpha^2 \hat{x} V^3}{f^{3/2}} \right) \left( \frac{\partial V^1}{\partial z} - \right. \\ & \left. - \alpha V^2 - \alpha^2 \hat{x} \frac{V^3}{\sqrt{f}} \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{y}} - \frac{\alpha^2 \hat{y} V^3}{f^{3/2}} \right) \left( \frac{\partial V^2}{\partial z} + \alpha V^1 - \alpha^2 \hat{y} \frac{V^3}{\sqrt{f}} \right) - \\ & - \frac{\partial V^1}{\partial \hat{x}} \frac{\partial V^2}{\partial \hat{y}} - \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial V^2}{\partial \hat{y}} \frac{\partial V^3}{\partial z} - \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial V^1}{\partial \hat{x}} \frac{\partial V^3}{\partial z} \end{aligned} \quad (5)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial n}|_{\partial\Omega} = & (\nabla p \cdot \nabla \omega)|_{\partial\Omega} = \\ = & \mu \left[ \Delta V^1 - 2\alpha^2 \left( \hat{y} \frac{\partial V^2}{\partial \hat{x}} - \hat{x} \frac{\partial V^2}{\partial \hat{y}} \right) - 2\alpha \left( \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial V^2}{\partial z} \right) \right] \frac{\partial \omega}{\partial \hat{x}} + \\ + & \mu \left[ \Delta V^2 + 2\alpha^2 \left( \hat{y} \frac{\partial V^1}{\partial \hat{x}} - \hat{x} \frac{\partial V^1}{\partial \hat{y}} \right) + 2\alpha \left( \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial V^1}{\partial z} \right) \right] \frac{\partial \omega}{\partial \hat{y}} + \\ + & \mu \left[ \Delta V^3 - \frac{2\alpha^2}{f} \left( \hat{x} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{x}} + \hat{y} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{y}} \right) \right] \frac{\partial \omega}{\partial z}. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим один из наиболее простых случаев движения несжимаемой вязкой жидкости – ламинарное движение. Тогда для цилиндрического канала с винтовыми вставками в криволинейных неортогональных координатах (1) можно положить  $V^1 = 0$ ,  $V^2 = 0$ . Из уравнения неразрывности движения получаем  $\frac{\partial V^3}{\partial z} = 0$ . Следовательно,  $V^3 = V^3(\hat{x}, \hat{y})$ . Тогда (2) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{Re} \operatorname{Eu}} \left[ 2\alpha \left( \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{y}} \right) - 2 \frac{\alpha^3 \hat{y} V^3}{f^{3/2}} \right] - \alpha^2 \hat{x} \frac{(V^3)^2}{f} + \alpha \hat{y} \frac{\partial p}{\partial z} = \\ = - (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial p}{\partial \hat{x}} + \alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial p}{\partial \hat{y}}, \\ \frac{1}{\operatorname{Re} \operatorname{Eu}} \left[ -2\alpha \left( \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{x}} \right) + 2 \frac{\alpha^3 \hat{x} V^3}{f^{3/2}} \right] - \alpha^2 \hat{y} \frac{(V^3)^2}{f} - \alpha \hat{x} \frac{\partial p}{\partial z} = \\ = \alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial p}{\partial \hat{x}} - (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial p}{\partial \hat{y}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Re Eu}} \left[ \Delta V^3 - \frac{2\alpha^2}{f} \left( \hat{x} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{x}} + \hat{y} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{y}} \right) - \frac{\alpha^2(2 - \alpha^2 \hat{x}^2 - \alpha^2 \hat{y}^2)}{f^2} V^3 \right] = \\ & = \sqrt{f} \left( -\alpha \hat{y} \frac{\partial p}{\partial \hat{x}} + \alpha \hat{x} \frac{\partial p}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial p}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} -\alpha \hat{y} \frac{\partial p}{\partial \hat{x}} + \alpha \hat{x} \frac{\partial p}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{1}{\text{Re Eu}} \left[ \frac{2\alpha^2}{f^{3/2}} \left( x \frac{\partial V^3}{\partial x} + y \frac{\partial V^3}{\partial y} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{2\alpha^4 V^3}{f^{5/2}} (x^2 + y^2) \right] - \frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta V^3 - \frac{\alpha^2(2 + \alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2)}{f^2} V^3 &= \frac{1}{\mu \sqrt{f}} \frac{\partial p}{\partial z}, \\ V^3|_{\partial \Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\rho} \Delta p &= -\alpha^2 \frac{(V^3)^2}{f} - \alpha^2 \hat{x} V^3 \left( \frac{1}{f} \frac{\partial V^3}{\partial x} - \frac{\alpha^2 x V^3}{f^2} \right) - \alpha^2 \hat{y} V^3 \left( \frac{1}{f} \frac{\partial V^3}{\partial y} - \frac{\alpha^2 y V^3}{f^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial n}|_{\partial \Omega} &= \frac{2\alpha\mu}{\sqrt{f}} \left[ -\frac{\partial V^3}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial V^3}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial \hat{y}} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\Delta u = (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \hat{x}^2} + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \hat{y}^2} - 2\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial^2 u}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} - \alpha^2 \left( \hat{x} \frac{\partial u}{\partial \hat{x}} + \hat{y} \frac{\partial u}{\partial \hat{y}} \right)$ .

Таким образом, от трехмерных краевых задач (2), (3) и (5), (6) перешли к двумерным задачам (7), (8), для решения которых может быть применен метод Ритца на основе теории  $R$ -функций [3, 4]. Положительная определенность операторов задач (7), (8) доказана в [1].

Рассмотрим сечения каналов, изображенные на рис. 3. Структура решения задачи (7) имеет вид  $V^3 = V = \omega \Phi$ , где  $\omega \equiv \frac{R^2 - \hat{x}^2 - \hat{y}^2}{2R} \wedge_0 \omega_2 = 0$ . Заметим, что на рис. 3а (две винтовые вставки)  $\omega_2 \equiv \sqrt{\hat{x}^2 \vee_0} \frac{1}{2r} (r^2 - \hat{x}^2 - \hat{y}^2) = 0$ , а на рис. 3б (четыре винтовые вставки)  $\omega_2 \equiv \omega_{21} \wedge_0 \omega_{22} = 0$ , где

$$\omega_{21} \equiv \sqrt{\hat{x}^2 \vee_0} \frac{1}{2r} (r^2 - \hat{x}^2 - \hat{y}^2), \quad \omega_{22} \equiv \sqrt{\hat{y}^2 \vee_0} \frac{1}{2r} (r^2 - \hat{x}^2 - \hat{y}^2).$$



Рис. 3

Здесь следует отметить, что предварительные исследования функции  $\omega$  показали что предпочтительнее применять операцию отсечки

$\omega_i = \sqrt{\frac{1}{4} \left( \sqrt{f_i^4 + \varphi_i^2} - \varphi_i \right)^2 + f_i^2}$ , обеспечивающую нормализованность функции  $\omega_i$  в обобщенном смысле, а не  $\omega_i = \sqrt{f_i^2 \vee_0 \overline{\varphi_i}}$ .

Функционал, эквивалентный краевой задаче (7), имеет вид [3]

$$I = \int_{\Omega} \left[ (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \left( \frac{\partial V}{\partial \hat{x}} \right)^2 + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \left( \frac{\partial V}{\partial \hat{y}} \right)^2 - 2\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial V}{\partial \hat{x}} \frac{\partial V}{\partial \hat{y}} + CV^2 - 2FV \right] d\hat{x} d\hat{y},$$

где  $C = \frac{\alpha^2(2 + \alpha^2 \hat{x}^2 + \alpha^2 \hat{y}^2)}{f^2}$ ,  $F = \frac{1}{\mu \sqrt{f}} \frac{\partial p}{\partial z}$ .

В качестве аппроксимационных средств использовались кубические сплайны с разбиением  $40 \times 40$ . Результаты расчетов для двух и четырех винтовых вставок приведены соответственно на рис. 4–6 и на рис. 7–9.

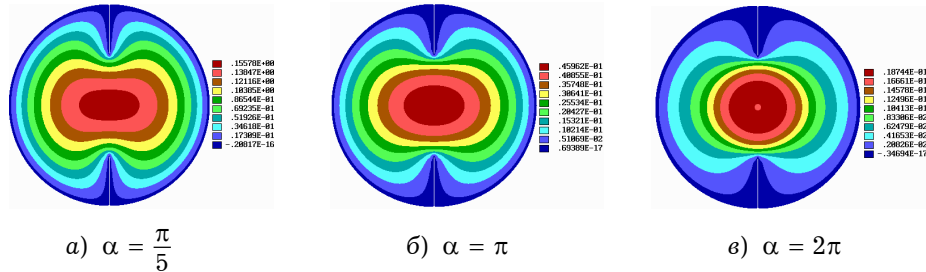


Рис. 4

На рис. 4 приведена картина формирования профиля скорости при значениях параметра закрутки  $\alpha = \frac{\pi}{5}, \pi, 2\pi$ .

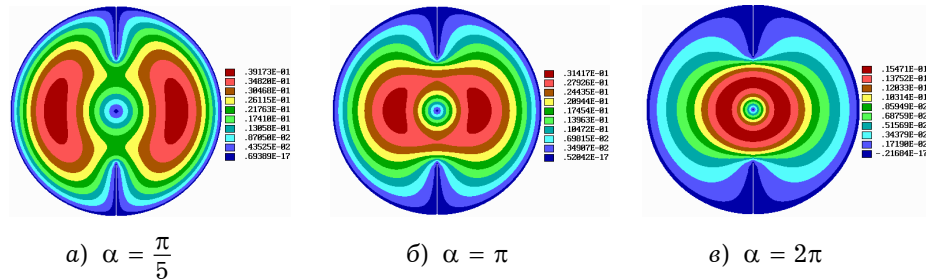


Рис. 5

Рис. 5 иллюстрирует картину распределения тангенциальной компоненты вектора скорости при значениях параметра закрутки  $\alpha = \frac{\pi}{5}, \pi, 2\pi$ .

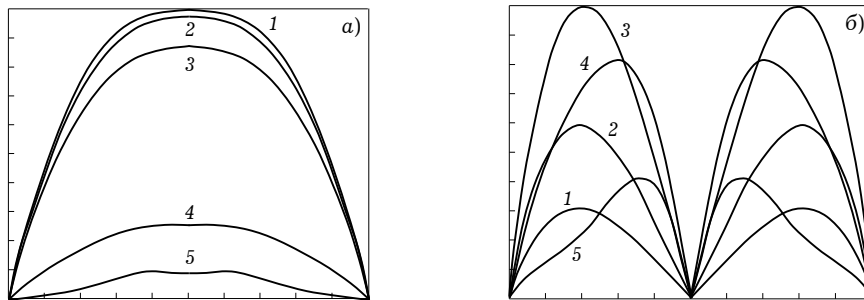


Рис. 6

Графики формирования профиля скорости в сечении  $y = x$  приведены на рис. 6а (продольная компонента вектора скорости в криволинейных неортогональных координатах) и рис. 6б (тангенциальная компонента вектора скорости). Кривые 1–5 соответствуют значениям параметра закрутки  $\alpha = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \pi, 2\pi$ .

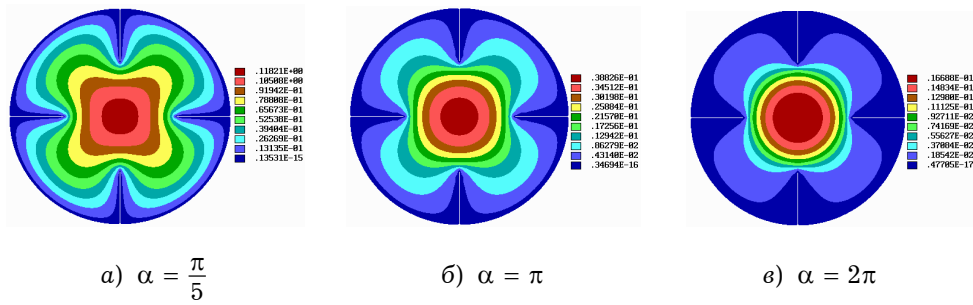


Рис. 7

На рис. 7 изображена картина формирования профиля скорости при значениях параметра закрутки  $\alpha = \frac{\pi}{5}, \pi, 2\pi$ .

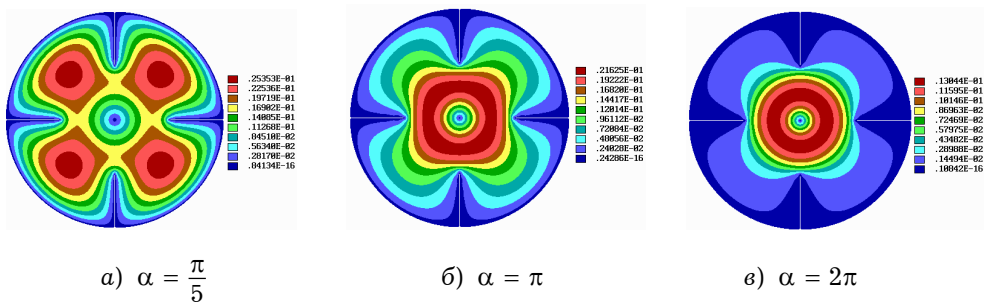


Рис. 8

Рис. 8 иллюстрирует картину распределения тангенциальной компоненты вектора скорости при значениях параметра закрутки  $\alpha = \frac{\pi}{5}, \pi, 2\pi$ .

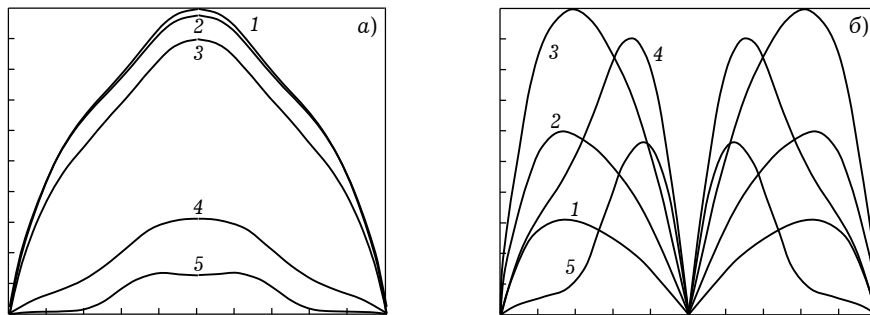


Рис. 9

Графики формирования профиля скорости в сечении  $y = x$  приведены на рис. 9а (продольная компонента вектора скорости в криволинейных не-ортогональных координатах) и рис. 9б (тангенциальная компонента вектора скорости). Кривые 1–5 соответствуют значениям параметра закрутки  $\alpha = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \pi, 2\pi$ .

В результате проведенного вычислительного эксперимента можно сделать вывод, что и для двух винтовых вставок и для четырех радиальная компонента вектора скорости равна нулю, а тангенциальная компонента вектора скорости принимает максимальное значение при  $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

Вычислительные эксперименты проводились в условиях эксплуатации ориентированных на применение метода  $R$ -функций систем *ПОЛЕ*, разработанной в Институте проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины под руководством академика НАН Украины В. Л. Рвачева, и *SAGE*, разработанной в Висконсинском университете под руководством проф. В. Шапиро, а визуализация поверхностей в  $3D$  – с помощью системы *РАНОК*, разработанной в Запорожском государственном университете под руководством доцента А. В. Толока.

1. *Максименко-Шейко К. В.* Математическое моделирование физико-механических полей с винтовым типом симметрии методом  $R$ -функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.05.02. – Харьков, 2003. – 166 с.
2. *Максименко-Шейко К. В., Рвачев В. Л., Шейко Т. И.* Математические модели физических полей в скрученных цилиндрах произвольного сечения // Вісн. Запорізь. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2001. – № 1. – С. 54–60.
3. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
4. *Рвачев В. Л.* Теория  $R$ -функций и некоторые её приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
5. *Рвачев В. Л., Максименко-Шейко К. В.* Математические модели движения несжимаемой вязкой жидкости по скрученным трубам // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 2. – С. 81–88.
6. *Рвачев В. Л., Толок А. В., Уваров Р. А., Шейко Т. И.* Новые подходы к построению уравнений трехмерных локусов с помощью  $R$ -функций // Вісн. Запорізь. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2000. – № 2. – С. 119–130.
7. *Халатов А. А., Авраменко А. А., Шевчук И. В.* Закрученные потоки. – К.: Ин-т техн. теплофизики НАН Украины, 2000. – 474 с. – Теплообмен и гидродинамика в полях центробежных массовых сил: В 4 т. – Т. 3.

**МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ НЕСТИСЛИВОЇ  
В'ЯЗКОЇ РІДИНИ В ЦИЛІНДРИЧНИХ ТРУБАХ  
ІЗ ПРИСТІНКОВИМИ ГВИНТОВИМИ ВСТАВКАМИ МЕТОДОМ  $R$ -ФУНКЦІЙ**

*Побудовано математичні моделі руху в'язкої нестисливої рідини в циліндричних трубах з гвинтовими вставками, які розміщені по периметру каналу. Для ламінарної течії тривимірну задачу зведено до двовимірної та досліджено вплив параметра закрутки на формування профілю швидкості.*

**MATHEMATICAL MODELLING AND SIMULATION OF INCOMPRESSIBLE  
VISCIOUS LIQUID MOTION IN CYLINDRICAL TUBES  
HAVING PERIMETER HELICAL INSERTS BY THE  $R$ -FUNCTION METHOD**

*In the paper the mathematical models of incompressible viscous liquid motion in the cylindrical tubes having perimeter helical inserts are developed. For laminar motion the 3D problem is reduced to 2D. The influence of twisting parameter on the velocity profile formation is investigated.*

Ин-т проблем машиностроения  
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Получено  
25.03.04