

## ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТЕПЛООВОГО НАВАНТАЖЕННЯ І ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ ШАРУ ЗА ПОВЕРХНЕВИМИ ДЕФОРМАЦІЯМИ

*Сформульовано та розв'язано задачу ідентифікації закону зміни в часі температури однієї з граничних поверхонь шару, його теплового та термонапруженого станів за температурою та температурними деформаціями, відомими на іншій граничній поверхні. Досліджено коректність оберненої задачі термопружності, до якої зведено вихідну задачу. З використанням розв'язку прямої задачі термопружності для шару проведено чисельну апробацію методики розв'язання задачі ідентифікації.*

Дослідження теплового та термонапруженого станів деталей працюючого теплоенергообладнання часто ускладнюється тим, що з огляду на конструктивні чи технологічні причини теплове навантаження деталі можна визначити (заміряти) лише на частині її граничної поверхні [9, 11]. Внаслідок цього відповідні задачі теплопровідності та термопружності є недоозначеними. Якщо вихідну задачу теплопровідності доозначити інформацією про поведінку параметрів теплового процесу (температури, теплового потоку) в деякій точці деталі, то визначення невідомого теплового навантаження можна звести до оберненої задачі теплопровідності [9–11,13]. Слід зазначити, що отримані при цьому обернені задачі є некоректними [6]. Якщо ж задачу теплопровідності доозначити інформацією про поведінку параметрів механічного процесу (переміщень, деформацій, напружень), то отримаємо обернену задачу термопружності [2, 7, 8, 12, 14, 15].

Ця робота присвячена дослідженню оберненої задачі термопружності, до якої зводиться задача про визначення закону зміни в часі температури однієї з граничних поверхонь шару, його температурного поля і термонапруженого стану, коли додатково відомо поведінку в часі температурних деформацій іншої граничної поверхні.

**1. Постановка задачі.** Розглянемо вільний від зовнішнього силового навантаження ізотропний однорідний шар товщини  $h$ , віднесений до декартової системи координат  $Oxyz$ . Вважаємо, що нестационарне температурне поле в шарі одновимірне та змінюється лише за товщиною  $z \in [0, h]$ . Необхідно визначити закон зміни в часі температури однієї з граничних поверхонь шару, його температурне поле та термонапружений стан, якщо відомою є зміна в часі температури та температурних деформацій іншої граничної поверхні. На основі зроблених припущень сформульовану задачу можна звести до наступної: знайти температурне поле в шарі  $T(\rho, \tau)$ , яке задовольняє рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T(\rho, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T(\rho, \tau)}{\partial \rho^2}, \quad \rho \in (0, 1), \quad \tau > 0, \quad (1)$$

граничні

$$T(1, \tau) = t_1(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (2)$$

$$\varepsilon(1, \tau) = \varphi(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (3)$$

та початкову

$$T(\rho, 0) = f(\rho) \quad (4)$$

умови, де  $\rho$  – безрозмірна просторова координата;  $h\rho = z$ ;  $\tau = a\tau_*/h^2$  – безрозмірний час;  $\tau_*$  – час;  $a$  – коефіцієнт температуропровідності;  $t_1(\tau)$  – задана функція зміни в часі температури поверхні  $\rho = 1$ ;  $\varepsilon(1, \tau) = \varepsilon_{xx}(1, \tau) =$

$= \varepsilon_{yy}(1, \tau)$  – температурні деформації (видовження) поверхні  $\rho = 1$  відповідно у напрямку осей  $Ox$  і  $Oy$ , віднесені до величини коефіцієнта лінійного теплового розширення  $\alpha_T$ ;  $\varphi(\tau)$  – задана функція зміни в часі температурних деформацій  $\varepsilon(1, \tau)$ ;  $f(\rho)$  – початковий розподіл температури.

**2. Побудова розв’язку.** Покажемо, що за допомогою співвідношення (3) можна визначити температуру граничної поверхні шару  $\rho = 0$ :

$$T(0, \tau) = t_0(\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (5)$$

Якщо припустити, що функція  $t_0(\tau)$  відома і скористатися перетворенням Лапласа [4], то розв’язок задачі теплопровідності (1), (2), (4), (5) можна подати так:

$$T(\rho, \tau) = \sum_{j=0}^1 \int_0^{\tau} G_j(\rho, \tau - \eta) t_j(\eta) d\eta + \int_0^1 G(\rho, \tau, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (6)$$

де  $G(\rho, \tau, \xi)$ ,  $G_j(\rho, \eta)$ ,  $j = 0, 1$ , – відомі функції [2].

Скориставшись відомими методами інтегрування рівнянь термопружності для шару [3], відносні температурні деформації  $\varepsilon(\rho, \tau)$  запишемо у вигляді

$$\varepsilon(\rho, \tau) = \int_0^1 (1 + 3q(1 - 2\rho)(1 - 2\xi)) T(\xi, \tau) d\xi, \quad (7)$$

де  $q \in [0, 1]$  – коефіцієнт, що характеризує рівень закріплення країв шару від кута повороту.

Якщо у співвідношення (7) підставити вираз (6) для температурного поля, прийняти  $\rho = 1$  і врахувати умову (3), то для визначення функції  $t_0(\tau)$  отримаємо інтегральне рівняння Вольтера першого роду типу згортки

$$\int_0^{\tau} \mathcal{K}_0(\tau - \eta) t_0(\eta) d\eta = \varphi(\tau) - \int_0^{\tau} \mathcal{K}_1(\tau - \eta) t_1(\eta) d\eta - \int_0^1 \mathcal{K}(\tau, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0(\eta) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (1 - 3q - (-1)^n (1 + 3q)) \exp(-\pi^2 n^2 \eta), \\ \mathcal{K}_1(\eta) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (1 + 3q - (-1)^n (1 - 3q)) \exp(-\pi^2 n^2 \eta), \\ \mathcal{K}(\tau, \xi) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 3q - (-1)^n (1 + 3q)}{n} \sin \pi n \xi \exp(-\pi^2 n^2 \tau). \end{aligned}$$

Якщо у рівнянні (8) покласти  $\tau = 0$ , то отримаємо умову погодження початкової температури і заданих відносних температурних деформацій

$$\int_0^1 (1 - 3q(1 - 2\xi)) f(\xi) d\xi = \varphi(0), \quad (9)$$

виконання якої забезпечує неперервність розв’язку рівняння (8).

Застосувавши до рівняння (8) інтегральне перетворення Лапласа за змінною  $\tau$ , його розв’язок у просторі зображень подамо у вигляді

$$t_0^L(s) = \frac{\Phi(s)}{\Psi(s)}, \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi(s) = & \varphi_L(s) \frac{\text{sh} \sqrt{s}}{\sqrt{s}} - \frac{1}{s} \left( \text{ch} \sqrt{s} - 1 + 3q \left( \text{ch} \sqrt{s} + 1 - 2 \frac{\text{sh} \sqrt{s}}{\sqrt{s}} \right) \right) t_1^L(s) - \\ & - \frac{1}{2\sqrt{s}} \int_0^1 f(\xi) \left[ \left( \text{ch} \sqrt{s} - 1 + 3q \left( \text{ch} \sqrt{s} + 1 - \frac{2 \text{sh} \sqrt{s}}{\sqrt{s}} \right) \right) \frac{\text{sh} \sqrt{s} (1 - \xi)}{s} - \right. \\ & - \frac{\text{sh} \sqrt{s}}{s} \left( 2(3q(1 - 2\xi) - 1) + (1 - 3q) \text{ch} \sqrt{s} \xi + (1 + 3q) \text{ch} \sqrt{s} (1 - \xi) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{6q}{\sqrt{s}} (\text{sh} \sqrt{s} \xi - \text{sh} \sqrt{s} (1 - \xi)) \right) + \psi(s) \text{sh} \sqrt{s} \xi \right] d\xi, \\ \psi(s) = & \frac{1}{s} \left( 6q \frac{\text{sh} \sqrt{s}}{\sqrt{s}} + (1 - 3q) \text{ch} \sqrt{s} - (1 + 3q) \right), \end{aligned}$$

$\varphi_L(s)$ ,  $t_j^L(s)$ ,  $j = 0, 1$ , – зображення за Лапласом відповідно функцій  $\varphi(\tau)$ ,  $t_j(\tau)$ ,  $j = 0, 1$ ;  $s$  – параметр перетворення Лапласа.

Щоб знайти оригінал розв'язку (10), скористаємося другою теоремою розкладу та теоремою про згортку [4]. З цією метою дослідимо корені рівняння

$$\psi(s) = 0, \quad (11)$$

поведінка яких залежатиме від коефіцієнта  $q$ . Можна показати, що функція  $\psi(s)$  є цілою порядку  $1/2$ . Тому згідно з малою теоремою Пікара [5] рівняння (11) має зліченну множину коренів.

З подання функції  $\psi(s)$  у вигляді степеневого ряду

$$\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2n + 3(1 - 2n)q}{(1 + 2n)!} s^{n-1}$$

випливає, що при  $q = 1$  рівняння (11) має однократний нульовий корінь.

Чисельний аналіз рівняння (11) показує, що при  $q \in [0, 1/3)$  воно має зліченну множину комплексно-спряжених простих коренів  $s_n = \mu_n^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\mu_n = \alpha_n \pm i\beta_n$ ,  $\alpha_n, \beta_n > 0$ ,  $i^2 = -1$ , для яких справджуються нерівності  $\alpha_n < \beta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Наприклад, при  $q = 1/6$  перші чотири корені рівняння (11) є такими:  $\mu_1 = 1.65 + 6.54i$ ,  $\mu_2 = 1.73 + 12.72i$ ,  $\mu_3 = 1.75 + 18.95i$ ,  $\mu_4 = 1.75 + 25.21i$ .

Отже, при  $q \in [0, 1/3)$  розв'язок інтегрального рівняння (8) можна подати так:

$$t_0(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\tau} \mathcal{L}(\tau - \eta) \varphi(\eta) d\eta - \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\tau} \mathcal{L}_1(\tau - \eta) t_1(\eta) d\eta - \int_0^1 \mathcal{L}_2(\xi, \tau) f(\xi) d\xi, \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\eta) &= \frac{2}{1 - q} + 4 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sh} \mu_n}{\omega_n} e^{\mu_n^2 \eta}, \\ \mathcal{L}_1(\eta) &= \frac{1 + q}{1 - q} + 8 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{ch} \mu_n - 1}{\mu_n \omega_n} e^{\mu_n^2 \eta}, \\ \mathcal{L}_2(\xi, \tau) &= 4 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\mu_n^2 \tau}}{\omega_n} \left[ (1 - 3q(1 - 2\xi)) \text{sh} \mu_n - (1 - 3q) \text{sh} \mu_n (1 - \xi) - \right. \\ & \quad \left. - (1 + 3q) \text{sh} \mu_n \xi \right], \end{aligned}$$

$$\omega_n = (1 - 3q) \operatorname{sh} \mu_n + 6q \frac{\mu_n \operatorname{ch} \mu_n - \operatorname{sh} \mu_n}{\mu_n^2}.$$

Оскільки  $\alpha_n < \beta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , то експоненти, які входять у функції  $\mathcal{L}(\eta)$ ,  $\mathcal{L}_j(\eta)$ ,  $j = 1, 2$ , матимуть від'ємні аргументи. Використовуючи це, можна показати, що при  $\varphi(\tau)$ ,  $t_1(\tau) \in C[0, \infty)$ ,  $f(\tau) \in C[0, 1]$  і виконанні умови (9) знайдений за формулою (12) розв'язок  $t_0(\tau) \in C[0, \infty)$  і за нормою цього простору є стійким [6] до малих змін вказаних функцій.

При  $q \in [1/3, 1)$  рівняння (11) має один дійсний додатний і зліченну множину комплексно-спряжених коренів. Існування дійсного додатного кореня рівняння (11) означає наявність у виразах для функцій  $\mathcal{L}(\eta)$ ,  $\mathcal{L}_j(\eta)$ ,  $j = 1, 2$ , експоненти з додатним аргументом, а, отже, нестійкість розв'язку  $t_0(\tau)$  до малих змін вхідних функцій.

Побудуємо для цього випадку наближений стійкий розв'язок рівняння (8). Для цього замість рівняння (8) розглянемо  $\delta$ -регуляризоване рівняння [1, 6]

$$\begin{aligned} \delta t_0^\delta(\tau) + \int_0^\tau \mathcal{K}_0(\tau - \eta) t_0^\delta(\eta) d\eta = \varphi(\tau) - \int_0^\tau \mathcal{K}_1(\tau - \eta) t_1(\eta) d\eta - \\ - \int_0^1 \mathcal{K}(\tau, \xi) f(\xi) d\xi + \delta f(0), \quad \delta \in (-\infty, \infty). \end{aligned} \quad (13)$$

Застосувавши до рівняння (13) інтегральне перетворення Лапласа [4] за змінною  $\tau$ , його розв'язок у просторі зображень запишемо так:

$$(t_0^\delta)_L(s) = \frac{\Phi(s) + \frac{\delta f(0) \operatorname{sh} \sqrt{s}}{s \sqrt{s}}}{\Psi_\delta(s)}, \quad (14)$$

де

$$\Psi_\delta(s) = \frac{1}{s} \left( (6q + \delta s) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{s}}{\sqrt{s}} + (1 - 3q) \operatorname{ch} \sqrt{s} - (1 + 3q) \right),$$

$(t_0^\delta)_L(s)$  – зображення за Лапласом функції  $t_0^\delta(\tau)$ .

Дослідимо корені рівняння

$$\Psi_\delta(s) = 0 \quad (15)$$

і проаналізуємо можливість вибору параметра регуляризації  $\delta$  таким чином, щоб розв'язок  $t_0^\delta(\tau)$ , знайдений як оригінал зображення (14), був стійким до малих змін вхідних функцій. Зазначимо, що оскільки рівняння (13) повинно мало відрізнятися від вихідного (8), то абсолютна величина шуканого значення параметра регуляризації повинна бути мінімальною.

На основі малої теореми Пікара [5] можна показати, що рівняння (15) має зліченну множину коренів для усіх значень  $q \in [1/3, 1]$  і  $\delta \in (-\infty, \infty)$ .

З подання функції  $\Psi_\delta(s)$  у вигляді степеневого ряду

$$\Psi_\delta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{n-1}}{(2n-1)!} \left[ \frac{1}{2n} + \frac{3(1-2n)q}{2n(1+2n)} + \delta \right]$$

впливає, що рівняння (15) має нульовий корінь, якщо  $q$  і  $\delta$  пов'язані між собою рівністю  $1 - q + 2\delta = 0$ . При  $q \in [1/3, 1]$  отримана рівність справджується, якщо  $\delta \in [-1/3, 0]$ .

Як показує чисельний аналіз коренів рівняння (15), для кожного значення коефіцієнта  $q \in [1/3, 1]$  існують такі значення  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2$  ( $\delta_1 = -(1-q)/2$ ,  $\delta_2 > 0$ ,  $\delta_1 < \delta_2$ ), параметра  $\delta$ , які розбивають інтервал  $(-\infty, \infty)$  на три частини.

Якщо  $\delta \in (-\infty, \delta_1]$ , то рівняння (15) має один нульовий (при  $\delta = \delta_1$ ), скінченну множину комплексно-спряжених  $s_n = \mu_n^2$ ,  $n = 1, 2, \dots, m$  ( $\mu_n = \alpha_n \pm i\beta_n$ ,  $\alpha_n, \beta_n > 0$ ), і зліченну множину дійсних від'ємних  $s_n = -\lambda_n^2$ ,  $\lambda_n > 0$ ,  $n = m+1, m+2, \dots$ , коренів. На інтервалі  $(-\infty, \delta_1]$  існує таке значення  $\delta_1^*$  ( $\delta_1^* < \delta_1$ ), що при  $\delta \leq \delta_1^*$  всі корені рівняння (15) є лише дійсними від'ємними ( $m = 0$ ). При  $\delta \in (\delta_1^*, \delta_1]$  для усіх комплексних коренів справджуються нерівності  $\alpha_n < \beta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, m$ . Тобто при  $q \in [1/3, 1]$  і  $\delta \in (-\infty, \delta_1]$  розв'язок рівняння (13) є стійким до малих змін вхідних функцій. При  $q = 1$  вихідна задача є коректною, оскільки  $\delta_1 = 0$ . При  $\delta = \delta_1$  розв'язок інтегрального рівняння (13) можна подати так:

$$t_0^{\delta_1}(\tau) = \delta_1 f(0) \mathcal{L}_{\delta_1}(\tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \mathcal{L}_{\delta_1}(\tau - \eta) \varphi(\eta) d\eta - \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \mathcal{L}_1^{\delta_1}(\tau - \eta) t_1(\eta) d\eta - \int_0^1 \mathcal{L}_2^{\delta_1}(\xi, \tau) f(\xi) d\xi, \quad (16)$$

де

$$\mathcal{L}_{\delta_1}(\tau) = \frac{20(q-1)}{7(q-5)^2} + \frac{120}{q-5} \tau + 4 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^m \frac{\operatorname{sh} \mu_n}{\omega(\mu_n)} e^{\mu_n^2 \tau} - 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n}{\omega(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \tau},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{\delta_1}(\tau) &= \frac{3q^2 - 200q - 35}{7(q-5)^2} + \frac{60(q+1)}{q-5} \tau + \\ &+ 4 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^m \frac{2(\operatorname{ch} \mu_n - 1) + \delta_1 \mu_n \operatorname{sh} \mu_n}{\mu_n \omega(\mu_n)} e^{\mu_n^2 \tau} - \\ &- 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2(\cos \lambda_n - 1) - \delta_1 \lambda_n \sin \lambda_n}{\lambda_n \omega(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \tau}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^{\delta_1}(\tau) &= \frac{30}{q-5} [(1+q)(1-\xi) + (1-q)\xi - (1-3q)\xi^2 - (1+3q)(1-\xi)^2 - \\ &- 2q(\xi^3 - (1-\xi)^3)] + 4 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^m \frac{e^{\mu_n^2 \tau}}{\omega(\mu_n)} [(1-3q(1-2\xi)) \operatorname{sh} \mu_n - \\ &- (1-3q) \operatorname{sh} \mu_n (1-\xi) - (1+3q) \operatorname{sh} \mu_n \xi] - \\ &- 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \tau}}{\omega(\lambda_n)} [(1-3q(1-2\xi)) \sin \lambda_n - \\ &- (1-3q) \sin \lambda_n (1-\xi) - (1+3q) \sin \lambda_n \xi], \end{aligned}$$

$$\omega(\mu_n) = \left( 6q - \frac{\mu_n^2(1-q)}{2} \right) \frac{\mu_n \operatorname{ch} \mu_n - \operatorname{sh} \mu_n}{\mu_n^2} - 2q \operatorname{sh} \mu_n,$$

$$\omega(\lambda_n) = \left( 6q + \frac{\lambda_n^2(1-q)}{2} \right) \frac{\lambda_n \cos \lambda_n - \sin \lambda_n}{\lambda_n^2} + 2q \sin \lambda_n.$$

Якщо  $\delta \in (\delta_1, \delta_2]$ , то рівняння (15), крім комплексно-спряжених і дійсних від'ємних коренів, має при  $\delta \leq 0$  один, а при  $0 < \delta \leq \delta_2$  – два дійсні додатні корені  $s_n = \gamma_n^2$ ,  $n = 1, 2$ , де  $\gamma_n > 0$ . Тобто у цьому випадку розв'язок рівняння (13) є нестійким.

Якщо  $\delta \in (\delta_2, +\infty)$ , то рівняння (15) має скінченну множину комплексно-спряжених  $s_n = \mu_n^2$ ,  $n = 1, 2, \dots, p$ , і зліченну множину дійсних від'ємних  $s_n = -\lambda_n^2$ ,  $n = p+1, p+2, \dots$ , коренів. При  $\delta = \delta_2$  корені  $\gamma_1^2$  і  $\gamma_2^2$  співпадають (дійсний додатний корінь стає двократним) і переходять в один із комплексно-спряжених коренів  $\mu_\ell^2$ ,  $1 \leq \ell \leq p$ . При  $q \geq 0.42$  дійсний двократний корінь завжди переходить у перший комплексно-спряжений корінь  $\mu_1^2$ . Починаючи з деякого  $\delta_2^*$ ,  $\delta_2^* > \delta_2$ , усі корені рівняння (15) є дійсними від'ємними ( $p = 0$ ). Для комплексного кореня  $s_\ell = \mu_\ell^2$  рівняння (15) існує таке значення параметра регуляризації  $\delta = \delta_3$ , що при  $\delta \in (\delta_2, \delta_3]$  справджується нерівність  $\alpha_\ell \geq \beta_\ell$ , а при  $\delta \in (\delta_3, \delta_2^*]$  – нерівність  $\alpha_\ell < \beta_\ell$ . Звідси випливає, що розв'язок рівняння (13) у цьому випадку буде стійким при  $\delta \in (\delta_3, +\infty)$  і матиме вигляд

$$t_0^\delta(\tau) = \delta f(0)\mathcal{L}_\delta(\tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \mathcal{L}_\delta(\tau - \eta) \varphi(\eta) d\eta - \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \mathcal{L}_1^\delta(\tau - \eta) t_1(\eta) d\eta - \int_0^1 \mathcal{L}_2^\delta(\xi, \tau) f(\xi) d\xi, \quad (17)$$

$$\mathcal{L}_\delta(\eta) = \frac{2}{1 - q + 2\delta} + 4 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^p \frac{\operatorname{sh} \mu_n}{\omega_\delta(\mu_n)} e^{\mu_n^2 \eta} + 2 \sum_{n=p+1}^\infty \frac{\sin \lambda_n}{\omega_\delta(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \eta},$$

$$\mathcal{L}_1^\delta(\eta) = \frac{1 + q}{1 - q + 2\delta} + 4 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^p \frac{2(\operatorname{ch} \mu_n - 1) + \delta \mu_n \operatorname{sh} \mu_n}{\mu_n \omega_\delta(\mu_n)} e^{\mu_n^2 \eta} + 2 \sum_{n=p+1}^\infty \frac{2(\cos \lambda_n - 1) - \delta \lambda_n \sin \lambda_n}{\lambda_n \omega_\delta(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \eta},$$

$$\mathcal{L}_2^\delta(\xi, \tau) = 4 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^p \frac{e^{\mu_n^2 \tau}}{\omega_\delta(\mu_n)} [(1 - 3q(1 - 2\xi)) \operatorname{sh} \mu_n - (1 - 3q) \operatorname{sh} \mu_n (1 - \xi) - (1 + 3q) \operatorname{sh} \mu_n \xi] + 2 \sum_{n=p+1}^\infty \frac{e^{-\lambda_n^2 \tau}}{\omega_\delta(\lambda_n)} [(1 - 3q(1 - 2\xi)) \sin \lambda_n - (1 - 3q) \sin \lambda_n (1 - \xi) - (1 + 3q) \sin \lambda_n \xi],$$

$$\omega_\delta(\mu_n) = (1 - 3q + 2\delta) \operatorname{sh} \mu_n + (6q + \delta \mu_n^2) \frac{\mu_n \operatorname{ch} \mu_n - \operatorname{sh} \mu_n}{\mu_n^2},$$

$$\omega_\delta(\lambda_n) = (1 - 3q + 2\delta) \sin \lambda_n - (6q - \delta \lambda_n^2) \frac{\lambda_n \cos \lambda_n - \sin \lambda_n}{\lambda_n^2}.$$

Поведінку величин  $\gamma_n > 0$ ,  $n = 1, 2$ ;  $\lambda_n > 0$ ,  $n = 1 \div 5$ ;  $\alpha_n, \beta_n > 0$ ,  $n = 1 \div 3$ , відповідно для дійсних додатних  $\gamma_n^2$ , дійсних від'ємних  $-\lambda_n^2$  та

комплексних  $\mu_n^2 = (\alpha_n \pm i\beta_n)^2$  коренів при  $q = 0.7$  і  $\delta \in [-1, 1]$  подано на рис. 1. У цьому випадку  $\delta_1 = -0.15$ ,  $\delta_2 = 0.072$ ,  $\delta_3 = 0.133$ . Для остаточного вибору значення параметра регуляризації необхідно порівняти величини  $|\delta_1|$  і  $\delta_3$ . При  $|\delta_1| < \delta_3$  вибираємо  $\delta = \delta_1$  і розв'язок інтегрального рівняння (13) визначаємо за формулою (16). При  $|\delta_1| > \delta_3$  приймаємо  $\delta = \delta_3 + \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – як завгодно мале додатне число. Розв'язок інтегрального рівняння (13) у цьому випадку визначаємо за формулою (17).

Термонапружений стан шару, який відповідає знайденому температурному полю, визначаємо за допомогою основних співвідношень термопружності [3].

**3. Чисельна апробація методики.** Для апробації запропонованої методики побудови розв'язку сформульованої задачі ідентифікації розглянемо пряму задачу термопружності для шару при  $q = 0.7$  за наступних теплових крайових умов:  $t_0(\tau) = 0$ ,  $t_1(\tau) = T_0(1 - e^{-a\tau})$ ,  $f(\rho) = 0$ , де  $a, T_0 = \text{const}$ , і знайдемо температурні деформації  $\varepsilon(1, \tau) = \varepsilon_{xx}(1, \tau) = \varepsilon_{yy}(1, \tau)$  поверхні  $\rho = 1$ . Підставивши знайдені деформації як задані в обернену задачу, визначимо температуру  $t_0^\delta(\tau)$  поверхні  $\rho = 0$  як розв'язок оберненої задачі термопружності. Порівнюючи  $t_0^\delta(\tau)$  із заданою у прямій задачі температурою  $t_0(\tau)$ , оцінимо величину відхилення знайденого розв'язку  $t_0^\delta(\tau)$  від  $t_0(\tau)$ .

Поведінку в часі відносних деформацій  $\tilde{\varepsilon}(\tau) = \varepsilon_{xx}(1, \tau)/T_0 = \varepsilon_{yy}(1, \tau)/T_0$  граничної поверхні  $\rho = 1$ , визначених з прямої задачі термопружності для шару при  $a = 1$ ,  $T_0 = 100^\circ\text{C}$ , зображено на рис. 2. Апроксимуючи знайдені деформації кубічним сплайном, дослідимо розв'язок  $t_0^\delta(\tau)$ . Поведінку в часі розв'язку  $t_0^\delta(\tau)$  при  $\delta = 0.137$  і відносній похибці апроксимації деформацій  $0.1 \cdot 10^{-3}$  зображено на рис. 2. Як бачимо на рисунку і як показують обчислення, максимальне значення абсолютного відхилення знайденого розв'язку оберненої задачі  $t_0^\delta(\tau)$  від  $t_0(\tau) \equiv 0$  складає приблизно  $0.74^\circ\text{C}$ , що свідчить про задовільну точність, з якою знайдено цей наближений розв'язок. Коливний характер кривої  $t_0^\delta(\tau)$  на рис. 2 зумовлений наявністю у виразі (17) експоненціальної функції від комплексного аргументу.

**Висновки.** Ідентифікацію невідомого закону зміни в часі температури однієї з граничних поверхонь шару, його теплового та термонапруженого станів здійснено опосередковано через поведінку температури та температурних деформацій іншої граничної поверхні. Показано, що точний розв'язок сформульованої задачі при деяких значеннях коефіцієнта, який характеризує рівень закріплення країв шару від кута повороту, є нестійким. У цьому випадку за допомогою методу параметричної регуляризації побудовано наближений розв'язок задачі та знайдено значення параметра регуляризації, коли розв'язок є стійким.

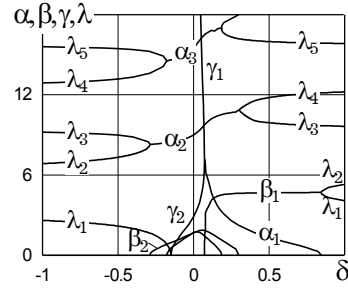


Рис. 1

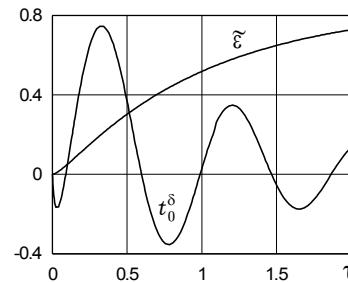


Рис. 2

1. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с.
2. Вигак В. М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. – Киев: Наук. думка, 1979. – 360 с.
3. Коваленко А. Д. Термоупругость. – Киев: Вища шк., 1975. – 216 с.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
5. Маркушевич А. И. Целые функции. – М.: Наука, 1975. – 120 с.
6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
7. Ясинский А. В., Шипка Р. И. Определение осесимметричного температурного поля и термонапряженного состояния круглой пластинки по прогибу // Прикл. механика. – 2001. – **37**, № 8. – С. 118–124.
8. Яхно В. Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. – Новосибирск: Наука, 1990. – 304 с.
9. Alifanov O. M. Inverse heat transfer problems. – Berlin: Springer, 1994. – 348 p.
10. Battaglia J. L., Cois O., Puigsegur L., Oustaloup A. Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2001. – No. 44. – P. 2671–2680.
11. Beck J. V., Blackwell B., Clair C. R. St. Inverse heat conduction: Ill-posed problems. – New York: Wiley-Intersci. Publ., 1985. – 308 p.
12. Blanc G., Raynaud M. Solution of the inverse heat conduction problem from thermal strain measurements // ASME J. Heat Mass Transfer. – 1996. – No. 118. – P. 842–849.
13. Chu S. S., Chang W. J. Inverse problem in an axisymmetric multilayer annular cylinder with an interlayer thermal resistance // Int. Comm. Heat Mass Transfer. – 2003. – **30**, No. 3. – P. 379–390.
14. Kozlov V., Mazya V., Fomin A. The inverse problem of coupled thermo-elasticity // Inverse Probl. – 1994. – **10**, No. 1. – P. 153–160.
15. Lee H. L., Yang Y. C. Inverse problem of coupled thermoelasticity for prediction of heat flux and thermal stresses in an annular cylinder // Int. Comm. Heat Mass Transfer. – 2001. – **28**, No. 5. – P. 661–670.

#### ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕПЛОВОЙ НАГРУЗКИ И ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СЛОЯ ПО ПОВЕРХНОСТНЫМ ДЕФОРМАЦИЯМ

*Сформулирована и решена задача идентификации закона изменения во времени температуры одной из граничных поверхностей слоя, его теплового и термонапряженного состояний по известным на другой граничной поверхности температуре и температурным деформациям. Исследована корректность обратной задачи термоупругости, к которой сведена исходная задача. С использованием решения прямой задачи термоупругости для слоя проведена численная апробация методики решения задачи идентификации.*

#### IDENTIFICATION OF THERMAL LOADING AND THERMAL STRESS STATE OF LAYER ACCORDING TO SURFACE STRAINS

*The problem of identification of the non-stationary one-dimensional temperature field as well as thermal stress state of a layer according to the temperature and thermal strains of one of the outer boundary surfaces is formulated and solved. It is shown that determination of the unknown temperature on the other boundary surface is reduced to the solution of inverse thermoelasticity problem. The well-posedness of the inverse problem is investigated. On the basis of solution to the direct thermoelasticity problem, the numerical verification of the proposed method of solution to the inverse problem is carried out.*

Ин-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
24.12.04